5

導數與微分

回顧之前章節的討論, 我們在第 1 章介紹了實數完備性, 然後在第 3 章特別從數列、拓撲等觀點重現實數完備性之不同面向, 這些鋪陳除了自成系統地完成每個敘述都與實數完備性等價之外, 這些敘述在第 4 章證明有界閉區間上的連續函數之最大最小值定理、中間值定理與均勻連續定理時也適時地派上用場。然而, 這些內容都還是停留在極限與連續理論的範疇; 也就是說, 我們從這一章開始才要正式進入微分學的理論。

xAyWdw3FhFc

導數與微分是比連續還要再進階的概念, 在單元 5.1 將給出導數的定義, 並說明它在等級、物理、幾何圖形的意義。單元 5.2 則是逐一證明導數的性質與求導法則, 這部份應思考的是導數定義與求導公式在使用上的限制。單元 5.3 要介紹均值定理, 在這份講義的編排, 認識均值定理的用意是想要在下一節確實呈現羅必達法則的證明。而在均值定理的討論中, 除了數學符號之邏輯推演外, 都會試圖再用幾何圖形的方式重新詮釋其概念。

單元 5.4 的重點則是詳細證明羅必達法則。對於微積分的初學者來說或許非常喜歡使用羅必達法則, 然而卻不清楚羅必達法則有許多使用上的限制, 所以時常會有誤用或者是在使用的時候反而會把一個簡單的問題變得很複雜的情況, 而這個單元的最後我們會仔細討論羅必達法則在使用上必須注意的事項。

至於單元 5.5 則是介紹幾個導數理論的重要結果, 首先我們會把對數函數的等級與其它類型的等級之關係給予證明, 再來會介紹反導函數的起源, 也就是微分和積分之間的最初步聯繫; 此外, 導函數的存在會限制導函數的一些結構, 這個部份算是數學分析中更進階的一個主題。最後, 我們重現函數的遞增遞減與凹口與導函數的關係, 甚至凸函數也是一套自成系統的函數類型, 凸函數與函數的求導之間在某些情況下互爲等價也形成一個漂亮的結果。

單元 5.6 將介紹微分的觀念。其實微分與求導是兩個不同的概念, 但多數人經常把這兩件事混爲一談, 兩個變量之間建立的函數關係可能非常複雜, 而函數微分則是想要強調兩個變量在要研究的地方之線性增長的關係, 所以這裡會利用線性代數當中向量空間與其對偶空間的關係解釋這個現象。而這一章最後的附錄則是補充證明所有初等函數的求導結果。

這裡注意到的是: 爲了講義內容的完整, 微積分課程中所學過與函數求導有關的公式在這份講義中仍有詳細證明, 但是它並非這門課的主軸, 各位此時應把心思放在數學理論層面。有關求導計算上的技術部份則是在微積分課程的學習階段就應確實掌握, 若對微積分的操作不熟悉者, 可透過以下網址的資源學習並補足: http://www.math.ncue.edu.tw/~kwlee/107CalculusStewart8E.html。

5.1 導數的定義

2fEqtPV6CLM

回顧我們對於連續函數的認識, 若一個函數 $f: I \to \mathbb{R}$ 在一點 $x_0 \in I$ 連續, 除了 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與 $f(x_0)$ 都必須有意義之外, 連續這件事還必須要求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$。

當我們把極限式改寫, 得到 $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, 然後再從等級的思維看待這個極限, 它是在說明以 $x - x_0$ 爲無窮小量爲基礎, 則 $f(x) - f(x_0)$ 也是一個無窮小量。在單元 2.5 我們認識到無窮小量也有等級的區間, 於是現在要繼續研究這個無窮小量, 比方說以下導數的定義可以理解成在問 $f(x) - f(x_0)$ 相較於 $x - x_0$ 來說是哪一種類型的無窮小量:

定義 **1.** 給定函數 $f: I \to \mathbb{R}$ 以及 $x_0 \in I$,

(A) 若極限

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

存在, 則稱函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處是 *可微分的* (differentiable), 此時用 $f'(x_0)$ 代表這個極限式; 而此極限值稱爲函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的 *導數* (derivative)。

(B) 考慮集合 $I_1 = \{x \in I \,|\, f'(x) \text{ 存在}\}$, 則每個 $x \in I_1$ 都對應到函數 $f(x)$ 在 x 的導數 $f'(x)$, 於是這之間建立了一個函數關係, 我們把 $f'(x): I_1 \to \mathbb{R}$ 稱爲 $f(x)$ 的 *導函數* (derivative)。

這裡先用無窮小量的觀點繼續解釋導數, 若 $f'(x_0) = 0$, 則可說 $f(x) - f(x_0)$ 對於 $x - x_0$ 來說是高階的無窮小量; 若 $f'(x_0) \neq 0$, 則可說 $f(x) - f(x_0)$ 對於 $x - x_0$ 來說是等量的無窮小量; 若 $f'(x_0) = \infty$ 或 $-\infty$, 則可說 $f(x) - f(x_0)$ 對於 $x - x_0$ 來說是低階的無窮小量; 如果 $f'(x_0)$ 不存在, 此時不使用無窮小量的觀點去解釋它。

在導數的定義中寫了兩種極限表示法, 要知道這兩個極限之間只是經過一個 *變數變換* (change of variables) 而已, 也就是說; 令 $h = x - x_0$, 則 $x = x_0 + h$, 而 $x \to x_0$ 等價於 $h \to 0$。至於爲什麼有時候會用第一種表達式研究導數, 有時候又會改用第二種寫法處理問題? 這是因爲第一種極限表達式中, x 是用做處理極限時的變數。而當我們要處理導函數的問題時, 因爲 x 這個符號要用來表示導函數 $f'(x)$ 的自變量, 如果這時又要把極限式寫出來的話, 極限的變數勢必要修改, 所以第二種極限的寫法就避免了變數衝突的疑慮。簡單說來, 在處理導數問題時, 如果只是要研究特定一點的導數, 那麼第一種極限寫法會比較淸楚; 如果要問函數在任何一點的導數, 通常會用第二種極限式處理就可以一併討論。

Ixwml8xLblc

在建立微積分初期, 關於導數的研究有物理上的考量, 若是要觀察一個質點的運行軌跡, 通常會把質點位置對於時間寫出一個函數的關係式 $s(t)$, 若是考慮質點從時刻 t_0 到 t 之間位置對於時間的變化, 則物理上則是定義了平均速度 (average velocity) $v(t;t_0) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ 的概念。這裡稍微注意的一件事情是: 我們使用記號 $v(t;t_0)$ 以強調現在要討論的情境是希望 t_0 是固定的時刻, 然後 t 是變數。接著, 針對這個平均速度函數 $v(t;t_0)$ 再觀察 t 趨近於 t_0 的現象, 在數學上則是使用 $\lim\limits_{t\to t_0}$ 這個極限操作, 如此得到質點在 $t = t_0$ 時刻的 *瞬時速度* (instantaneous velocity), 而以導數的記號下, 我們會將它記成 $s'(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} v(t;t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$。瞬時速度其實在生活中很常見, 各位在騎車或開車時儀表板所顯示的數值, 就是在描述當下車子的瞬時速度的大小。

