10

多變數微分理論

這一章將介紹多變數微分理論中兩個重要的定理: 隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 與反函數定理 (Inverse Function Theorem)。這兩個定理可以說是微積分理論中的基本定理, 定理的敘述將以簡單且易懂的條件明確指出各變數之間的依存關係。此外, 這一章還會討論函數獨立與函數相關的問題。

_HaMtOrWhlY

單元 10.1 的主題是隱函數定理, 該定理想要回答的問題是: 若一些變數滿足方程式或方程組, 局部來說哪些變數可用其它的變數以函數的形式表達。這個問題的發想是源自於我們在數學上經常會以函數的方式進行討論, 函數的特色在於定義域的變數是獨立的, 而函數的取值則是被決定的量。由此觀點可以把方程式或方程組的自由度看清楚。這個單元會從單位圓爲例解釋這個定理的重要與特色, 並指出隱函數的定義還有隱函數定理成立的判別式; 此外, 各位應在這過程中體會隱函數定理的精神, 以結論來說, 該定理要描述的是局部來說哪些變數可以寫成其它變數的函數, 這是一個存在性的定理, 並不是透過真的求解的方式得到答案, 一般來說我們無法透過直接求解的方式得到函數的明確表示法。然而, 在數學上知道函數的存在性也就可以繼續往後探討更深刻的問題。這份講義中, 我們只對二變數的方程式與四變數的方程組的隱函數定理給予證明, 一般情況的隱函數定理各位可以再去尋找相關文獻繼續深究。

單元 10.2 則是介紹反函數定理。我們在第 4 章曾經討論過單變數的單調函數局部來說反函數存在, 這裡則是要給出較爲一般的情況: 若是多個變數, 給出同樣多個函數, 那麼在什麼情況下自變數與應變數的角色可以互換, 也就是定義域中的變數局部來說可以表示成當分對應域中的變數之函數。而在多變數的情況下有些文獻會將這個定理稱爲逆映射定理。

隱函數定理在近代數學中是經常被拿來應用的定理, 例如欲證明某些非線性微分方程式解的存在性, 其精髓就是源於隱函數定理。而反函數定理的重要應用則是在回答什麼樣的變數變換是一個好的坐標轉換, 各位可以從常見的坐標變換 (例如: 極坐標、球坐標、柱坐標等) 當作實例以感受反函數定理的厲害之處, 然後再對一般的情況做推廣與延伸。

至於函數獨立與函數相關的問題, 一個很好的出發點是線性代數理論, 給了一組向量, 這些向量彼此是線性獨立或是線性相依, 線性代數理論提供了一個很好的觀點回答這個問題。然而很多個函數之相關或獨立 (不見得是線性的關係) 又該如何定義呢? 然後是否有一個很好的判別法確定函數獨立或是函數相關, 這將是單元 10.3 要回答的問題。若多個函數之間是函數相關, 那麼變數之間最終的形式則會產生合成函數的樣貌。

10.1 隱函數定理

H50bB3mgzhs

考慮一個想要研究的系統, 在這個系統中我們會進行觀察然後引進一些變數以記錄這個系統當中的各種資訊, 然而這些變數中每一個都是完全獨立的變數, 還是說彼此之間有一些關係存在, 這是在研究該系統的過程中需要澄清的一個問題。比方說物理上很經典的理想氣體狀態方程式 (ideal gas equation of state) $PV = nRT$, 它說明了壓力、體積、莫耳數與溫度之間並非獨立的變量, 而是這些變量之間有一個牽制, 而所受的牽制就是透過方程式描述這些變量之間的約束。

另一方面, 在學習數學的過程中, 我們花了很多的時間在探討函數 (function) 的各種性質。以單變數函數 $y = f(x)$ 爲例, 定義域 D 是一個獨立變數所成的集合, 而值域 E 中的元素則是根據定義域中的獨立變數 x 透過函數關係得到的數值; 也就是說, 值域中的元素 y 是一個被決定的量。至於多變數函數 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 也是如此, 只是定義域中的獨立變數有 n 個, 有時候我們會把獨立變數的個數稱爲 自由度 (degree of freedom), 此時值域中的 y 也是被決定的量。

如何在一個系統中定義適合的變數, 這是數學建模 (mathematical modeling) 的問題。而這一節主要想問的是: 當我們給出一些有關各種變數的方程式或是方程組之下, 哪些變數可以當成獨立的變數, 哪些變數會是被決定的量?

前面的介紹或許顯得過於抽象, 這裡我們用數學上再熟知不過的例子說明這個問題。大家都知道: 在平面 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ 當中滿足方程式 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 的點所成的集合是半徑爲 1 的圓, 其中 $(0, 0)$ 是圓心之位置。

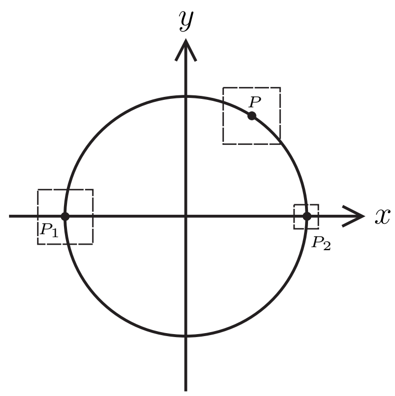

圖 10.1: 從方程式 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 觀察哪些點的附近可以表示成函數的圖形。

現將這個集合記成 C, 若用幾何的術語, 我們會說集合 C 是一條曲線 (curve), 由鉛直線判別法 (Vertical Line Test) 知道: 曲線 C 整體來說無法用一個函數的圖形 (graph of function) 完全表示。然而, 我們可以透過解方程式的過程

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

得知: 曲線 C 可以用兩個函數 $f_+(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 與 $f_-(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ 的圖形取聯集表示。也就是說, 曲線 C 在上半平面的部分可以表示成函數 $f_+(x)$ 的圖形, 即 $C_+ = \{(x, f_+(x)) | -1 \le x \le 1\}$; 而曲線 C 在下半平面的部份可用另一個函數 $f_-(x)$ 的圖形表達, 即 $C_- = \{(x, f_-(x)) | -1 \le x \le 1\}$。

然而, 曲線 C 在 $(x,y)=(-1,0)$ 與 $(x,y)=(1,0)$ 的附近就顯得十分尷尬。在繼續討論前, 這裡要先解釋清楚「附近」的意思。數學上描述一個點的「附近」會用鄰域的概念描述。所謂在平面中一點 $P(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 的 **鄰域** (neighborhood of P), 記爲 $U(P,\delta)$, 指的是集合 arZ19cH1rC4

$$\begin{aligned} U(P,\delta) &= (x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\delta,y_0+\delta) \\ &= \{(x,y)|x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)\}, \end{aligned}$$

其中 $\delta>0$; 也就是說, $U(P,\delta)$ 是一個以 $P(x_0,y_0)$ 爲中心, 邊長爲 2δ 的一個方形區域。現標記 $P_1=(-1,0)$, 然後觀察 $C\cap U(P_1,\delta)$ 的部份, 此時會發現到:

