高等微積分(一) 課程學習單 第 5 章

系所與班級: ________ 學號: ________ 姓名: ________

5 單元介紹與學習目標

■ 對照影片 5.1 – 01 學習

□ 函數的導數 (derivative) 與微分 (differential) 之理論部份。

□ 均值定理 (Mean Value Theorem) 與羅必達法則 (L'Hôpital Rule)。

□ 幾個與導數理論有關的重要結果。

5.1 導數的定義

■ 對照影片 5.1 – 02 學習

定義 1. 給定函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 以及 $x_0 \in I$, 若極限

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在, 則稱函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處是 可微分的 (differentiable), 此時用 $f'(x_0)$ 代表這個極限式, 而此極限值稱為函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的 導數 (derivative)。

考慮集合 $I_1 = \{x \in I \,|\, f'(x) \text{ 存在}\}$, 則每個 $x \in I_1$ 都對應到函數 $f(x)$ 在 x 的導數 $f'(x)$, 於是這之間建立了一個函數關係, 我們把 $f'(x) : I_1 \to \mathbb{R}$ 稱為 $f(x)$ 的 導函數 (derivative)。

想一想.

(A) 兩個極限式之間的轉換關係為何?

(B) 為什麼要寫出兩種極限式? 什麼情況下會用哪一種極限式?

■ 對照影片 5.1 – 03 學習

關於函數 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的導數有以下幾種記號需要知道:

$$f'(x_0),\ y'(x_0),\ \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y\right|_{x=x_0},\ D_xf(x_0),\ f^{(1)}(x_0)\text{。}$$

函數 $f(x)$ 在一點的導數之幾何意義:

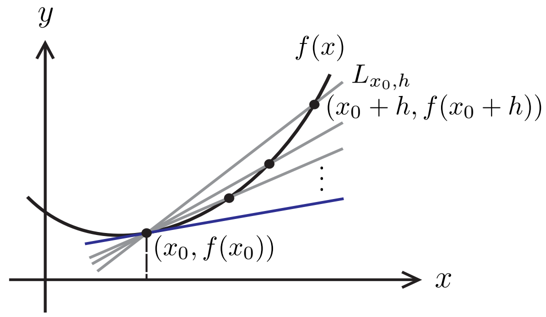

圖 1: 導數的幾何意義是割線斜率趨近於切線斜率。

(A) 觀察通過 $(x_0, f(x_0))$ 與 $(x_0+h, f(x_0+h))$ 的 割線 (secant line) 方程式:

(B) 觀察這些割線, 對 $h \to 0$, 得到函數圖形在 $(x_0, f(x_0))$ 的 切線 (tangent line) 方程式:

(C) 函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的導數 $f'(x_0)$ 之幾何意義: ______________________

(D) 關於 $f'(x_0)$ 與割線、切線的關係, 應強調的是: ______________________

■ 對照影片 5.1 – 04 學習

例 **2.** 試求函數 $f(x) = x^2$ 在 $x = 1$ 的導數 $f'(1)$。

解. 直接計算得到

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) \\ &= \lim_{x\to1}x + \lim_{x\to1}1 = 1+1 = 2。\end{aligned}$$

例 **3.** 正弦函數 $\sin x$ 是可微分的函數, 並且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$。

解.

例 **4.** 考慮函數 $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{若 } x \neq 0 \\ 0 & \text{若 } x = 0 \end{cases}$, 證明 $f'(0)$ 不存在。

解.

■ 對照影片 5.1 – 05 學習

因為導數 $f'(x_0)$ 的本質是極限, 而極限又分左極限與右極限, 所以引進函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的左導數 $f'_{-}(x_0)$ 與右導數 $f'_{+}(x_0)$ 如下:

$$\begin{aligned} f'_{-}(x_0) &= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ f'_{+}(x_0) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \end{aligned}$$

而導數 $f'(x_0)$ 存在等價於 $f'_{-}(x_0)$ 與 $f'_{+}(x_0)$ 存在且相等。

例 **5.** 討論 $f(x) = |x|$ 與 $g(x) = x|x|$ 在 $x = 0$ 的導數。

解.