另一方面, 在數學上定義函數的導數其用意之一是想要了解函數圖形的切線, 以下將說明函數在一點的導數之幾何意義:

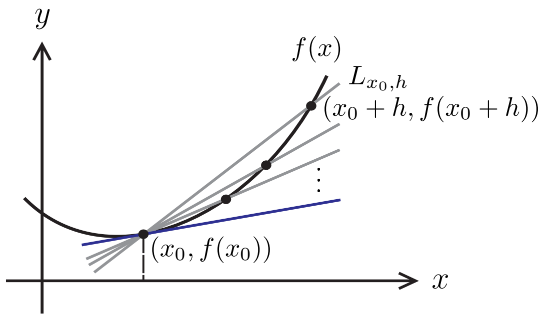

圖 5.1: 導數的幾何意義是割線斜率趨近於切線斜率。

如圖 5.1 所示, 給定函數 $f(x)$, 在 xy-坐標平面上畫出其函數圖形, 選定一點 $(x_0, f(x_0))$ 後, 我們先說明在尚未取極限之前的量 $m_{x_0,h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, 它表示通過 $(x_0, f(x_0))$ 與 $(x_0+h, f(x_0+h))$ 兩點之間的 *割線* (secant line) $L_{x_0,h}$ 斜率, 於是 $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} m_{x_0,h}$ 表示函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的導數 $f'(x_0)$ 是在形容這些割線斜率對於 $h \to 0$ 的極限值。

因爲割線 $L_{x_0,h}$ 方程式爲 $y = m_{x_0,h}(x-x_0)+f(x_0)$, 這些直線方程式會隨 h 而改變的量只有斜率 $m_{x_0,h}$ 的部份, 若 $f'(x_0)$ 存在, 表示當 $h \to 0$ 時這組直線方程式會趨近於 $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, 這個方程式表示通過 $(x_0, f(x_0))$ 且具有斜率 $f'(x_0)$ 的直線, 稱爲函數 $f(x)$ 的圖形在 $(x_0, f(x_0))$ 的 *切線* (tangent line)。

這裡應特別強調的是: 用割線逼近切線的過程中, 所有割線都通過 $(x_0, f(x_0))$ 這個點。

關於函數 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的導數有以下幾種記號需要知道:

$$f'(x_0),\ y'(x_0),\ \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y\right|_{x=x_0},\ D_xf(x_0),\ f^{(1)}(x_0)。$$

因爲我們時常寫 $y = y(x) = f(x)$, 所以 f 與 y 可做替換; 而第三、第四個符號的由來是基於導數的定義是在觀察應變量之改變與自變量之改變的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $\Delta x \to 0$ 之後的結果演變而成; 第五、第六個符號則是要強調計算導數是將函數 $f(x)$ 對於變數 x 進行 *求導* (take derivative) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的操作。至於 $D_xf(x_0)$ 這個寫法是由於未來要討論多變數微積分時, 因爲變數不只一個, 而函數需要觀察對不同變數下函數值的變化, 那麼就無法用一個撇 $'$ 就能說清楚所選取的變數, 於是改用下標加註變數的方式描述之。而最後一個是與高階導數相關, 討論高階導數的時候, 不能總是一直用撇的方式註記它, 所以改用數字告知求導的次數; 而加上小括號也有其用意, 因爲 $f^2(x)$ 通常表示 $(f(x))^2$, 所以在求導的次數兩旁加上括號避免混淆。這裡應提醒的是: 寫成 $f^{-1}(x)$ 是專指函數 $f(x)$ 的 *反函數* (inverse function)。

例 **2.** 試求函數 $f(x) = x^2$ 在 $x = 1$ 的導數 $f'(1)$。

0eYK4338pQw

解**.** 直接計算得到

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) \\ &= \lim_{x\to 1}x + \lim_{x\to 1}1 = 1+1 = 2。\end{aligned}$$

例 **3.** 正弦函數 $\sin x$ 是可微分的函數, 並且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$。

解. 令 $f(x) = \sin x$, 直接計算得到

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos(x)\cdot 1 = \cos x。
\end{aligned}$$

例 **4.** 考慮函數 $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & 若\ x \neq 0 \\ 0 & 若\ x = 0 \end{cases}$, 證明 $f'(0)$ 不存在。

解. 根據定義得到

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

極限不存在 (第 4 章單元 4.2 的 例 **14** 有對於 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 不存在一事詳細地討論)。

M3Zf7NhnDqo

因爲導數 $f'(x_0)$ 的本質是極限, 而極限又分左極限與右極限, 所以引進函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的左導數 $f'_-(x_0)$ 與右導數 $f'_+(x_0)$ 如下:

$$\begin{aligned}
f'_-(x_0) &= \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
f'_+(x_0) &= \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},
\end{aligned}$$

而導數 $f'(x_0)$ 存在等價於 $f'_-(x_0)$ 與 $f'_+(x_0)$ 存在且相等。

和第 4 章討論極限與連續的想法一樣, 若要研究函數 $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ 在端點 $x = a$ 或 $x = b$ 的導數時, 這時只能討論單側的導數 $f'_+(a)$ 與 $f'_-(b)$; 有時候函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 附近表達式不同時, 用左導數與右導數分別了解有其便利性。

例 **5.** 討論 $f(x) = |x|$ 與 $g(x) = x|x|$ 在 $x = 0$ 的導數。

解.

(A) 因爲

$$\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+}1 = 1 \\
f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-}-1 = -1,
\end{aligned}$$

所以 $f'(0)$ 不存在。

(B) 因爲

$$\begin{aligned}
g'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+}x = 0 \\
g'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-}-x = 0,
\end{aligned}$$

所以 $g'(0) = 0$。

5.2 導數的性質與求導法則

這一節將綜覽微積分課程中曾經介紹過有關導數的定理, 並將這些內容更深刻之處呈現出來。

fnwNNSHmH60

定理 1. 函數 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 $x = x_0$ 處是可微分的, 則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續。

證明: 對於 $x \neq x_0$, 有

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

則

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) + f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \\ &= 0 + f(x_0) = f(x_0),\end{aligned}$$

因此函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續。 □

在這個證明中, 只確定了函數的連續性, 但是這個證明的過程中看不出函數值與導數之間的關係。以下再用極限精確定義的方式重新證明時, 將會看到函數值與導數之間的關聯性。

證明: 因爲導數 $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 對於 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta_1 > 0$ 使得所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 的點, 都有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < 1,$$

於是

$$\begin{aligned}\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| &= \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) + f'(x_0) \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| + \left| f'(x_0) \right| \\ &< 1 + \left| f'(x_0) \right|,\end{aligned}$$

得到對所有 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 都有 $|f(x) - f(x_0)| < (1 + |f'(x_0)|) |x - x_0|$。所以給定任何 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min(\delta_1, \varepsilon) > 0$, 則對所有滿足 $|x - x_0| < \delta$ 的點, 都有

$$|f(x) - f(x_0)| < \big(1 + \left| f'(x_0) \right|\big) |x - x_0| < \big(1 + \left| f'(x_0) \right|\big) \varepsilon,$$