- 不論 δ 取得有多小, 曲線 $C\cap U(P_1,\delta)$ 無法表示成一個函數 $y=f(x)$ 的圖形。

這裡解釋一下其原因: 給定 $\delta>0$, 考慮 $x'=-1+\frac{\delta^2}{2}$, 則 $y'_\pm=\pm\sqrt{1-\left(-1+\frac{\delta^2}{2}\right)^2}$, 因爲

$$|y'_\pm|^2=1-\left(-1+\frac{\delta^2}{2}\right)^2=\delta^2-\frac{\delta^4}{4}<\delta^2,$$

所以 (x',y'_+) 與 (x',y'_-) 都在 $U(P_1,\delta)$ 內。因此曲線 $C\cap U(P_1,\delta)$ 無法表示成一個函數的圖形。同理, 我們也可以得到:

- 記 $P_2=(1,0)$, 不論 δ 取得有多小, 曲線 $C\cap U(P_2,\delta)$ 也無法表示成一個函數 $y=f(x)$ 的圖形。

現在我們順著剛才的邏輯, 重新觀察曲線 C 上的其它點, 可得以下結論:

- 若 $P(x,y)\in C$, 且 $P\neq P_1=(-1,0), P\neq P_2=(1,0)$, 則存在 $\delta>0$ 使得 $C\cap U(P,\delta)$ 可以用一個函數的圖形 $(x,y=f(x))$ 表示。

這裡稍微解釋其原因: 若 $P(x,y)\in C$, 且 $P\neq P_1=(-1,0), P\neq P_2=(1,0)$, 則坐標 P 的 y 值非零。根據曲線的連續性, 可選 $\delta=\frac{|y|}{2}>0$, 則 $C\cap U(P,\delta)$ 是一個函數的圖形 $(x,y=f(x))$ 之形式。

現在我們給出隱函數的定義。

定義 1. 假設 $F(x,y)$ 是一個定義在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的函數, 如果存在一個區域 $R=I_1\times I_2\subset D$, 其中 I_1 與 I_2 都是 $\mathbb{R}$ 上的開區間, 使得對所有 $x\in I_1$, 存在唯一 $y\in I_2$ 滿足 $F(x,y)=0$, 此時稱方程式 $F(x,y)=0$ 唯一確定了一個 *隱函數* (implicit function) $y=f(x)$, 其中 $f:I_1\to I_2$。此時, 對所有 $x\in I_1$ 都有 $F(x,f(x))=0$。 mSvy39YtZdc

在介紹隱函數定理之前, 我們用以下幾點解釋與這個理論相關的事情:

(A) 平常在寫方程式的時候, 書寫的方式很隨興, 只要一些變量之間的運算式最後用等號串起, 就會形成方程式。所以我們會在多數情況看到圓的方程式是寫成 $x^2+y^2=1$ 的樣子。在隱函數定理的討論, 我們會將方程式適當地整理, 透過移項的過程讓等式的右邊爲零; 以圓爲例, 先將方程式改寫成 $x^2+y^2-1=0$, 然後記 $F(x,y)=x^2+y^2-1$, 所以討論隱函數存在問題時, 方程式形式上就記成 $F(x,y)=0$。

(B) 一個二變數的函數 $F(x,y)$ 意味著 x 和 y 都是獨立的變數, 自由度是 2, 當我們考慮方程式 $F(x,y)=0$ 的時候, 它會導致 x 和 y 之間受到牽制, 於是設定方程式將會減少自由度。在「理想」的情況下, 每給一個方程式將會減少一個自由度。從圓的例子來看, 原本 $F(x,y)$ 的自由度是 2, 設立了一條方程式之後, 自由度少 1, 所以集合 C 的自由度變成 $2-1=1$, 幾何上顯示它是一維曲線。然而一些特殊的情況, 自由度會降得更多。比方說 $F(x,y)=x^2+y^2$, 然後看方程式 $F(x,y)=0$, 則滿足方程式的點只有 $(x,y)=(0,0)$, 自由度是 0, 幾何上來說, 它變成零維的幾何物件。若是考慮 $F(x,y)=x^2+y^2+1$, 然後要求 $F(x,y)=0$ 的話, 那麼不會有 (x,y) 滿足方程式。所以若我們要問方程式 $F(x,y)=0$ 的某個變數是否一個可以表示成另一個變數的函數之問題時, 勢必要先假定滿足方程式的集合非空, 也就是假設存在某個點 (x_0,y_0) 滿足 $F(x_0,y_0)=0$ 這個情況下繼續討論。

(C) 在討論 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 是否可以表示成函數圖形的問題中, 我們利用解方程式的過程得知 y 能不能寫成 x 的函數, 那時我們描述了更多的現象, 除了將上半平面的曲線用一個函數的圖形表示, 下半平面的曲線用另一個函數的圖形表示之外, 函數的表達也一淸二楚。但是解方程式這件事情並不是一個長久的解決問題之道, 這是因爲我們解方程式的能力其實是非常有限的, 雖然二次方程式的公式解普遍來說都可以朗朗上口, 但三次方程式或四次方程式的公式解就不是耳熟能詳的了; 甚至在數學上可以證明: 五次方程式以上並沒有公式解。所以只要隨便寫了一個一元高次方程式, 想要直接解出 y 和 x 的關係困難度極高。更何況兩個變數的方程式可以更複雜, 這也說明我們不可能研發出一套有效解出一般方程式的能力。

然而, 對於一個方程式 $F(x,y)=0$, 在隱函數的定義中, 我們感興趣的其實只是局部 (local) 的現象; 也就是說, 對於某個滿足 $F(x_0,y_0)=0$ 的點 (x_0,y_0), 是否存在 $\delta>0$, 使得對所有 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, y 可以表示成 $y=f(x)$ 且滿足 $F(x,f(x))=0$? 又或者我們會問: 是否存在 $\delta>0$, 使得對所有 $y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$, x 可以表示成 $x=g(y)$ 且滿足 $F(g(y),y)=0$? 若是回答局部來說一個變數是否可以表示成另一個變數的函數, 隱函數定理的特色是: 在一些情況下, 我們不需要用解方程式的方法而得知隱函數的存在性。

這裡或許再補充說明在 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 的例子中, 如果是想要問是否存在 $\delta>0$, 使得對所有 $y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$, x 可以表示成 $x=g(y)$ 且滿足 $F(g(y),y)=0$? 此時的結論會是:

(1) 若 $P=(0,1)$ 或 $P=(0,-1)$, 則對任意 $\delta>0$, 曲線 $C\cap U(P,\delta)$ 無法表示成函數 $x=g(y)$ 的圖形。

(2) 若 $P\neq(0,1)$ 且 $P\neq(0,-1)$, 則存在 $\delta>0$ 使得曲線 $C\cap U(P,\delta)$ 可以表示成函數 $x=g(y)$ 的圖形。

(D) 在 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 的例子中, 我們淸楚地看到: $P_1=(-1,0)$ 和 $P_2=(1,0)$ 和曲線 C 上的其它點最大差異在於曲線 C 在 P_1 與 P_2 具有鉛直的切線 (vertical tangent line)。這件事情的發生在我們要研究的問題來說是合理的現象。這是因爲: 既然想要將 $F(x,y)=0$ 中的 x 和 y 表示成 $y=f(x)$, 在單變數理論中對於 $|f'(x)|=\infty$ 這件事本來就會令人非常介