5.2 導數的性質與求導法則

■ 對照影片 5.2 – 01 學習

這一節將綜覽微積分課程中曾經介紹過有關導數的定理, 將這些內容更深刻之處呈現出來。

定理 1. 函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 在 $x = x_0$ 處是可微分的, 則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續。

證明:

□

在這個證明中, 只確定了函數的連續性, 但是這個證明的過程中看不出函數值與導數之間的關係。以下再用極限精確定義的方式重新證明時, 將會看到函數值與導數之間的關聯性。

證明:

□

證明的最後一式是告知在 $x = x_0$ 附近的函數值與導數 $f'(x_0)$ 之間有一個明確的關係式, 在未來的一些分析中, 我們時常需要知道每個量之間較爲明確的關聯, 從每個量的關係中才有可能得到一些函數更好的性質。以此爲觀點之下, 極限精確定義 (ε-δ language) 更能突顯它的價值。

■ 對照影片 5.2 – 02, 03 學習

以下有關函數求導的四則運算在微積分課程中已介紹過, 這裡只是內容完整起見再證一次。

定理 2 (導數的四則運算)**.** 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 的導數存在, 而 $c \in \mathbb{R}$, 則

(A) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$。

(B) $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$。

(C) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$。

(D) $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, 公式成立必須建立在 $g(x_0) \neq 0$。

證明: 這裡只證除法的規則, 其餘的部份自行看講義的證明。

(D)

□

關於上述的計算, 只要把 x_0 換成變數 x, 就形成導函數的四則運算規則。

想一想. 爲什麼除法法則只要確定 $g(x_0) \neq 0$ 即可, 函數在 $g(x_0)$ 的附近如果有等於零的點, 那麼 $(\frac{f}{g})(x)$ 不就無法定義了嗎?

■ 對照影片 5.2 – 04, 05 學習

以下將證明合成函數的求導法則, 這個規則稱爲 鏈鎖律 (Chain Rule)。

定理 3 (鏈鎖律, Chain Rule)**.** 若 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 處導數存在, 而 $f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 的導數存在, 則合成函數 $y(x) \overset{\text{記}}{=} (f \circ g)(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 處導數存在, 並且有以下規則:

$$y'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \quad \text{或寫成} \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=g(x_0)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}。$$

想一想*.* 爲什麼下面這樣子證鏈鎖律不行?

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{g(x) \to g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)。 \end{aligned}$$

證明:

□

■ 對照影片 5.2 – 06, 07 學習

最後要建立函數的導數與反函數的導數之間的關係。

定理 4 (反函數的求導法則)**.** 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處導數存在, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 並且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的一個鄰域內連續且嚴格單調(嚴格遞增或嚴格遞減), 則反函數 $x = \varphi(y)$ 在 $y = y_0 = f(x_0)$ 的地方是可微分的, 並且 $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$。

證明: 因爲 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的一個鄰域內連續且嚴格單調, 所以反函數連續且嚴格單調(詳見第 4 章單元 4.3 **定理 11**), 因此, 當 $y \to y_0$ 時 $\varphi(y) \to \varphi(y_0)$, 即 $x \to x_0$, 而函數 $\varphi(y)$ 的單調性告知: 對於 $y \neq y_0$ 則 $\varphi(y) \neq \varphi(y_0)$, 得到 $x \neq x_0$, 於是

$$\varphi'(y_0) =$$

□

想一想.

(A) 回想一下函數與反函數的圖形在幾何上的意義與對稱性。

(B) 反函數的求導法則要注意公式中要代入的點兩個地方不一樣。

(C) 口訣? 以鏈鎖律的觀點證明。

(D) 一種錯誤的推演而得的結果(亂入)。

■ 對照影片 5.2 – 08 學習

例 **5.** 考慮函數 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & 若\ x\neq 0 \\ 0 & 若\ x=0, \end{cases}$

(A) 若 $x\neq 0$, 求 $f'(x)$。 (B) 求導數 $f'(0)$。 (C) 求極限 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$。

解.

■ 對照影片 5.2 – 09, 10 學習

想一想. 從這個例子想清楚以下三個問題:

(A) 什麼時候可以利用求導法則計算導數與導函數, 什麼時候必須按照定義討論?

(B) 以這個例子而言, 我們可以說:「由 (A) 知: $f'(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, 因爲這個函數在 $x=0$ 處無意義, 所以 $f'(0)$ 不存在。」嗎?

(C) 關於 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 的幾何意義是什麼? 它和 $f'(0)$ 差別在哪裡? 而這個例子說明了什麼事情?