因此函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續。 □

證明的最後一式是告知在 $x = x_0$ 附近的函數值與導數 $f'(x_0)$ 之間有一個明確的關係式, 在未來的一些分析中, 我們時常需要知道每個量之間較爲明確的關聯, 從每個量的關係中才有可能得到一些函數更好的性質。以此爲觀點之下, 極限精確定義 (ε-δ language) 更能突顯它的價值。

gFUaEzwVVqM

以下有關函數求導的四則運算在微積分課程中已介紹過, 這裡只是內容完整起見再證一次。

定理 2 (導數的四則運算). 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 的導數存在, 而 $c\in\mathbb{R}$, 則

(A) $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$。

(B) $(c\cdot f)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$。

(C) $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$。

(D) $(\frac{f}{g})'(x_0)=\frac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, 其中公式成立必須要求 $g(x_0)\neq 0$。

證明:

(A)
$$\begin{aligned}(f\pm g)'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{(f\pm g)(x_0+h)-(f\pm g)(x_0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\pm\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f'(x_0)\pm g'(x_0)。\end{aligned}$$

(B)
$$\begin{aligned}(c\cdot f)'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{(c\cdot f)(x_0+h)-(c\cdot f)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c\cdot f(x_0+h)-c\cdot f(x_0)}{h}\\&=c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=c\cdot f'(x_0)。\end{aligned}$$

(C)
$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x_0+h)+f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\&=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)。\end{aligned}$$

3Yl-1RteBm4

(D)
$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{(\frac{f}{g})(x_0+h)-(\frac{f}{g})(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}{g(x_0+h)g(x_0)}\\&=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0}g(x_0+h)g(x_0)}\\&=\frac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}。\end{aligned}$$

□

關於上述的計算, 只要把 x_0 換成變數 x, 就形成導函數的四則運算規則。

以下將證明合成函數的求導法則, 這個規則稱爲 鏈鎖律 (Chain Rule)。

GvmjyMf5DKo

定理 3 (鏈鎖律, Chain Rule)**.** 若 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 處導數存在, 而 $f(u)$ 在 $u=u_0=g(x_0)$ 的導數存在, 則合成函數 $y(x) \overset{記}{=} (f\circ g)(x) \overset{定義}{=\!=} f(g(x))$ 在 $x=x_0$ 處導數存在, 並且有以下規則:

$$y'(x_0)=(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0) \quad 或寫成 \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=g(x_0)}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}。$$

wYTOyPJWl2Q

證明: 因爲 $g'(x_0)$ 存在, 即

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=g'(x_0)\Rightarrow \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}-g'(x_0)\right)=0,$$

令

$$v(h)=\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}-g'(x_0)\Rightarrow g(x_0+h)=g(x_0)+(g'(x_0)+v(h))h,$$

注意到此時有 $\lim\limits_{h\to 0}v(h)=0$。

此外, 因爲函數 $f(u)$ 在 $u=u_0=g(x_0)$ 處可微分, 則

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(u_0+k)-f(u_0)}{k}=f'(u_0)\Rightarrow \lim_{k\to 0}\left(\frac{f(u_0+k)-f(u_0)}{k}-f'(u_0)\right)=0,$$

令

$$w(k)=\frac{f(u_0+k)-f(u_0)}{k}-f'(u_0)\Rightarrow f(u_0+k)=f(u_0)+(f'(u_0)+w(k))k,$$

注意到此時有 $\lim\limits_{k\to 0}w(k)=0$。

現在把合成函數的關係式寫下, 得到

$$f(g(x_0+h))=f(g(x_0)+(g'(x_0)+v(h))h).$$

在 $u_0=g(x_0)$ 以及 $k=(g'(x_0)+v(h))h$ 的情況下可得得到

$$f(g(x_0+h))=f(g(x_0))+(f'(g(x_0))+w(k(h)))(g'(x_0)+v(h))h,$$

由合成函數的極限法則告知 $\lim\limits_{h\to 0}w(k(h))=\lim\limits_{h\to 0}w((g'(x_0)+v(h))h)=0$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}&=\frac{f(g(x_0))+(f'(g(x_0))+w(k(h)))(g'(x_0)+v(h))h-f(g(x_0))}{h}\\&=\frac{(f'(g(x_0))+w(k(h)))(g'(x_0)+v(h))h}{h}\\&=(f'(g(x_0))+w(k(h)))(g'(x_0)+v(h)),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\lim_{h\to 0}(f'(g(x_0))+w(k(h)))(g'(x_0)+v(h))\\&=\left(\lim_{h\to 0}f'(g(x_0))+\lim_{h\to 0}w(k(h))\right)\left(\lim_{h\to 0}g'(x_0)+\lim_{h\to 0}v(h)\right)=f'(g(x_0))g'(x_0)。\end{aligned}$$

□

jAUclexKtr0

最後要建立函數的導數與反函數的導數之間的關係。

定理 4 (反函數的求導法則). 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處是可微分的, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 並且 $f(x)$ 在包含 $x = x_0$ 的一個開區間上連續且嚴格單調(嚴格遞增或嚴格遞減), 則反函數 $x = \varphi(y)$ 在 $y = y_0 = f(x_0)$ 處是可微分的, 並且 $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$。

證明: 因爲 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的一個鄰域內連續且嚴格單調, 所以反函數連續且嚴格單調 (詳見第 4 章單元 4.3 **定理 11**), 因此, 當 $y \to y_0$ 時 $\varphi(y) \to \varphi(y_0)$, 即 $x \to x_0$, 而函數 $\varphi(y)$ 的單調性告知: 對於 $y \neq y_0$ 則 $\varphi(y) \neq \varphi(y_0)$, 得到 $x \neq x_0$, 於是

$$
\begin{aligned}
\varphi'(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}。
\end{aligned}
$$

□

在這裡我故意把反函數寫成 $x = \varphi(y)$ 的型式, 是因爲這樣的寫法是把 y 當自變數, 而 x 是應變數, 而 φ 是 f 的反函數表示 $\varphi(f(x)) = \varphi(y) = x$。反函數是一種函數關係, 在未來處理問題中, 我們還是習慣把 x 當成自變數, 而 y 當做應變數, 所以函數 $f(x)$ 的反函數會用 $y = f^{-1}(x)$ 的方式重新表達。

snkasZM6eAo

這裡不妨再花一點時間說明 $y = f(x)$ 與 $y = f^{-1}(x)$ 的對應關係以及函數圖形的對稱性, 如圖 5.1 所示, 記 $P(a, b = f(a))$ 是 $f(x)$ 這個函數圖形上的任一點, 而反函數 $f^{-1}(x)$ 的意思表示將 x 用 b 代入之後會回應出 a 這個量; 也就是說 $a = f^{-1}(b)$, 於是 $f^{-1}(x)$ 的圖形一定會通過 $Q(b, a = f^{-1}(b))$ 這個點, 現將 $f(x)$ 與 $f^{-1}(x)$ 這兩個函數圖形畫在同一個坐標平面上, 因爲 P, Q 的中點是 $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$, 所以這兩個函數的圖形會對稱於直線 $y = x$。