意。將曲線想成質點運動的軌跡時, 一條曲線若在某一點的切線與 x 軸垂直, 從 x 的部分來看, 表示這一個質點在該時刻之後對於 x 部份有可能會反方向行走, 這樣就會破壞了函數的定義。

至於導函數 $f'(x)$ 與二變數函數 $F(x,y)$ 之間的關聯是什麼呢? 我們先做以下觀察: 假如隱函數 $y=f(x)$ 存在, 則有 $F(x,f(x))\equiv 0$, 而且如果 $F(x,y)$ 對於各變數的偏導函數皆連續, 由鏈鎖律 (Chain Rule) 得知: 將方程式兩邊對於變數 x 微分, 則

$$F_x+F_y\cdot y'=F_x+F_y\cdot f'=0,$$

換言之, 會讓 $|f'(x)|=\infty$ 發生的點勢必滿足 $F_y=0$。所以各位可以看到隱函數定理的其中一個條件是 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, 然後在這樣的假設下, 希望證明局部上 y 可以寫成 x 的函數。

以下就開始介紹並證明隱函數定理。

定理 2 (隱函數定理, Implicit Function Theorem)**.** 考慮方程式 $F(x,y)=0$, 假設

(A) 在矩形區域 $R=(x_0-a,x_0+a)\times(y_0-b,y_0+b)$ 上 $F_x(x,y)$ 與 $F_y(x,y)$ 都是連續函數。

(B) $F(x_0,y_0)=0$。

(C) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$。

則有以下結論:

(1) 在 (x_0,y_0) 的附近, 方程式 $F(x,y)=0$ 可以唯一確定一個函數 $y=f(x)$, 而且 $y_0=f(x_0)$。更明確地說, 存在 $\delta,\delta'>0$ 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\delta',y_0+\delta')\subset R$, 而且對於每個 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 方程式 $F(x,y)=0$ 在 $(y_0-\delta',y_0+\delta')$ 中存在唯一的解 y。由這樣建立的函數關係記成 $y=f(x)$, 其中 $y_0=f(x_0)$。此時, 對所有 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 都有 $F(x,f(x))=0$。

(2) 函數 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上是連續函數。

(3) 函數 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上導函數 $y'=f'(x)$ 連續, 並且 $f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$。

證明:

(1) 由於 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, 不妨假設 $F_y(x_0,y_0)>0$。因爲 $F_y(x,y)$ 連續, 所以 $F_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一個鄰域內滿足 $F_y(x,y)>0$。爲了討論方便起見, 我們不妨假定函數 $F_y(x,y)$ 就在區域 $R=(x_0-a,x_0+a)\times(y_0-b,y_0+b)$ 上的所有點都滿足 $F_y(x,y)>0$。此時, 選取 $\delta'=b$。

SW3m4yn3OBA

接著, 考慮單變數函數 $F_y(x_0,y)$, 其中 $y\in(y_0-b,y_0+b)$, 因爲對所有 $y\in(y_0-b,y_0+b)$ 都有 $F_y(x_0,y)>0$, 所以 $F(x_0,y)$ 在 (y_0-b,y_0+b) 上是一個嚴格遞增函數 (strictly increasing function)。因爲 $F(x_0,y_0)=0$, 由函數的連續性得知 $F(x_0,y_0+b)>0, F(x_0,y_0-b)<0$。

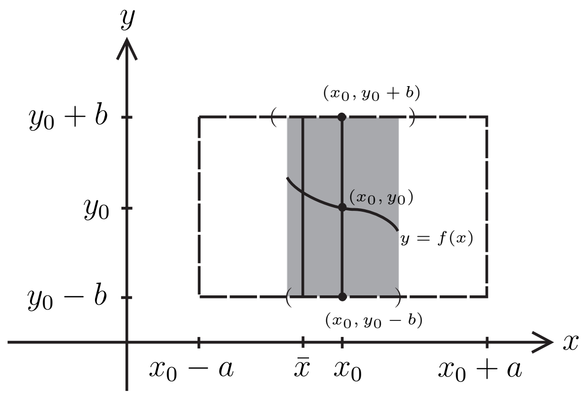

圖 10.2: 方程式 $F(x, y)$ 關於隱函數 $y = f(x)$ 的存在性。

再從 $(x_0, y_0 + b)$ 這一點觀察, 考慮單變數函數 $F(x, y_0 + b)$, 因爲 $F(x_0, y_0 + b) > 0$, 由函數 $F(x, y)$ 的連續性告知: 所以存在 $\delta_1 > 0$ 使得在 $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ 上 $F(x, y_0 + b) > 0$。同理, 存在 $\delta_2 > 0$ 使得對所有 $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ 都有 $F(x, y_0 - b) < 0$。

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, 則對所有 $\bar{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 都有 $F(\bar{x}, y_0 - b) < 0$ 與 $F(\bar{x}, y_0 + b) > 0$。由中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 得知: 存在 $\bar{y} \in (y_0 - b, y_0 + b)$ 使得 $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$。又因爲 $F_y(x, y) > 0$, 所以 $F_y(\bar{x}, y) > 0$, 換言之, $F(\bar{x}, y)$ 對 y 而言是嚴格遞增的, 所以在區域 R 中讓方程式 $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ 的 $\bar{y}$ 是唯一的。如此就建立了 $\bar{y}$ 與 $\bar{x}$ 的關係; 也就是說, 給定 $\bar{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 存在唯一 $\bar{y} \in (y_0 - b, y_0 + b)$ 使得 $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, 現將這個函數關係記成 $y = f(x)$, 其中 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 而且此時自然會有 $y_0 = f(x_0)$。

H8MnO2SHtEM

(2) 任給 $\bar{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 記 $\bar{y} = f(\bar{x})$。對任意正數 $\bar{\varepsilon} > 0$, 現作一組平行線 $y = \bar{y} + \bar{\varepsilon}$ 與 $y = \bar{y} - \bar{\varepsilon}$, 由 (1) 的證明知道: $F(\bar{x}, \bar{y} + \bar{\varepsilon}) > 0$ 且 $F(\bar{x}, \bar{y} - \bar{\varepsilon}) < 0$。由函數 $F(x, y)$ 的連續性知道: 存在 $\bar{\delta}_1 > 0$ 使得對所有 $x \in (\bar{x} - \bar{\delta}_1, \bar{x} + \bar{\delta}_1)$ 都有 $F(x, \bar{y} + \bar{\varepsilon}) > 0$, 存在 $\bar{\delta}_2 > 0$ 使得對所有 $x \in (\bar{x} - \bar{\delta}_2, \bar{x} + \bar{\delta}_2)$ 都有 $F(x, \bar{y} - \bar{\varepsilon}) < 0$。取 $\bar{\delta} = \min(\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2) > 0$, 則對所有 $x \in (\bar{x} - \bar{\delta}, \bar{x} + \bar{\delta})$ 都有 $F(x, \bar{y} + \bar{\varepsilon}) > 0$ 且 $F(x, \bar{y} - \bar{\varepsilon}) < 0$。由中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 得知: 在 $(\bar{y} - \bar{\varepsilon}, \bar{y} + \bar{\varepsilon})$ 內存在唯一 y 使得 $F(x, y) = 0$, 這就表示: 對所有 x 滿足 $|x - \bar{x}| < \bar{\delta}$, 它所對應的函數值 $y = f(x)$ 都滿足 $|y - \bar{y}| < \bar{\varepsilon}$。因此 $y = f(x)$ 在區間 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上連續。

mOdfQxb7hQ4

(3) 給定 $\bar{x}, \bar{x} + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 記 $\bar{y} = f(\bar{x})$ 與 $\bar{y} + \Delta y = f(\bar{x} + \Delta x)$, 由函數 $y = f(x)$ 的定義知道:

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y) = 0,$$

由均值定理 (Mean Value Theorem) 得知: 存在 $\theta_1 \in (0, 1)$ 與 $\theta_2 \in (0, 1)$ 使得

$$\begin{aligned}
0 &= F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y) - F(\bar{x}, \bar{y}) \\
&= F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y) - F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y}) + F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y}) - F(\bar{x}, \bar{y}) \\
&= F_y(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \theta_1 \Delta y)\Delta y + F_x(\bar{x} + \theta_2 \Delta x, \bar{y})\Delta x,
\end{aligned}$$

於是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(\bar{x}+\theta_2\Delta x, \bar{y})}{F_y(\bar{x}+\Delta x, \bar{y}+\theta_1\Delta y)},$$

由 $y = f(x)$ 和 $F_x(x,y)$ 還有 $F_y(x,y)$ 的連續性以及 $F_y(x,y) \neq 0$, 將上式兩邊取極限 $\Delta x \to 0$ 得到

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\bar{x}+\Delta x)-f(\bar{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} -\frac{F_x(\bar{x}+\theta_2\Delta x, \bar{y})}{F_y(\bar{x}+\Delta x, \bar{y}+\theta_1\Delta y)} = -\frac{F_x(\bar{x},\bar{y})}{F_y(\bar{x},\bar{y})}, \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在區間 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上是可微分的。

最後, 因爲 $F_x(x,y)$ 與 $F_y(x,y)$ 在區域 R 上是連續函數, 而且 $F_y(x,y) \neq 0$, 所以 $f'(x)$ 在區間 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上是連續函數。

□

這裡註記幾件事情:

(A) 隱函數定理中, 如果 $F(x,y)$ 在區域 R 上具有 k-次偏導函數皆連續, 則隱函數 $y=f(x)$ 在區間 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上也會滿足 k-次導函數連續。

Jc7VkjTHmf4

(B) 上述隱函數定理是在說明對於方程式 $F(x,y)=0$ 什麼時候 y 可以表示成 x 的函數。我們也可以改問: 方程式 $F(x,y)=0$ 什麼時候 x 可以表示成 y 的函數。這時, 在變數的角色對調之下, 只要將定理的條件 (3) 改成 $F_x(x_0,y_0)\neq 0$ 而其它條件依舊成立的情況下, 則局部來說就會有 $x=g(y)$ 滿足 $x_0=g(y_0)$ 以及 $F(g(y),y)=0$。

(C) 定理的條件只是說 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 的話會存在隱函數 $y=f(x)$, 並沒有說明 $F_y(x_0,y_0)=0$ 的時候會發生什麼事。實際上, 若 $F_y(x_0,y_0)=0$, 則可能會有隱函數, 也可能不存在隱函數。例如: $F(x,y)=x^3-y^3=0$ 在 $(0,0)$ 處 $F_y(0,0)=0$, 而且在 $(0,0)$ 的附近可以確定隱函數 $y=f(x)=x$。這是因爲將方程式 $F(x,y)=x^3-y^3=0$ 整理成

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x-y)\left(\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)=0,$$

只要 $(x,y)\neq(0,0)$, 則 $\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}>0$, 所以方程式 $F(x,y)=0$ 將解出 $y=x \stackrel{記}{=} f(x)$。

(D) 隱函數定理是說: 對於一個方程式 $F(x,y)=0$, 若你想要問哪個變數是被決定的, 那麼就去計算函數 $F(x,y)$ 對於你覺得它會是被決定的變數進行偏導數, 然後代入要研究的點看看是否偏導數爲零, 如果偏導數不是零的話, 那麼這個變數在局部上就可以被其它變數決定。

現將上面的隱函數定理推廣到更多變數的情形。

19NJmkBKaUs

定理 3 (隱函數定理, Implicit Function Theorem)**.** 考慮方程式 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, 假設

(A) 在區域 $R = \prod_{i=1}^{n}(x_i^0 - a_i, x_i^0 + a_i) \times (y^0 - b, y^0 + b)$ 上函數 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ 具有對所有變數的偏導函數皆連續。

(B) $F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0) = 0$。

(C) $F_y(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0) \neq 0$。

則有以下結論:

(1) 在點 $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0)$ 的附近, 方程式 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ 可以唯一確定一個函數 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 而且 $y^0 = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$。更明確地說, 存在一個鄰域 $U \times I = \prod_{i=1}^{n}(x_i^0 - \delta_i, x_i^0 + \delta_i) \times (y^0 - \delta', y^0 + \delta') \subset R$ 使得對於每個 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, 方程式 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ 在 I 中存在唯一的解 y, 由此建立的函數關係記成 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 其中 $y^0 = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$。此時, 對所有 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, 都有 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0$。

(2) 函數 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在區域 U 上是連續函數。

(3) 函數 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在區域 U 上的偏導函數 $y_{x_i} = f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 皆連續, 而且

$$f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{F_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)}{F_y(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)}, \quad \text{其中} \quad i = 1, 2, \ldots, n。$$

這個定理的證明仿照前面的方法便可逐一實現, 只要將原先的區間 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 改用鄰域 $U((x_1, x_2, \ldots, x_n), \delta)$ 的方式改寫即可。

pzP-0VLevz4

以下我們要討論方程組的隱函數存在定理。這裡, 我們先討論四個變數對於兩個方程式的隱函數定理, 然後再將結果推廣至更多變數的方程組問題。考慮方程組

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0, \end{cases}$$

我們要問的是: 對於這個方程組, 我們是否可以將其中兩個變量 (比方說 u 和 v) 寫成另外兩個變量 (比方說 x 和 y) 的函數呢? 如果可以的話, 這個向量值函數 $(u(x, y), v(x, y))$ 又有什麼性質呢?