■ 對照影片 5.2 – 11, 12 學習

定義 6. 依此概念繼續計算, 我們可以定義函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的 n-階導數 (n-th derivative of $f(x)$ at $x = x_0$):

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h},$$

若記 $I_n = \{x \in I_{n-1} \,|\, f^{(n)}(x) \text{ 存在}\}$, 則得 $f^{(n)}(x) : I_n \to \mathbb{R}$ 爲 n-階導函數 (n-th derivative of $f(x)$)。

高階導數的記號會有以下幾種表示法:

$$f^{(n)}(x_0),\ y^{(n)}(x_0),\ \left.\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}y\right|_{x=x_0},\ D_x^n f(x_0)\text{。}$$

最後引進兩個集合爲了以後方便說明一些函數的性質:

$$C^n([a,b]) = \{f(x) |\ f^{(n)}(x) : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ 爲連續函數}\}$$
$$C^\infty([a,b]) = \{f(x) |\ \text{對所有 } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, f^{(n)}(x) : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ 爲連續函數}\} = \cap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} C^n([a,b])$$
$$C^\omega([a,b]) = \{f(x) |\ \text{每一點都存在一個鄰域使得函數與其泰勒級數一致}\}$$

想一想.

(A) 初等函數的可微性。

(B) 集合 $C^n(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}), C^\omega(\mathbb{R})$ 之間的包含關係。

5.3 均值定理

■ 對照影片 5.3 – 01 學習

本節將逐一介紹並證明費馬定理 (Fermat's Theorem)、洛爾定理 (Rolle's Theorem)、均值定理 (Mean Value Theorem, Lagrange's Theorem)、柯西均值定理 (Cauchy's Mean Value Theorem), 並解釋其幾何意義。這些定理的徹底認識可幫助我們進一步證明羅必達法則 (L'Hôpital's Rule)。

定義 1.

(A) 考慮函數 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 以及 $x_0\in(a,b)$, 若存在 $\delta>0$ 使得對所有 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 都有 $f(x)\le f(x_0)$, 則稱 $f(x_0)$ 是 *局部極大值* (locally maximum value)。

(B) 考慮函數 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 以及 $x_0\in(a,b)$, 若存在 $\delta>0$ 使得對所有 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 都有 $f(x)\ge f(x_0)$, 則稱 $f(x_0)$ 是 *局部極小值* (locally minimum value)。

想一想.

(A) 上述定義中, 特地將函數的定義域限定在開區間 (a,b) 而非閉區間 $[a,b]$, 這是爲了讓後面要介紹的費馬定理有一個簡單的樣貌呈現; 換言之, 現在所討論局部極值的地方, 先限定在 x_0 的左、右兩側都能夠取出一個範圍 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 並且比較函數值。

(B) 函數的局部極小值不見得比局部極大值還要小, 畫圖示意其概念。

■ 對照影片 5.3 – 02 學習

以下要介紹的費馬定理是告知函數產生局部極值的必要條件。

定理 2 (費馬定理, Fermat's Theorem)**.** 若函數 $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ 在 $x=x_0$ 處可微分, 而且在 $x=x_0$ 處產生局部極值, 則 $f'(x_0)=0$。

證明: 這裡只討論局部極大值的情況, 局部極小值的情形同理。

□

想一想. 注意費馬定理必須假設產生極值的地方導數存在, 否則會有反例: ________________。

■ 對照影片 5.3 – 03 學習

定理 3 (洛爾定理, Rolle's Theorem)**.** 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微分, 並且 $f(a)=f(b)$, 則存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

證明:

(A) 若對所有 $x \in (a,b)$ 都有 $f(x)=f(a)=f(b)$, 也就是說, $f(x)$ 為常數函數, 那麼 $f'(x) \equiv 0$, 得到在 (a,b) 內的任何一點都可以作為定理結論的候選人。

(B,C)

□

想一想.

(A) 洛爾定理的幾何意義。

(B) 定理必須要求在區間內的每一點都要可微分。

(C) 滿足定理結果的點不唯一。

■ 對照影片 5.3 – 04 學習

定理 4 (均值定理, Mean Value Theorem, Lagrange's Theorem)**.** 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微分, 則存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)。$$

想一想. 以圖形說明均值定理的幾何意義, 並想一想是否有物理的解釋還有數學上的應用。

證明:

□

■ 對照影片 5.3 – 05, 06 學習

定理 5 (柯西均值定理, Cauchy Mean Value Theorem)**.** 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微分, 並且 $g'(x) \neq 0$, 則存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}。$$

想一想*.* 以下證明有誤, 請指出錯誤的原因。

證明: 分別對於 $f(x)$ 與 $g(x)$ 使用均值定理, 得到存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$ 以及 $g(b)-g(a) = g'(\xi)(b-a)$, 將兩式相除即得證。 □

證明:

□

想一想*.* 以圖形說明均值定理的幾何意義。

5.4 羅必達法則

■ 對照影片 5.4 – 01 學習

這一節的主要目的是要透過前一節所得到的柯西均值定理證明 *羅必達法則* (L'Hôpital's Rule)。首先我們要將能夠使用羅必達法則的極限類型說明清楚, 於是引出以下不定型的概念:

定義 **1** (不定型, indeterminate form)**.** 給定兩函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 以及一點 x_0, 欲探討極限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$,

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, 則稱 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 是 *零分之零的不定型* (indeterminate form of type $\frac{0}{0}$)。

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (或 $-\infty$) 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ (或 $-\infty$), 則稱 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 是 *無限大分之無限大的不定型* (indeterminate form of type $\frac{\infty}{\infty}$)。

羅必達法則提供了一種用函數的微分處理極限的方法。

定理 **2** (羅必達法則, L'Hôpital's Rule)**.** 假設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 的一個鄰域 $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)-\{x_0\}$ 皆可微分, 而且 $g'(x)\neq 0$。如果極限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 為不定型, 而且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 則

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

證明:

(1) 首先探討零分之零的不定型。

■ 對照影片 5.4 – 02 學習

(2) 再來要證明無限大分之無限大的不定型的羅必達法則。

□

■ 對照影片 5.4 – 03 學習

羅必達法則可適用於 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 的不定型, 這裡列出定理敘述:

定理 3 (羅必達法則, L'Hôpital's Rule)**.** 假設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x\in[X,\infty)$ 處皆可微分, 其中 $X\in\mathbb{R}$, 而且 $g'(x)\neq 0$。如果極限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 爲不定型, 而且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

證明: 考慮變數變換 $t=\frac{1}{x}$, 則當 $x\to\infty$ 時 $t\to 0^+$, 於是

上式不論是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定型皆成立。 □

■ 對照影片 5.4 – 04 學習

關於羅必達法則有許多事情值得進一步了解:

(A) 使用羅必達法則時請<u>養成好習慣</u>: 在利用羅必達法則的那個等號上面註記 $(\frac{0}{0},L')$ 或是 $(\frac{\infty}{\infty},L')$ 的字樣。

在等號上註記 $(\frac{0}{0},L')$ 或是 $(\frac{\infty}{\infty},L')$ 並不是敷衍交差了事, 而是有意義的。對個人而言, 其實是讓自己在計算極限時先停下腳步, 確定自己要處理的極限是不定型, 並且滿足羅必達法則的所有條件下才可以使用。另一方面, 寫下記號 $(\frac{0}{0},L')$ 或是 $(\frac{\infty}{\infty},L')$ 是在告知別人你在這個計算中用了羅必達法則。因爲利用羅必達法則的前後算式基本上是完全變形, 一般人在閱讀或是跟隨 (follow) 算式的時候基本上只能接受代數上的轉換, 像是通分、化簡、有理化等操作, 若不註記這類符號, 很容易產生前後算式突兀的情況。使用羅必達法則的那個等號前一個式子與後一個式子是兩個完全不同的函數, 只是取極限之後相同。

在等號上註記清楚等號成立的理由是對自己所寫的東西一種負責任的態度。

(B) <u>不可以</u>對 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 這個極限使用羅必達法則然後求得極限值是 1。

(C) 羅必達法則可適用在有限步驟中, 每一次都滿足羅必達條件的情況; 也就是說, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\ldots$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$ 都是不定型, 而且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=L$, 則

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=L。$$

■ 對照影片 5.4 – 04, 05 學習

(D) 羅必達法則的敘述中, 在 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ 的情況下是可以推得 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$。

(D1) 若是零分之零的不定型, 證明過程完全一樣。

(D2) 若是無限大分之無限大的不定型, 以下只說明右極限的情況, 而左極限的情況同理。對任意 $x, x_1\in\mathbb{R}$, 我們從恆等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}+\frac{f(x_1)}{g(x)}$$

繼續分析, 給定任意 $M>0$, 因爲 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, 所以存在 $\delta_1>0$ 使得對所有滿足 $0<x-x_0<\delta_1<\delta_0$ 的點, 都有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|\geq 2(M+1)。$$

記 $x_1=x_0+\delta_1$, 對所有 $x_0<x<x_1$, 因爲 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在區間 $[x,x_1]$ 上連續, 在 (x,x_1) 上可微分, 並且 $g'(x)\neq 0$, 故由柯西均值定理 (Cauchy Mean Value Theorem) 得知: 存在 $\xi\in(x,x_1)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|>2(M+1)。$$