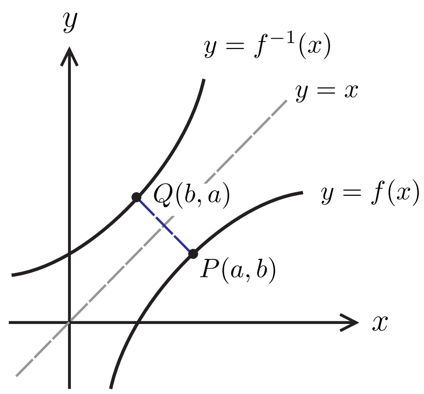

圖 5.1: 函數 $f(x)$ 與其反函數 $f^{-1}(x)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$。

而 **定理 4** 則是告知: 函數 $f(x)$ 的圖形在 $P(a, b)$ 這一點的切線斜率與函數 $f^{-1}(x)$ 的圖形在 $Q(b, a)$ 這一點的切線斜率互爲倒數; 也就是說 $(f^{-1})'(b) \cdot f'(a) = 1$, 其中 $b = f(a)$。這裡應再強調的是: 這兩個導數互爲倒數的所在位置是不一樣的, 一個位置是 b, 而另一個位置是 a, 它們並非同一點。

在這些求導法則都建立完畢後, 我們就可以逐一計算初等函數的導函數, 這些結果放在附錄中。以下要討論的函數具有代表性, 應仔細體會。

Hg68fgkyPjA

例 5. 考慮函數 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & 若\ x\neq 0 \\ 0 & 若\ x=0, \end{cases}$

(A) 若 $x\neq 0$, 求 $f'(x)$。

(B) 求導數 $f'(0)$。

(C) 求極限 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$。

解.

(A) 因爲函數 $x^2, \frac{1}{x}, \sin(x)$ 在 $x\neq 0$ 的地方都是可微分的, 所以我們可以利用導數的四則運算、鏈鎖律的方式處理, 得到

$$f'(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)。$$

(B) 因爲函數在 $x\neq 0$ 與 $x=0$ 處定義方式不同, 關於 $f(x)$ 在 $x=0$ 的可微分性目前不明, 於是透過定義計算:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0,$$

最後一個等式成立詳見第 4 章單元 4.2 的 例 **12** 有完整證明。

(C) 因爲 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 是在問 $x\neq 0$ 的函數 $f'(x)$ 當 x 趨近於 0 的極限, 所以由 (A) 的結果 $f'(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 觀察, 考慮數列 $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty}$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=0$, 且

$$f'(x'_n)=2\cdot\frac{1}{2n\pi}\cdot\sin(2n\pi)-\cos(2n\pi)\equiv -1\Rightarrow \lim_{n\to\infty}f'(x'_n)=-1;$$

另一方面, 考慮數列 $\{x''_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{(2n+1)\pi}\}_{n=1}^{\infty}$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}x''_n=0$, 且

$$f'(x''_n)=2\cdot\frac{1}{(2n+1)\pi}\cdot\sin((2n+1)\pi)-\cos((2n+1)\pi)\equiv 1\Rightarrow \lim_{n\to\infty}f'(x''_n)=1,$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在。

我們可以利用這個例題把一些觀念澄清:

問: 什麼時候可以利用求導法則計算導數與導函數, 什麼時候必須按照定義討論?

uBY25GhxKVo

答: 什麼時候可以利用求導法則, 當然是定理成立的情況下就可以使用啊! 要知道的是, 其實導數的四則運算、鏈鎖律、反函數求導等結果, 全部都是透過導數的定義仔細推得。而初等函數的導函數公式爲什麼簡單又容易記住, 實際上每一個公式也都是按照定義確實推導而得, 所以像在 (A) 的情形, 因爲函數 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 的地方是初等函數且滿足運算規則下的所有條件, 於是就可以直接操作公式。

問: 以這個例子而言, 我們可以說:「由 (A) 知: $f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, 因爲這個函數在 $x = 0$ 處無意義, 所以 $f'(0)$ 不存在。」嗎?

答: 這當然是不可以的, 因爲 $f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 的結果本來就只有在 $x \neq 0$ 的地方才能這樣表達, 在 $x = 0$ 的地方, 上述求導法則不適用, 所以必須按照定義重新操作, 甚至 (B) 的結果說明了 $f'(0) = 0$ 導數存在。

zV7wFe0bVV0

問: 關於 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 的幾何意義是什麼? 它和 $f'(0)$ 差別在哪裡? 而這個例子說明了什麼事情?

答: 給定 x, 導數 $f'(x)$ 若存在, 其幾何意義是函數 $f(x)$ 的圖形在 $(x, f(x))$ 這點的切線斜率, 它是源自於通過 $(x, f(x))$ 與 $(x+h, f(x+h))$ 這兩點的割線斜率對於 $h \to 0$ 的極限。而 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 是在觀察: 對於函數圖形在 $(x, f(x))$ 的切線斜率 $f'(x)$, 觀察這些切線及其斜率當 $x \to 0$ 的時候是否極限存在。而這個例子告知: 切線斜率的極限 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不見得與導數 $f'(0)$ 一樣。

或許我們畫一個比較極端一點的情況幫助各位看清楚切線斜率的極限與割線斜率的極限是不同的概念。如圖 5.2 所示: 若要討論函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的導數 $f'(x_0)$, 按照定義, 它是在觀察如左圖那樣的割線的行爲, 這個圖示意的是右導數的情況, 發現在 $h \to 0^+$ 時割線斜率趨近於無限大。另一方面, 在 $x > x_0$ 的地方, 函數圖形的切線如 (b) 所示, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 是在研究函數 $f(x)$ 的圖形在 $x = x_0$ 附近的點之切線(斜率) 如何變化。

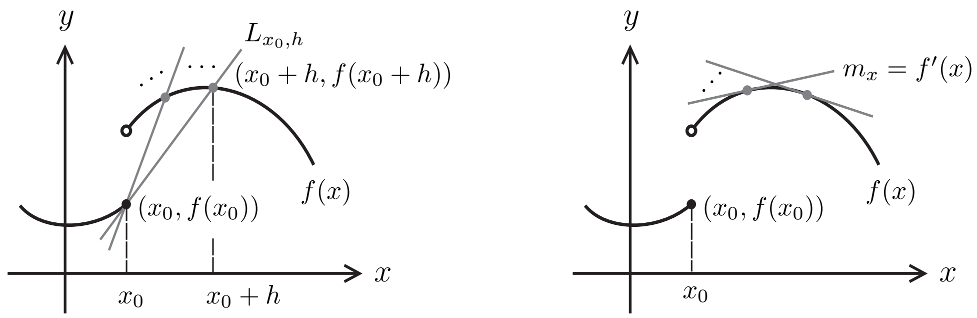

圖 5.2: 左圖: 割線斜率的極限。右圖: 切線斜率的極限。

至於什麼時候 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$ 等式成立呢? 若從導函數 $f'(x)$ 的觀點來看, 等式成立則是說明 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(\lim\limits_{x\to x_0} x) = f'(x_0)$; 也就是說, 導函數 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 是連續的。

由上述討論, 我們引進以下記號:

定義 6.