為回答此問題, 這裡先引進雅可比行列式的概念。現有兩個四變數函數 F 與 G, 在變數 x, y, u, v 當中挑出兩個變數, 比方說 u, v, 定義 F, G 對於 u, v 的 **雅可比行列式** (Jacobi determinant)

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}。$$

在實際應用層面, 這兩個變數的選取, 是基於你想要研究它們是不是可以成為被決定的變數, 於是去計算四變數函數對於被決定的變數之偏導函數。而以下定理是建立在雅可比行列式不為零的前提下得到隱函數的存在性。

定理 4. 考慮方程組 $F(x,y,u,v)=0$ 與 $G(x,y,u,v)=0$, 假設

fa_RWxU6cCA

(A) 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的一個鄰域

$$R=(x_0-a,x_0+a)\times(y_0-b,y_0+b)\times(u_0-c,u_0+c)\times(v_0-d,v_0+d)$$

當中, 函數 $F(x,y,u,v)$ 與 $G(x,y,u,v)$ 對於各種變數之偏導函數皆連續。

(B) 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 滿足方程組 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$ 與 $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$。

(C) 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 關於 F,G 對於 u,v 的雅可比行列式

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P(x_0,y_0,u_0,v_0)}=\left|\begin{array}{cc}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{array}\right|_{P(x_0,y_0,u_0,v_0)}\neq 0。$$

則有以下結論:

(1) 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的附近, 方程組 $F(x,y,u,v)=0$ 與 $G(x,y,u,v)=0$ 可以唯一確定一個向量值函數 $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$ 且滿足 $(u_0,v_0)=(f(x_0,y_0),g(x_0,y_0))$。更明確地說, 存在一個鄰域 $U\times V=(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)\times(y_0-\delta_2,y_0+\delta_2)\times(u_0-\delta_1',u_0+\delta_1')\times(v_0-\delta_2',v_0+\delta_2')\subset R$ 使得對每個 $(x,y)\in U$, 方程組 $F(x,y,u,v)=0$ 與 $G(x,y,u,v)=0$ 在 V 中存在唯一解 (u,v)。由此建立的向量值函數記爲 $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$, 其中 $(u_0,v_0)=(f(x_0,y_0),g(x_0,y_0))$。此時, 對所有 $(x,y)\in U$, 都有

$$\begin{cases}F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0\\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0。\end{cases}$$

(2) 向量值函數 $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$ 在區域 U 上是連續函數。

(3) 向量值函數 $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$ 在區域 U 上的各種偏導函數皆連續, 而且

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{bmatrix}。$$

證明:

(1) 因爲在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 處 $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P(x_0,y_0,u_0,v_0)}\neq 0$, 所以 F_u 與 F_v 至少有一個在 P 點的值非零。不妨假設 $F_u(x_0,y_0,u_0,v_0)\neq 0$, 另一個情況同理可證。此時, 對於方程式 $F(x,y,u,v)=0$, 由隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 得知: 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的一個鄰域 $W\times I$ 中會有 $u=\varphi(x,y,v)$, 其中 $\varphi: W\to I$ 使得

vsK-SzD2Img

$$F(x,y,\varphi(x,y,v),v)=0,\quad u_0=\varphi(x_0,y_0,v_0),\quad \varphi_v=-\frac{F_v}{F_u},$$

現將 $u=\varphi(x,y,v)$ 代入 $G(x,y,u,v)=0$ 之後得到

$$H(x,y,v)\overset{\text{記}}{=}G(x,y,\varphi(x,y,v),v)=0,$$

觀察函數 $H(x,y,v)$, 在 (x_0,y_0,v_0) 的地方, 有

$$H_v=G_u\cdot\varphi_v+G_v=G_u\cdot\left(-\frac{F_v}{F_u}\right)+G_v=\frac{F_uG_v-F_vG_u}{F_u}=\frac{1}{F_u}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0,$$

而且 $H(x_0,y_0,v_0)=0$ 所以由隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 得知: 存在 (x_0,y_0,v_0) 的一個鄰域 $U\times I'$ 使得 $v=g(x,y)$, 其中 $g:U\to I'$ 使得 $H(x,y,g(x,y))=0$。

記 $f(x,y)=\varphi(x,y,g(x,y))$, 其中 $f:U\to I$, 則在 (x_0,y_0) 的鄰域 U, 有

$$\begin{cases} F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0\\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0\text{。}\end{cases}$$

z5hbscg2Ja8

(2) 因爲 $u=\varphi(x,y,v)$ 在 (x_0,y_0,v_0) 的鄰域 W, $v=g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的鄰域 U 都連續, 所以合成函數 $f(x,y)=\varphi(x,y,g(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 的鄰域 U 也連續。於是 $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 的一個鄰域 U 上連續。

(3) 最後, 欲得到隱函數的各種偏導函數, 利用鏈鎖律 (Chain Rule), 將

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

兩邊對 x 求偏導數, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ v_x\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}F_x\\ G_x\end{bmatrix}$$

兩邊對 y 求偏導數, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0\\ \frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_y\\ v_y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}F_y\\ G_y\end{bmatrix}$$

將兩個矩陣式子再做合併, 則得

$$\begin{bmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{bmatrix},$$

因此

$$\begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{bmatrix}\text{。}$$

$\square$

例 **5.** 考慮方程組

80KfdsTapqI

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x^2 + y - u^2 - v^2 = 0 \\ G(x,y,u,v) = xy - 1 + u - v = 0。\end{cases}$$

(A) 在 $P(2,1,1,2)$ 的一個鄰域內是否存在隱函數 $u = u(x,y)$ 與 $v = v(x,y)$?

(B) 在 $P(2,1,1,2)$ 的一個鄰域內是否存在隱函數 $x = x(u,y)$ 與 $v = v(u,y)$?

解.

(A) 計算

$$\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}_{P(2,1,1,2)} = \begin{vmatrix} -2u & -2v \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{P(2,1,1,2)} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

所以由隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 得知: 在 $P(2,1,1,2)$ 的一個鄰域內存在隱函數 $u = u(x,y)$ 與 $v = v(x,y)$。

(B) 計算

$$\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}_{P(2,1,1,2)} = \begin{vmatrix} 2x & -2v \\ y & -1 \end{vmatrix}_{P(2,1,1,2)} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

所以無法利用隱函數定理得到結果。

現將方程組改寫成

$$\begin{cases} x^2 - v^2 = u^2 - y \\ xy - v = 1 - u, \end{cases}$$

考慮 $(u,y) = (1,y)$, 其中 $y \in (1-\delta, 1+\delta), 0 < \delta < 1$, 代入方程式後得到

$$\begin{cases} x^2 - v^2 = 1 - y \\ xy - v = 0, \end{cases}$$

將第二式 $v = xy$ 代入第一式之後得到

$$x^2 - (xy)^2 = (1-y^2)x^2 = (1+y)(1-y)x^2 = 1 - y,$$

若 $y \neq 1$, 則

$$(1+y)x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{1+y} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y}}$$

所以方程組在 $P(2,1,1,2)$ 的任何一個鄰域內都無法表示成向量值函數 $(x(u,y), v(u,y))$ 的樣子。

dyKtz2D1xyU

這一節最後, 我們給出更多變數的方程組隱函數存在定理。

定理 6. 假設有一個以 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ 爲變數的方程組

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \end{cases}$$

其中函數 $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m), k = 1, 2, \ldots, m$ 滿足

(A) 在 $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ 點的一個鄰域

$$R = \prod_{i=1}^{n}(x_i^0 - a_i, x_i^0 + a_i) \times \prod_{j=1}^{m}(y_j^0 - b_j, y_j^0 + b_j)$$

當中對於每個變數的偏導函數皆連續。

(B) $F_k(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0) = 0, k = 1, 2, \ldots, m$。

(C) 在 $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ 點的雅可比行列式

$$\left.\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}\right|_P \neq 0,$$

則有以下結論:

(1) 存在一個 P 的鄰域 $U \times V = \prod_{i=1}^{n}(x_i^0 - \delta_i, x_i^0 + \delta_i) \times \prod_{j=1}^{m}(y_j^0 - \delta_j', y_j^0 + \delta_j') \subset R$ 使得對任何 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, 方程組