因爲 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, 所以存在 $\delta_2>0$ 使得對所有滿足 $0<x-x_0<\delta_2$ 的點都有

$$\left|1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|>\frac{1}{2}\quad 且\quad\left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right|<1,$$

所以給定 $M>0$, 取 $\delta=\delta_2$, 則對所有滿足 $0<x-x_0<\delta$ 的點, 都有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|&=\left|\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}+\frac{f(x_1)}{g(x)}\right|\\&\geq\left|\left|1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\right|-\left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right|\right|\\&>\frac{1}{2}\cdot 2(M+1)-1=M+1-1=M,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$。

(E) 和 (D) 的情況相比較, 如果羅必達法則的前提都成立, 而 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 極限不存在(並非 $\to\infty$ 或 $-\infty$ 類型的極限不存在), 這種情況無法推得原極限不存在, 羅必達法則不適用。(D) 和 (E) 兩者之間差別在哪裡?

■ 對照影片 5.4 – 06, 07, 08 學習

(F) 羅必達法則總共有七種類型, 除了前述所說的 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 之外, 還有 $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$, 後面五種類型的極限處理, 是先透過代數的操作(通分、整理、化簡、取對數或取指數等方式) 將問題轉換成前面兩種類型之後再使用羅必達法則。

(F1) 以下舉例說明 $0\cdot\infty$ 的不定型如何處理極限:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

(F2) 以下舉例說明 $\infty-\infty$ 的不定型如何處理極限:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$$

(F3) 以下舉例說明 0^0 的不定型如何處理極限: 考慮 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$, 由 (F1) 知: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, 因爲

(F4) 以下舉例說明 ∞^0 的不定型如何處理極限: 考慮 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$,

(F5) 以下舉例說明 1^∞ 的不定型如何處理極限: 考慮 $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos(\sqrt{x}))^{\frac{1}{x}}$,

(G) 使用羅必達法則時<u>應避免鬼打牆</u>。當你發現使用羅必達法則之後讓整個問題變得更複雜時, 代表你走錯方向了, 必須反向重新分配再操作。例如

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \overset{(\frac{0}{0},L')}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -x(\ln x)^2,$$

這種情況就是所說的鬼打牆。解決方法: ________________________________

(H) 幾個常用的極限以及它的變形應熟知其結果:

(H1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} =$ ____ $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} =$ ____ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} =$ ____ $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} =$ ____

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$ ____ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$ ____ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} =$ ____

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$ ____ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$ ____ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} =$ ____

■ 對照影片 5.4 – 09, 10, 11 學習

(I) 羅必達法則並非萬能, 有很多無法用羅必達法則處理的極限問題, 也有很多就算是不定型, 但是用了羅必達法則之後仍然無法下定論的極限問題, 這時應另尋它法。其它求極限的方法像是夾擠定理 (Squeeze Theorem) 甚至用極限的精確定義確實討論都很好用。未來會討論泰勒級數的理論, 羅必達法則有一大類型其實是泰勒級數理論當中的一個特殊情況而已, 到時候從泰勒級數的眼光下看問題會更清楚。

- 極限不是不定型, 不能使用羅必達法則。例如: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$。
- 極限 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 是不定型, 而 $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在(不是趨於無限的不存在), 則羅必達法則無法得到結果。例如 $f(x)=x\sin(\frac{1}{x}), g(x)=\ln(1+x)$, 則 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 無法用羅必達法則得到結果。
- 極限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 不可以使用羅必達法則。
- 夾擠定理、極限精確定義、極限存在的等價敘述、泰勒級數理論都是很好處理極限問題的方法。

(J) 不要盲目地使用羅必達法則, 先觀察、整理, 謀定而後動, 而且羅必達法則用在不定型的地方即可, 不要被其它的項干擾。

(J1) 比方說考慮極限 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$,

(J2) 羅必達法則可以和極限乘法法則一起使用, 一些和不定型無關的量全部抽出來, 使用羅必達法則的時候不要對它求導:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}=$$

5.5 幾個導數理論的重要結果

5.5.1 對數函數的等級

■ 對照影片 5.5 – 01 學習

例. 證明: 對任何 $p > 0$, $c \overset{\text{(A)}}{\ll} \ln x \overset{\text{(B)}}{\ll} x^p$ 當 $x \to \infty$。

證明:

□

5.5.2 不定積分的起源

■ 對照影片 5.5 – 02 學習

這裡先介紹兩個看似簡單的推論, 卻關係到積分理論的成形。

定理 1. 若函數 $f(x)$ 在 (a, b) 上滿足 $f'(x) = 0$, 則 $f(x) = c$, 其中 $c \in \mathbb{R}$;也就是說, $f(x)$ 是一個常數函數。

證明:

□

推論 2. 若有兩個可微分函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在區間 (a, b) 上滿足 $f'(x) = g'(x)$, 則 $f(x) = g(x) + c$, 其中 $c \in \mathbb{R}$。

證明:

□

給定函數 $f(x)$, 這一章的其中一個目的是在探討導函數 $f'(x)$ 及其理論; 反之, 我們想問: 給定一個函數 $f(x)$, 是否存在一個可微分函數 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$? 如果存在這樣的 $F(x)$, 我們稱之爲 $f(x)$ 的 反導函數 (anti-derivative)。而 推論 **2** 告知: 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的反導函數, 那麼任何 $F(x)+c$, 其中 $c\in\mathbb{R}$, 都是 $f(x)$ 的反導函數, 所以只要有辦法找到某個關於 $f(x)$ 的反導函數, 就可以立刻得到一族反導函數 (a family of anti-derivative functions)。

註. 何謂 不定積分 (indefinite integral) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$? 比方說 $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+C$ 是什麼意思?

這裡應注意的是: 一族反導函數會是以定義域上的一個連通部份 (connected component) 作爲整體。比方說你會在所有的書籍與文獻中看到 $\frac{1}{x}$ 的反導函數是 $\ln|x|+C$, 實際上這個記號應理解成:

$$\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C=\begin{cases}\ln|x|+C_1 & \text{若 } x>0\\ \ln|x|+C_2 & \text{若 } x<0,\end{cases}$$

其中 $C_1,C_2\in\mathbb{R}$;也就是說, 在 $x>0$ 的部份, 會有一族關於 $\frac{1}{x}$ 的反導函數, 在 $x<0$ 的部份, 會有另一組關於 $\frac{1}{x}$ 的反導函數, 它們是彼此獨立的兩族函數, 選用不同的常數作爲參數。

這兩個定理還可以幫助我們證明一些恆等式。

■ 對照影片 5.5 – 03 學習

例 **3.** 試證 $2\tan^{-1}(x)+\sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})=\pi, x\in[1,\infty)$。

解.

5.5.3 導函數不連續點的限制

■ 對照影片 5.5 – 04, 05 學習

若一個函數 $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ 在每一點 $x_0\in(a,b)$ 的導數存在, 那麼對於 $x_0\in(a,b), x_0\mapsto f'(x_0)$ 就會形成函數關係, 我們會用 $f'(x)$ 表示這個函數關係, 稱爲 $f(x)$ 的 導函數 (derivative)。另一方面, 對於一個函數, 我們曾經對於函數的連續性做討論, 特別是函數的不連續點進行分類。

現在將焦點放在導函數 $f'(x)$, 我們要觀察的是: 對於一個定義在 (a,b) 上的可微分函數 $f(x)$, 它的導函數 $f'(x)$ 的不連續點有一些限制。

定理 4. 若函數 $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ 的導函數 $f'(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ 處處存在, 則導函數的不連續點類型不可能是跳躍的不連續點。

證明: 假設導函數 $f'(x)$ 在 $x=x_0, x_0\in(a,b)$ 是一個跳躍的不連續點 (jump discontinuity); 也就是說, 導數 $f'(x_0)$ 存在, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 皆存在, 但是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$。
由均值定理 (Mean Value Theorem) 知: 存在 $\xi_h\in(x_0,x_0+h)$ 使得 $f'(\xi_h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, 故

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim_{h\to 0^+} f'(\xi_h)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_+(x_0);$$

此外, 存在 $\bar{\xi}_k\in(x_0+k,x_0)$ 使得 $f'(\bar{\xi}_k)=\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}$, 所以

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x)=\lim_{k\to 0^-} f'(\bar{\xi}_k)=\lim_{k\to 0^-}\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}=f'_-(x_0)。$$

因爲 $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ 矛盾。所以導函數的不連續點不可能是跳躍的不連續點。 □

與上述討論相關而且也值得類比的是函數

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & 若\ x\neq 0\\ 0 & 若\ x=0,\end{cases}$$

這裡將結果條列出來:

(A) 若 $x\neq 0$, 則 $f'(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$。

(B) 導數 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$。

(C) 極限 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 不存在。

想一想. 試著用上面的例子與定理的證明相比較。