(A) 記 $C([a,b]) = \{f(x) | \, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是連續函數$\}$。

(B) 記 $C^1([a,b]) = \{f(x) | \, f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是連續函數$\}$。

以這些記號來看上面的例子, 則是說明函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & 若\ x \neq 0 \\ 0 & 若\ x = 0, \end{cases}$, $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$。

對於 $f(x): I \to \mathbb{R}$, 如果導函數 $f'(x)$ 存在, 那麼就可以繼續對於導函數 $f'(x)$ 研究每一點的導數, 於是定義

iHe7R3wpAfc

$$f''(x_0) \xlongequal{\text{定義}} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h},$$

如果極限存在, 則稱 $f''(x_0)$ 爲函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處的 二階導數 (second derivative of $f(x)$ at $x = x_0$)。若定義 $I_2 = \{x \in I_1 \,|\, f''(x) \text{ 存在}\}$, 則 $f''(x): I_2 \to \mathbb{R}$ 稱爲 二階導函數 (second derivative of $f(x)$)。

依此概念繼續計算, 我們可以定義函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的 n 階導數 (n-th derivative of $f(x)$ at $x = x_0$):

$$f^{(n)}(x_0) \xlongequal{\text{定義}} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h},$$

若記 $I_n = \{x \in I_{n-1} \,|\, f^{(n)}(x) \text{ 存在}\}$, 則得 $f^{(n)}(x): I_n \to \mathbb{R}$ 爲 n 階導函數 (n-th derivative of $f(x)$)。高階導數的記號會有以下幾種表示法:

$$f^{(n)}(x_0),\ y^{(n)}(x_0),\ \left.\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}y\right|_{x=x_0},\ D_x^n f(x_0)。$$

以下引進兩個集合爲了以後方便說明一些函數的性質:

$$\begin{aligned} C^n([a,b]) &= \{f(x) |\, f^{(n)}(x): [a,b] \to \mathbb{R} \text{ 爲連續函數}\} \\ C^\infty([a,b]) &= \{f(x) |\, \text{對所有 } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, f^{(n)}(x): [a,b] \to \mathbb{R} \text{ 爲連續函數}\} = \cap_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} C^n([a,b])。\end{aligned}$$

例 **7.** 試論初等函數的可微性。

qPt8Sz5gy2o

解.

(A) 常數函數: $f(x) = c$, 其中 $c \in \mathbb{R}$, 則 $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$。

(B1) 三角函數: $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$, 則 $f(x), g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$。

(B2) 反三角函數: $f(x) = \sin^{-1} x, g(x) = \cos^{-1} x$, 則 $f(x), g(x) \in C^\infty((-1,1))$; 而 $h(x) = \tan^{-1} x$, 則 $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$。

(C) 指數函數: 給定 $a > 0$, $f(x) = a^x$, 則 $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$。

(D) 對數函數: 給定 $a > 0, a \neq 1$, $f(x) = \log_a |x|$, 則 $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$。

(E1) 多項式: 給定 $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$, 則 $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$。

(E2) 冪函數: 給定 $a \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, 則 $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$。

這一節最後應跟各位說明的是: 本講義的目的是把關於導數理論的部份建構完畢, 關於導數的一些計算與相關應用, 應回到微積分課程或是參閱其它書籍或資源自行加強計算能力。

5.3 均值定理

EeX1SaZ4S1E

微積分理論當中, 微分學是在研究函數與導函數之間的關聯, 不論是由函數得到導函數的特性或是由導函數的資訊反推原函數的性質都會予以討論。這當中最經典的定理莫過於均值定理 (Mean Value Theorem), 在均值定理的建立之後有諸多應用, 這裡的主線是想把羅必達法則 (L'Hôpital's Rule) 的完整證明當成一個階段性的目標。

和多數教科書的取材及編排類似, 我們要從費馬定理 (Fermat's Theorem) 開始說起, 然後得到洛爾定理 (Rolle's Theorem)、均值定理 (Mean Value Theorem, Lagrange's Theorem) 再得柯西均值定理 (Cauchy's Mean Value Theorem), 由這些定理的徹底認識才能進一步證明羅必達法則。

在微積分建立的初期, 費馬定理的產生主要是想研究函數的極值, 因爲很多問題經過分析之後最終都是在尋找函數的極值與極值發生的地方。第 4 章曾經介紹一個定理是說: 有界閉區間上的連續函數必有最大值與最小值, 而該定理只是告知函數極值的存在性, 至於極值發生的地方並不清楚, 而微分學理論的一個用途是在幫助我們尋找極值發生的位置。更一般地, 除了函數的最大值與最小值外, 我們也可以關心局部極值, 於是這裡先給出局部極值的定義:

定義 1.

(A) 考慮函數 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 以及 $x_0\in(a,b)$, 若存在 $\delta>0$ 使得對所有 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 都有 $f(x)\le f(x_0)$, 則稱 $f(x_0)$ 是 *局部極大值* (locally maximum value)。

(B) 考慮函數 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 以及 $x_0\in(a,b)$, 若存在 $\delta>0$ 使得對所有 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 都有 $f(x)\ge f(x_0)$, 則稱 $f(x_0)$ 是 *局部極小值* (locally minimum value)。

上述定義中, 特地將函數的定義域限定在開區間 (a,b) 而非閉區間 $[a,b]$, 這是爲了讓後面要介紹的費馬定理有一個簡單的樣貌呈現; 實際上函數在端點處也可以定義局部極值的概念, 只是在端點產生局部極值的時候結論會比較複雜, 所以在此先不研究; 換言之, 現在所討論局部極值的地方, 先限定在 x_0 的左、右兩側都能夠取出一個範圍 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 並且比較函數值。

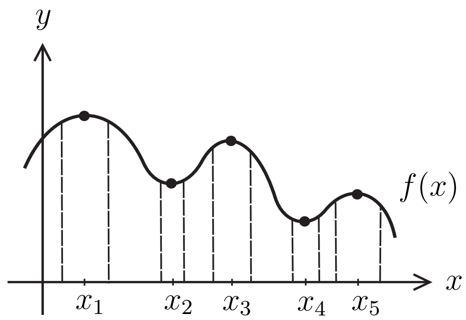

圖 5.1: 這裡討論函數 $f(x)$ 的局部極值處必須左、右都要能夠取出一個範圍比較函數值。

這裡不妨畫一個函數 $f(x)$ 的圖形示意局部極值的概念, 如圖 5.1 所示, 在 x_1,x_3,x_5 的地方, 函數 $f(x)$ 產生局部極大值, 在 x_2,x_4 的地方, 函數 $f(x)$ 產生局部極小值。注意到局部極值的定義中關於 $\delta>0$ 是存在性, 只要在範圍內的點比較函數值即可, 超出範圍外的點不需理會, 於是局部極小值有可能比局部極大值還要大, 像是圖中的 $f(x_2)>f(x_5)$。

以下要介紹的費馬定理是告知函數產生局部極值的必要條件。

定理 2 (費馬定理, Fermat's Theorem)**.** 若函數 $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ 在 $x=x_0$ 處可微分, 而且在 $x=x_0$ 處產生局部極值, 則 $f'(x_0)=0$。

1OfFiZjl6OU

證明: 函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 處產生局部極值, 則存在 $\delta>0$ 使得對所有 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 都有 (A) $f(x)\le f(x_0)$ 或 (B) $f(x)\ge f(x_0)$。

(A) 若 $f(x)\le f(x_0)$, 則對所有 $x_0-\delta<x<x_0$ 都有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0\Rightarrow \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0,$$

另一方面, 對所有 $x_0<x<x_0+\delta$ 都有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0\Rightarrow \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,$$