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

存在唯一解 $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$。由此方程組建立的向量值函數記爲 $y_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 其中 $y_j^0 = f_j(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), j = 1, 2, \ldots, m$。此時, 對所有 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$ 與 $k = 1, 2, \ldots, m$, 都有

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0。$$

(2) 每個 $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), j = 1, 2, \ldots, m$ 在區域 U 上都是連續函數。

(3) 每個 $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), j = 1, 2, \ldots, m$ 在區域 U 上都有連續的偏導函數, 並且這些偏導函數可以從方程組

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

解出; 即

$$\left[\ \tfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\ \right]_{m\times n} = -\left[\ \tfrac{\partial F_k}{\partial y_j}\ \right]_{m\times m}^{-1}\left[\ \tfrac{\partial F_k}{\partial x_i}\ \right]_{m\times n}。$$

10.2 反函數定理

首先我們回顧單變數函數的反函數理論。在單元 5.2, 我們曾經證明了以下定理:

Aem2cmmfx5s

定理 1 (反函數的求導法則)**.** 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處導數存在, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 並且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的一個鄰域內連續且嚴格單調(嚴格遞增或嚴格遞減), 則反函數 $x = \varphi(y)$ 在 $y = y_0 = f(x_0)$ 是可微分的, 並且 $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$。

此定理當初的證明方式是先建立單調函數的反函數存在, 然後證明反函數連續, 最後再透過導數的定義直接計算反函數的導數之結果。以下我們利用隱函數定理重新證明一次, 只是這時我們需要假設函數在開區間 I 上的導函數連續, 即 $f(x) \in C^1(I)$。

證明: 考慮二變數函數 $F(x, y) = y - f(x)$, 對於 $F(x, y)$ 而言, 定義域是 $R = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$。因爲 $f(x) \in C^1(I)$, 所以 $F(x, y) \in C^1(R)$。給定 $x_0 \in I$, 記 $y_0 = f(x_0)$, 因爲 $f'(x_0) \neq 0$, 所以函數 $F(x, y)$ 在 $(x_0, y_0) \in R$ 處滿足

$$F(x_0, y_0) = y_0 - f(x_0) = y_0 - y_0 = 0$$

以及

$$F_x(x_0, y_0) = -f'(x_0) \neq 0,$$

由隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 得知: 存在 $\delta > 0$ 使得在 $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ 上有函數 $x = \varphi(y)$ 並且滿足 $F(\varphi(y), y) = 0$。此時, $F(\varphi(y), y) = y - f(\varphi(y)) = 0$; 也就是說, 對所有 $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ 都有 $f(\varphi(y)) = y$, 所以 $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函數。此外, 隱函數定理也告知

$$\varphi'(y) = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} = \frac{1}{f'(x)},$$

特別地, $\varphi'(y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$。 □

現在我們要研究多變數的情況。給定一個 映射 (map) $T : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 其中 $(u, v) \in R$ 與 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 滿足

4OuTeZkP4fU

$$T : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

現在要問的是: 關於映射 T 是否存在 逆映射 (inverse map) 呢? 也就是說, 是否存在一個以 x, y 爲自變數而 u, v 爲應變數的映射

$$S : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

使得 $S \circ T = \mathrm{Id}$, 即

$$S \circ T(u, v) = S(x(u, v), y(u, v)) = (u(x(u, v), y(u, v)), v(x(u, v), y(u, v))) = (u, v)?$$

若 S 是 T 的逆映射, 我們會用符號 T^{-1} 重新表示 T 的逆映射。

Aj2YCRVpvXA

定理 2 (反函數定理 Inverse Function Theorem)**.** 考慮映射 $T: R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 其中 $(u,v) \in R$ 與 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 滿足

$$T: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \end{cases}$$

假設映射 T 在區域 R 上具有連續的偏導函數, 即 $x(u,v), y(u,v) \in C^1(R)$。而 $P = (u_0, v_0) \in R$ 與 $P' = (x_0, y_0) = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))$。如果在 P 點的雅可比行列式

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_P \neq 0,$$

則存在 P 的一個鄰域 $U(P,\delta)$ 與 P' 的一個鄰域 $U'(P',\delta')$ 使得映射 $T: U \to U'$ 可逆。若記 T 的逆映射爲 $S: U' \to U$, 其中

$$S: \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y), \end{cases}$$

則逆映射 S 對於變數 x 與 y 具有連續的偏導函數, 並且 T 的微分映射 (differential map) 與 S 的微分映射若寫成矩陣的形式時彼此互爲反矩陣, 即

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

證明: 考慮方程組

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x - x(u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = y - y(u,v) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

因爲在 (x_0, y_0, u_0, v_0) 滿足

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)} = \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \neq 0,$$

由隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 得知: 在 (x_0, y_0, u_0, v_0) 的一個鄰域 $U' \times U$ 中存在映射 $S: U' \to U$ 滿足

$$S: \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y), \end{cases}$$

以及 $u_0 = u(x_0,y_0), v_0 = v(x_0,y_0)$。現在要驗證: S 是 T 的逆映射: 因爲映射 S 必須滿足原方程組 (1), 由此得到對所有 $(x,y) \in U'$

$$\begin{cases} x - x(u(x,y), v(x,y)) = 0 \\ y - y(u(x,y), v(x,y)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(u(x,y), v(x,y)) = x \\ y(u(x,y), v(x,y)) = y, \end{cases} \tag{2}$$

所以 S 是 T 的逆映射。

此外, 隱函數定理也告知 $u(x,y)$ 與 $v(x,y)$ 在 U' 上具有連續的偏導函數。現將 (2) 式對於變數 x 與 y 計算偏導函數, 得到

bxH4UCGJy44

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=1 \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases} \quad \text{與} \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=1\text{。} \end{cases}$$

將這些式子寫成矩陣的形式, 則得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\text{。}$$

□

反函數定理經常被拿來應用的情況是回答一個變數變換是否會是一種坐標變換。這裡以平面中的直角坐標與極坐標的關係來討論之。

例 **3.** 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上有直角坐標系 (Cartesian coordinates system) (x,y) 與極坐標系 (polar coordinates system) (r,θ), 其中 r 表示從坐標原點 $O(0,0)$ 指向 $P(x,y)$ 點的徑向, θ 表示極軸(x-軸) 和 $\overline{OP}$ 之間的廣義角。兩系統的關係爲 $x=r\cos\theta$ 與 $y=r\sin\theta$, 因爲

CnVA-GQ8gJM

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r,$$

由反函數定理 (Inverse Function Theorem) 得知: 若 P 不是坐標原點, 則存在 P 的一個鄰域使得 $r=r(x,y), \theta=\theta(x,y)$。

雖然兩坐標系統在坐標原點的地方無法使用反函數定理, 但在實際應用的時候問題不大, 比方說在進行重積分時坐標變換有一個點的屬性被破壞掉並不影響最後的積分值。又或者說, 如果問題真的牽涉到要處理坐標原點附近的性質時, 那麼就重新選取新的極坐標系統讓所要討論的點不是極點即可。