因爲 $f'(x_0)$ 存在, 則 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$, 於是 $f'(x_0)=0$。

(B) 若 $f(x)\ge f(x_0)$, 則對所有 $x_0-\delta<x<x_0$ 都有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0\Rightarrow \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,$$

另一方面, 對所有 $x_0<x<x_0+\delta$ 都有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0\Rightarrow \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0,$$

因爲 $f'(x_0)$ 存在, 則 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$, 於是 $f'(x_0)=0$。

□

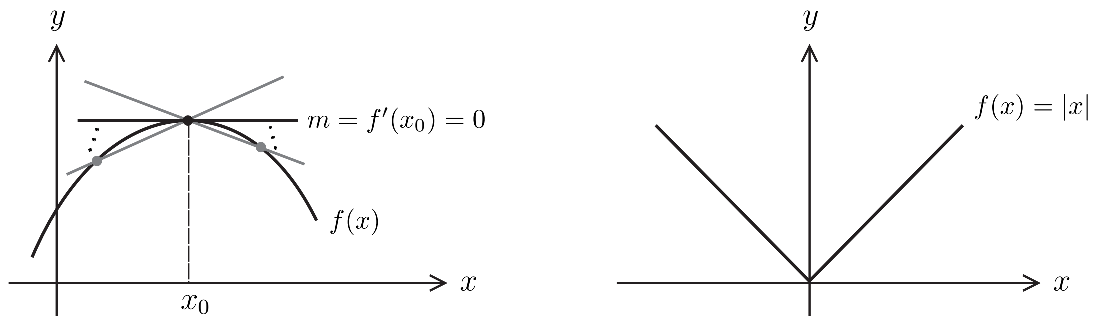

圖 5.2: 局部極值點的導數必須假設存在, 才能用兩側割線斜率的符號得知切線斜率爲零。

注意到費馬定理的前提必須假設在產生局部極值的地方導數 $f'(x_0)$ 存在, 才能夠推得這個局部極值點滿足 $f'(x_0)=0$。函數若在某處產生局部極值, 函數在極值點不見得是可以微分的, 例如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 是局部極小值發生的地方, 但是 $f'(0)$ 不存在 (詳見單元 5.1 例 **5** 的討論)。

這裡不妨先岔個題 (我們的主線是要證明羅必達法則), 說明一下如何利用費馬定理尋找函數的最大值與最小值。雖然 $f'(x_0)=0$ 只是極值發生的必要條件, 但是透過解 $f'(x)=0$ 這個方程式, 它提供了一個尋找極值的方法, 我們將滿足 $f'(x)=0$ 的點或者是不可微分的點稱爲函數 $f(x)$ 的 臨界點 (critical points)。換言之, 一個有界閉區間上的函數, 產生最大值或最小值的候選人只有兩類: 臨界點與端點。所以把這些候選人全部挑出來再進一步比大小就可以得到最大值與最小值, 這是微積分課所學的最大、最小值判別法。至於局部極值的分類, 還要透過二階導數的符號再進一步分析, 因爲這裡還沒有討論到二階導數的任何事情, 故暫不多述。然而, 局部極值判別法是微積分課程介紹過的內容, 所以理應自行回顧其理論。

6aIvwTENqHY

再來要介紹的洛爾定理 (Rolle's Theorem) 是均值定理 (Mean Value Theorem) 的前置作業。

定理 3 (洛爾定理, Rolle's Theorem)**.** *若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微分, 並且 $f(a)=f(b)$, 則存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$。*

證明:

(A) 若對所有 $x\in(a,b)$ 都有 $f(x)=f(a)=f(b)$, 也就是說, $f(x)$ 爲常數函數, 那麼 $f'(x)\equiv 0$, 得到在 (a,b) 內的任何一點都可以作爲定理結論的候選人。

(B) 如果存在 $x\in(a,b)$ 使得 $f(x)>f(a)$, 由極值定理 (Extreme Value Theorem) 得知: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\max\limits_{[a,b]}f(x)$, 而 $f(\xi)$ 是函數 $f(x)$ 的最大值意指對所有 $x\in[a,b]$ 都有 $f(\xi)\ge f(x)$, 故由費馬定理 (Fermat's Theorem) 得知 $f'(\xi)=0$。

(C) 如果存在 $x\in(a,b)$ 使得 $f(x)<f(a)$, 由極值定理 (Extreme Value Theorem) 得知: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\min\limits_{[a,b]}f(x)$, 而 $f(\xi)$ 是函數 $f(x)$ 的最小值意指對所有 $x\in[a,b]$ 都有 $f(\xi)\le f(x)$, 故由費馬定理 (Fermat's Theorem) 得知 $f'(\xi)=0$。

□

洛爾定理在圖形上欲呈現的是: 因爲兩端點的函數值一樣, 除了常數函數這個特例之外, 對其它不是常數函數的可微分函數, 產生最大值或最小值的點就是候選人。

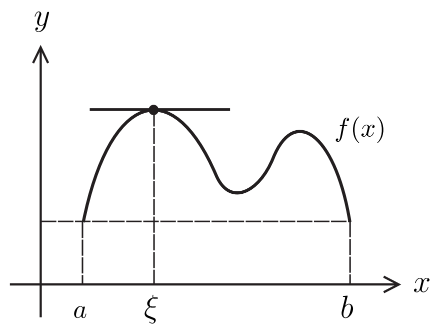

圖 5.3: 洛爾定理的幾何意義。

這裡也注意到洛爾定理只是告知滿足 $f'(\xi)=0$ 的點的存在性, 結果可能不唯一, 只要函數產生局部極值的地方都是候選人; 而且函數 $f(x)$ 必須在 (a,b) 上的每一點都是可以微分的情況下才有 $f'(x)=0$ 的點的存在性, 否則像前面所述在 $[-1,1]$ 上的函數 $f(x)=|x|$ 就沒有洛爾定理的結果。

在兩端點函數值不同時, 我們可以證明以下的均值定理:

2tWQ84hlG7Y

定理 4 (均值定理, Mean Value Theorem, Lagrange's Theorem)**.** 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微分, 則存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)。$$

證明: 考慮函數

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

則 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上是連續函數, 在 (a,b) 上的任何一點導數皆存在, 並且

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a) = f(a) \\ F(b) &= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-a) = f(b)-(f(b)-f(a)) = f(a), \end{aligned}$$

因爲 $F(a) = F(b)$, 由洛爾定理 (Rolle's Theorem) 得知: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$。於是

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}。$$

□

現說明均值定理的幾何意義: 如圖 5.4 所示, 畫出可微分函數 $y = f(x)$ 的圖形後, 均值定理的結果在等式右邊 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 要描述的是通過 $(a, f(a))$ 與 $(b, f(b))$ 兩點的割線斜率。而 $f'(\xi)$ 表示函數圖形在 $x = \xi$ 處的切線斜率。均值定理是說: 在函數圖形上一定會有一點的切線與兩端點所成的割線平行。

或者換個角度思考, 將通過 $(a, f(a))$ 與 $(b, f(b))$ 兩點的直線平行移動, 在移動的過程中, 一定會有某個階段的直線與函數圖形相切, 而 $(\xi, f(\xi))$ 是切點產生的地方。