例 **4.** 驗證映射 $T:\begin{cases} u=xy \\ v=\frac{y}{x} \end{cases}$ 在第一象限的部分是一種坐標變換。

zT0qSeOSE2Y

解**.** 因爲

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} > 0,$$

由反函數定理 (Inverse Function Theorem) 得知: 在第一象限中可以將 x,y 寫成 u,v 的函數, 即存在 T 的逆映射 $T^{-1}:\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$。

雖然這份講義尚未提及重積分的理論, 但是各位應該回顧在微積分課程當中所學重積分的變數變換, 特別是面元

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left|\frac{x}{2y}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

的處理, 就是基於映射 T 可逆, 所以 (u,v) 可以當作是新的獨立變數, 然後又用到映射與逆映射的微分映射互爲反矩陣以及矩陣行列式有 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ 的性質之下才得到上述結果。

10.3 函數獨立與函數相依

AqEKi3zdgF0

在線性代數理論中, 我們會探討一組向量 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^m$ 是否線性相依或者是線性獨立的問題: 如果這組向量中有某個 $\mathbf{v}_k$ 以及 $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_{k+1}, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v}_k = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + c_m\mathbf{v}_m,$$

我們說 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^m$ 是線性相依的 (linearly dependent); 若這組向量中的任何一個向量 $\mathbf{v}_i$ 都無法用其餘向量的線性組合表示時, 則稱 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^m$ 是線性獨立的 (linearly independent)。

現在我們想要試著問一組函數 $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, m$ 的獨立或相關的問題, 其中每一個 $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 都是從定義域 D 對應到實數 $\mathbb{R}$ 的 n 變數函數。這時, 因爲 f_i 並非單純的向量而是很複雜的多變數函數, 所以我們不太能要求這些函數彼此能夠寫成「線性」組合的關係; 也就是說, 若要說明一組函數是否相關, 基本上要求「線性」這個條件是不太合理的, 於是我們用以下的方式定義函數相依:

定義 **1.** 考慮一組函數 $y_1, y_2, \ldots, y_m$, 其中 $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$, 若有一個函數 y_k 可以被其它函數 $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m$ 決定, 我們稱函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 在區域 D 上是 *函數相依的* (functionally dependent)。

addl2c2ZwKc

例 **2.** 考慮函數組 $y_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, i = 1, 2, 3,$ 其中

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 \\ y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \end{cases}$$

則 y_1, y_2, y_3 在 $\mathbb{R}^4$ 上是函數相依的, 這是因爲對所有 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ 都滿足 $y_2 = (y_1)^2 - 2y_3$。

各位可以看到在 *例* **2** 中, 函數組 y_1, y_2, y_3 滿足的 $y_2 = (y_1)^2 - 2y_3$ 是一個非線性關係 (non-linear relation)。而原先函數相依的定義其實寫得有點含糊, 現在想要將函數相依這個概念用更明確的數學語言描述。給定 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, 現將 $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, m$ 寫成 $(y_1, y_2, \ldots, y_m) \subset \mathbb{R}^m$, 這麼一來可以將函數組視爲在 $\mathbb{R}^m$ 當中的點所成的集合。現在將某個 y_k 抽出, 而剩下的寫成 $(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m)$, 則區域 D 中的點透過函數關係會對應到 $\mathbb{R}^{m-1}$ 當中的一個點集 R, 所以函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 在 D 上是函數相依表示存在一個函數 $\varphi : R \to \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{aligned} y_k &= \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m) \\ &= \varphi(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_{k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\qquad f_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \end{aligned}$$

也就是說, 函數相依可想成是集合 $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ 能不能看成是某個函數 $\varphi : R \to \mathbb{R}$ 的圖形, 只是這個函數 φ 的定義域 R 並非平坦的歐氏空間。在幾何上, 若每個函數 $f_i, i = 1, 2, \ldots, m$ 具有一些不錯的光滑性時, 我們會用流形 (manifold) 的方法描述這個集合 R。

另一方面, 以下也將給出函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 是函數獨立的定義。

D5Y8xhHce8

定義 3. 考慮一組函數 $y_1, y_2, \ldots, y_m$, 其中 $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$, 如果在區域 D 上以及在 D 中的任何一個子集合 D' 都不存在函數 φ 使得

$$y_k = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

則稱函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 在區域 D 上是 函數獨立的 (functionally independent)。

現在要問的是: 在什麼情況下我們可以確定一組函數 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 是函數相依或者是函數獨立? 爲回答這個問題, 首先引進雅可比矩陣的概念。

定義 4. 給定一組函數 $y_1, y_2, \ldots, y_m$, 其中 $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$, 假設這組函數在區域 D 中具有對一切變數的連續偏導函數, 我們稱矩陣

$$\left[\ \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\ \right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

爲函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 在區域 D 上的 雅可比矩陣 (Jacobi matrix)。

給了一組函數 $y_1, y_2, \ldots, y_m$, 定義了雅可比矩陣, 給定一點 $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$, 則雅可比矩陣在 P 點就是一個 $m \times n$ 的矩陣, 而且每一個元素都是實數, 這時我們就可以計算這個矩陣的秩 (rank)。關於一個矩陣秩的計算在線性代數理論中提供了很多種方法求得, 這裡我們採用子矩陣的行列式定義函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 的雅可比矩陣在區域 D 上的秩。

P_uNAM54VF4

定義 5. 給定一組函數 $y_1, y_2, \ldots, y_m$, 其中 $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$, 假設這組函數在區域 D 中具有對一切變數的連續偏導函數。若 $1 \le r \le \min(m, n)$, 從函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 任意挑出 r 個函數 $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_r}$, 再從變數 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 中任意挑出 r 個變數 $x_{j_1}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$, 然後計算這 r 個函數對於這 r 個變數的偏導函數所形成的雅可比子矩陣

$$\left[\ \frac{\partial y_{i_k}}{\partial x_{j_l}}\ \right]_{r\times r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_2}} & \cdots & \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_r}} \\ \frac{\partial y_{i_2}}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial y_{i_2}}{\partial x_{j_2}} & \cdots & \frac{\partial y_{i_r}}{\partial x_{j_r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial y_{i_2}}{\partial x_{j_2}} & \cdots & \frac{\partial y_{i_r}}{\partial x_{j_r}} \end{bmatrix}_{r\times r} 。$$

這些子矩陣當中, 若在區域 D 中的行列式不恆爲零之最高階數稱爲這個函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 在區域 D 上的 秩 (rank)。

現在將給出判斷函數組 $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, m$ 是函數獨立或是相關的定理。

bPDBUePGWy4

定理 6. 考慮一組函數 $y_1, y_2, \ldots, y_m$, 其中 $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$, 假設這組函數在區域 D 中具有對一切變數的連續偏導函數。若 $m \leq n$, 而且函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 的雅可比矩陣當中存在一個 m-階子矩陣的行列式在區域 D 中不爲零, 則函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 在 D 上是函數獨立的。

證明: 假設函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 在 D 上某個部份區域內 D' 是函數相依的; 也就是說, 存在函數 φ 使得

$$y_m = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$$

在 D' 中成立。注意到這裡是爲了方便起見, 設定最後一個函數 y_m 可用 $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ 之函數表示, 在其它的情況就重新編號即可。