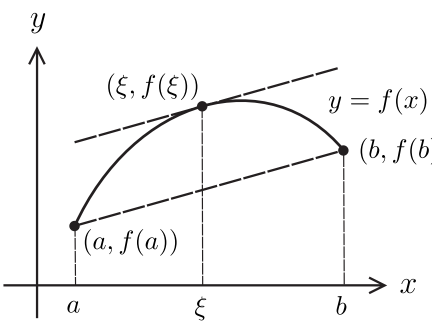

圖 5.4: 通過 $(a, f(a))$ 與 $(b, f(b))$ 的割線斜率與函數圖形在 $(\xi, f(\xi))$ 的切線斜率一致。

若要用物理的角度再對均值定理解釋的話, 則有如下說明: 一趟很平順的開車旅程, 從位置 $f(a)$ 開到位置 $f(b)$ 經過的時間是 $b-a$, 所以平均速度爲 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 那麼在開車的過程中一定會有一個時刻 ξ 的瞬間速度 $f'(\xi)$ 與平均速度一致。

Law4_CdG3n4

定理 5 (柯西均值定理, Cauchy Mean Value Theorem). 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微分, 並且 $g'(x)\neq 0$, 則存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}。$$

證明: 考慮 $F(x)=f(x)(g(b)-g(a))-g(x)(f(b)-f(a))$, 則函數 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲連續函數, 而且在 (a,b) 當中的任何一點導數皆存在, 並且

$$\begin{aligned}F(a)&=f(a)(g(b)-g(a))-g(a)(f(b)-f(a))=f(a)g(b)-g(a)f(b)\\F(b)&=f(b)(g(b)-g(a))-g(b)(f(b)-f(a))=-f(b)g(a)+g(b)f(a)。\end{aligned}$$

因爲 $F(a)=F(b)$, 由洛爾定理 (Rolle's Theorem) 得知: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$。於是

$$\begin{aligned}&F'(x)=f'(x)(g(b)-g(a))-g'(x)(f(b)-f(a))\\\Rightarrow\ &F'(\xi)=f'(\xi)(g(b)-g(a))-g'(\xi)(f(b)-f(a))=0\\\Rightarrow\ &f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))\Rightarrow\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}。\end{aligned}$$

□

u_-JXRranMc

若要將此定理與圖形有一個對應, 這裡必須引進曲線 *參數方程式* (parametric equations) 或簡稱 *參數式* 的概念: 如圖 5.5 左圖所示, 假設在 xy-平面上有一條曲線 C, 它不見得可以表示成函數 $f(x)$ 的圖形, 這時不妨把曲線 C 想成是隨著時刻 t 變化下質點運動的軌跡, 於是把質點位置的 x 分量與 y 分量分別用 t 的函數表示, 得到 $\boldsymbol{\alpha}(t)=(x(t),y(t))$, 這就叫做曲線的參數式,。

經數學的抽象化後, t 不見得硬是要想成物理上所謂的時間, 它就只是一個 *參數* (parameter) 而已, 而且我們可以選用其它符號當成參數。特別地, 當一條曲線是函數 $f(x)$ 的圖形時, 我們可以把 x 作爲參數, 於是賦予它 $\boldsymbol{\alpha}(x)=(x,f(x))$ 這樣的參數式。

參數式 $\boldsymbol{\alpha}(t)=(x(t),y(t))$ 也可以看成是坐標中心 O 指向該點的向量, 由此觀點, 我們考察 $\boldsymbol{\alpha}'(t_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{\alpha}(t_0+h)-\boldsymbol{\alpha}(t_0)}{h}$ 的意義, 如圖 5.5 右圖所示, $\boldsymbol{\alpha}(t_0+h)-\boldsymbol{\alpha}(t_0)$ 表示由 $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$ 指向 $\boldsymbol{\alpha}(t_0+h)$ 的向量, 這個向量再除掉 h 之後只是對向量比例伸縮, 不影響方向, 將向量對 $h\to 0$ 取極限後, 稱 $\boldsymbol{\alpha}'(t_0)$ 爲曲線的 *切向量* (tangent vector)。

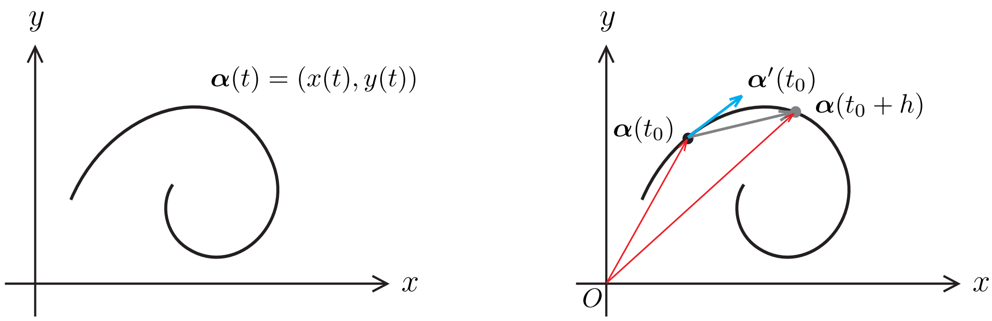

圖 5.5: 曲線參數式 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 與曲線在一點的切向量 $\boldsymbol{\alpha}'(t_0)$。

我們再把切向量 $\boldsymbol{\alpha}'(t_0)$ 看得更淸楚一點, 它是在計算

$$\boldsymbol{\alpha}'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{\alpha}(t_0+h)-\boldsymbol{\alpha}(t_0)}{h}=\left(\lim_{h\to 0}\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h},\lim_{h\to 0}\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}\right),$$

因爲通過 $\boldsymbol{\alpha}(t_0)=(x(t_0),y(t_0))$ 與 $\boldsymbol{\alpha}(t_0+h)=(x(t_0+h),y(t_0+h))$ 這兩點的割線斜率爲

$$m_{t_0,h}=\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{x(t_0+h)-x(t_0)}=\frac{(y(t_0+h)-y(t_0))/h}{(x(t_0+h)-x(t_0))/h},$$

所以割線方程式爲 $y-y(t_0)=m_{t_0,h}(x-x(t_0))$, 這組割線方程式中, 和 h 有關的量只有斜率 $m_{t_0,h}$ 的部份, 在 $x'(t_0)\neq 0$ 的情況下, 將斜率 $m_{t_0,h}$ 對 $h\to 0$ 取極限後得到曲線在 $(x(t_0),y(t_0))$ 的切線方程式 $y-y(t_0)=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x-x(t_0))$。這裡的討論只是爲了要和當初介紹函數在一點的導數之幾何意義有一個對照, 實際上在參數式的寫法下, 我們可以針對那些 $x'(t_0)=0$ 的地方也寫出切線的參數式:

$$L:\begin{cases} x=x(t_0)+x'(t_0)s \\ y=y(t_0)+y'(t_0)s, \end{cases}\ \text{其中 } s\in\mathbb{R}。$$

解釋完曲線的參數式及切向量之後, 現在要解釋柯西均值定理的幾何意義, 爲了讓柯西均值定理的所有條件與幾何圖形的情境一致, 我們重設柯西均值定理的符號, 變成以下寫法:

若 $f(t),g(t)$ 在 $t\in[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可導, 並且 $g'(t)\neq 0$, 則存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}。$$