現將 $y_m = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$ 兩邊對於 x_i 求偏導函數, 其中要進行偏微的 m 個變數之選取方式是根據定理條件對應到的 m-階子矩陣行列式非零之變數而定, 由此得到

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i},$$

同樣的, 這是是爲了方便起見, 省去過多的下標註記而寫, 在其它的情況就重新編號即可。於是

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}_{m\times m} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_m} \\ \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_m} \end{vmatrix}_{m\times m},$$

因爲該雅可比行列式的最後一列可以用前面 $m-1$ 列的倍數組合而成, 所以雅可比行列式爲零, 這與條件矛盾。故函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 在區域 D 上是函數獨立的。 □

s5j6pQindAk

例 7. 考慮區域 $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$ 上的兩個函數

$$\begin{cases} y_1 = (x_1)^3(x_2)^2x_3 \\ y_2 = x_1 - x_2, \end{cases}$$

則

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(x_1)^2(x_2)^2x_3 & 2(x_1)^3x_2x_3 & (x_1)^3(x_2)^2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

因爲

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2(x_1)^3x_2x_3 & (x_1)^3(x_2)^2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(x_1)^2x_2x_3(3x_2 + 2x_1) \neq 0,$$

所以函數組 y_1, y_2 的雅可比矩陣在區域 D 上的秩爲 2, 所以 y_1 與 y_2 在區域 D 上是函數獨立的。

最後我們再給出更一般的定理。

定理 8. 考慮一組函數 $y_1, y_2, \ldots, y_m$, 其中 $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m,$ 若函數組的雅可比矩陣在點 $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$ 的秩爲 $r \geq 1$, 此時不妨假設

6yw5sF9mKeU

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_1} & \frac{\partial y_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_r}{\partial x_r} \end{matrix}\right|_P \neq 0,$$

則存在 P 點的一個鄰域 $U \subset D$ 使得:

(A) $y_1, y_2, \ldots, y_r$ 是函數獨立的。

(B) 若 $m > r$, 則函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 是函數相依的。

證明:

(A) 同 定理 **6** 的討論即可完成。

(B) 這裡以 $(n, m, r) = (3, 2, 1)$ 爲例證明之, 至於一般的情形同理。

假設有兩個函數 $y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$ 與 $y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$, 其雅可比矩陣

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

在區域 D 上的秩是 1, 不妨假設 $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ 在 $P(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in D$ 非零。

考慮 $F(x_1, x_2, x_3, y_1) = y_1 - f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ 由隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 得知: 在 $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0)$ 的一個鄰域當中, x_1 可以表示成以 (x_2, x_3, y_1) 爲變數的函數, 即存在 φ 使得 $x_1 = \varphi(x_2, x_3, y_1)$。如此, 則有 $y_1 \equiv f_1(\varphi(x_2, x_3, y_1), x_2, x_3)$。在這個關係式之下, 得到 f_1 只與 y_1 有關, 與 x_2, x_3 無關, 故對此式兩邊對於變數 x_2, x_3 求導, 得到

exe3z7dBX3A

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_3}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}。$$

另一方面, 將 $x_1 = \varphi(x_2, x_3, y_1)$ 代入函數 f_2, 則有

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) = f_2(\varphi(x_2, x_3, y_1), x_2, x_3) \overset{記}{=} F_2(x_2, x_3, y_1)。$$

考慮 $F_2(x_2, x_3, y_1)$ 對於 x_2, x_3 的偏導數:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}} = \frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}\left|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{matrix}\right|$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}} = \frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}\left|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{matrix}\right|,$$

由於 y_1, y_2 的雅可比矩陣的秩是 1, 以及 $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ 在 P 點附近非零, 所以 $\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0$ 以及 $\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = 0$, 這說明函數 F_2 與 x_2, x_3 都無關, 只與 y_1 有關, 也就是說, $y_2 = F(y_1)$, 這樣就證明了函數組 y_1, y_2 在 P 的一個鄰域上是函數相依。

□

UeOYnsXYQHO

這一節的最後想要和各位說明的是: 函數獨立與函數相依的問題, 若要和線性代數的理論做一個更確實的類比, 那麼應該是要把這個概念與向量空間的對偶空間 (dual space) 對應。在單元 5.7 我們介紹過向量空間與對偶空間之間的關係, 這裡做一個簡要的複習。考慮向量空間 (vector space) V^n, 取 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 是一組基底 (basis), 現考慮集合 $(V^n)^*$, 它是將所有從向量空間 V^n 映至向量空間 $\mathbb{R}$ 之間的線性泛函 (linear functional) 形成的集合; 也就是說, 元素 $F \in (V^n)^*$ 滿足 $F(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$, 其中 $\mathbf{v} \in V^n$, 並且

$$\begin{cases} F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = F(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_2) & \text{對所有 } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V^n \\ F(c\,\mathbf{v}) = c\,F(\mathbf{v}) & \text{對所有 } \mathbf{v} \in V^n \text{ 以及 } c \in \mathbb{R}\text{。} \end{cases}$$

數學上可以驗證: $(V^n)^*$ 滿足向量空間的所有條件。這個空間稱爲 V^n 的 對偶空間 (dual space)。既然 $(V^n)^*$ 是向量空間, 我們想要找到 $(V^n)^*$ 的一組基底。其中一種找法如下: 定義 $\{\mathbf{f}_i : V^n \to \mathbb{R}\}_{i=1}^n$, 其中

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i = j \\ 0 & \text{如果 } i \neq j, \end{cases}$$

以下將驗證: $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ 是對偶空間 $(V^n)^*$ 的一組基底。因爲它是透過 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 而來, 所以 $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ 稱爲 對偶基底 (dual basis)。

有了向量空間與其對偶空間的概念, 現將它應用在多變數函數 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的微分 (differential), 函數在一點的微分是想要把函數在一點的線性增長量這個線性結構搭配線性代數的語言表示出來, 則得如下定義:

定義 **9.** 給定可微分函數 $y = f(x_1, x_2, \ldots, y_n)$, 函數 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在 $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ 處的 微分 (differential)

$$\mathrm{d}y|_P \overset{\text{記}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n\bigg|_P$$

指的是從向量空間 $T_P\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ 映至向量空間 $\mathbb{R}$ 的一個 線性泛函 (linear functional), 其中 $T_P\mathbb{R}^n$ 上的基底爲 $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_P\}_{i=1}^n$, 而 $\{\mathrm{d}x_i|_P\}_{i=1}^n$ 是 $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_P\}_{i=1}^n$ 的對偶基底。所以 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 指的是線性泛函 $\mathrm{d}y$ 在 P 點對於基底 $\{\mathrm{d}x_i|_P\}_{i=1}^n$ 線性組合表示時的係數。

所以當我們討論在函數組 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 在 P 點是函數相依或是函數獨立的問題時, 該理論是在說明: 觀察每一個函數 y_i 在 P 點的微分映射 $\mathrm{d}y_i$, 它在切空間的對偶空間中就形成了一組向量, 研究這 m 個向量是線性獨立或是線性相依, 由此可以推得函數組在一點附近的函數相依性。

nblziIjulGA

特別地, 在高中或是線性代數課當中曾經討論線性函數的相關問題, 像是

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ y_2 = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

所形成的係數矩陣, 都應該要從對偶空間的角度看待它才是正確的對應關係。