如圖 5.6 所示, 在 xy-平面上有一條曲線 C, 它並非函數的圖形, 所以原始的均值定理不適用, 但是這條曲線對於另一組坐標系 $\bar{x}\bar{y}$-平面來看可視爲以變數 $\bar{x}$ 而言的函數圖形, 在此設定下, 將定理所述之兩函數對應到曲線 C 對於 $\bar{x}\bar{y}$-平面的參數式, 也就是 $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\bar{x}(t),\bar{y}(t))=(g(t),f(t))$; 換言之, $g(t)$ 和 $f(t)$ 分別視爲質點在運動過程中 t 時刻下對於 $\bar{x}$ 與 $\bar{y}$ 的分量。由於曲線在 $\bar{x}\bar{y}$-平面的觀點下可視爲以 $\bar{x}$ 爲變數的函數圖形, 那麼這條曲線就可以寫出一個參數式使得 $g'(t)\neq 0$。

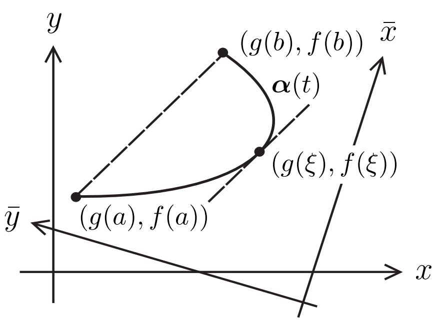

圖 5.6: 柯西均值定理的幾何意義: 將曲線 C 用參數式 $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\bar{x}(t),\bar{y}(t))=(g(t),f(t))$, $a\le t\le b$ 表示, 觀察曲線在端點的割線斜率與某一點的切線斜率之關係。

如此一來, 等式右邊 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 要描述的是通過曲線兩端點的割線斜率, 而這條曲線上每一點的切向量爲 $\boldsymbol{\alpha}'(t)=(g'(t),f'(t))$, 所以切線斜率爲 $\frac{f'(t)}{g'(t)}$, 柯西均值定理是說: 曲線上存在一點 ξ 使得在該點的切線斜率與曲線兩端點所得到的割線斜率一致。

5.4 羅必達法則

r8N3ONa2jCU

這一節的主要目的是要透過前一節所得到的柯西均值定理證明 羅必達法則 (L'Hôpital's Rule)。首先我們要將能夠使用羅必達法則的極限類型說明清楚, 於是引出以下不定型的概念:

定義 1 (不定型, indeterminate form). 給定函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 以及一點 x_0, 欲探討極限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$,

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, 則稱 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 是 零分之零的不定型 (indeterminate form of type $\frac{0}{0}$)。

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $-\infty$) 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ (或 $-\infty$), 則稱 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 是 無限大分之無限大的不定型 (indeterminate form of type $\frac{\infty}{\infty}$)。

羅必達法則提供了一種用函數的微分處理極限的方法。

定理 2 (羅必達法則, L'Hôpital's Rule). 假設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 的一個鄰域 $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)-\{x_0\}$ 皆可微分, 而且 $g'(x)\neq 0$。如果極限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 爲不定型, 而且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 則

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

證明:

(1) <u>首先探討零分之零的不定型</u>。假設 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ 以及 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$。定義

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{若 } x\neq x_0 \\ 0 & \text{若 } x=x_0, \end{cases} \qquad G(x)=\begin{cases} g(x) & \text{若 } x\neq x_0 \\ 0 & \text{若 } x=x_0, \end{cases}$$

因爲 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0=F(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} G(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0=G(x_0)$, 所以 $F(x)$ 與 $G(x)$ 在 $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 都是連續函數。此外, 在區間 (x_0,x) (或區間 (x,x_0)) 上 $F'(x)=f'(x)$ 與 $G'(x)=g'(x)$ 表示 $F(x)$ 與 $G(x)$ 在區間 (x_0,x) 或 (x,x_0) 都是可微分函數, 因爲 $G'(x)=g'(x)\neq 0$, 由柯西均值定理 (Cauchy's Mean Value Theorem) 得知: 存在 $\xi\in(x_0,x)$ (或 (x,x_0)) 使得

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F(x)}{G(x)},$$

於是

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{\xi\to x_0^+}\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\lim_{\xi\to x_0^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=L,\\
\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to x_0^-}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{\xi\to x_0^-}\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\lim_{\xi\to x_0^-}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=L,
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$。

(2) 再來要討論無限大分之無限大的不定型, 以下討論右極限的情況, 左極限的討論同理可證。

NFTlDPdS5K8

給定 $x, x_1 \in (x_0, x_0+\delta_0)$, 先觀察

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} &= \frac{-f(x)g(x_1)+g(x)f(x_1)}{g(x)(g(x)-g(x_1))} \\ &= \frac{-(f(x)-f(x_1))g(x_1)+(g(x)-g(x_1))f(x_1)}{g(x)(g(x)-g(x_1))} \\ &= -\frac{g(x_1)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} + \frac{f(x_1)}{g(x)},\end{aligned}$$

得到

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} + \frac{f(x_1)}{g(x)},$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &= \left|\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} + \frac{f(x_1)}{g(x)} - L\right| \\ &= \left|\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - L\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)} - \frac{g(x_1)}{g(x)}\cdot L\right| \\ &\le \left|1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - L\right| + \left|\frac{f(x_1)-g(x_1)L}{g(x)}\right|。\end{aligned}$$

注意到上述討論純粹只是代數上的操作, 對於在區間 $(x_0, x_0+\delta_0)$ 內的任兩點 x, x_1 都成立。再來要開始選取適當的範圍與點滿足極限精確定義的討論。因爲 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, 所以對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$ 使得所有滿足 $0 < x - x_0 < \delta_1 < \delta_0$ 的點都有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon,$$

記 $x_1 = x_0 + \delta_1$, 因爲 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在閉區間 $[x, x_1]$ 上連續, 在開區間 (x, x_1) 可微分, 並且 $g'(x) \neq 0$, 根據柯西均值定理 (Cauchy's Mean Value Theorem), 對任意 $x \in (x_0, x_1)$, 存在 $\xi = \xi(x) \in (x, x_1)$ 使得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

於是對所有滿足 $0 < x - x_0 < \delta_1$ 的點都有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - L\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| < \varepsilon,$$

因爲 $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = \infty$, 所以對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$ 使得對所有 $0 < x - x_0 < \delta_2$, 都有

$$\left|1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| < 2 \quad 且 \quad \left|\frac{f(x_1)-g(x_1)L}{g(x)}\right| < \varepsilon,$$

於是

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \le \left|1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - L\right| + \left|\frac{f(x_1)-g(x_1)L}{g(x)}\right| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

所以羅必達法則在無限大分之無限大的情況下成立。

□

羅必達法則可適用於 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 的不定型, 這裡列出定理敘述:

t36g-I_wCPg

定理 3 (羅必達法則, L'Hôpital's Rule)**.** 假設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x\in[X,\infty)$ 皆可微分, 其中 $X\in\mathbb{R}$, 而且 $g'(x)\neq 0$。如果極限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 爲不定型, 而且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

證明:

(1) 若是<u>零分之零的不定型</u>, 考慮變數變換 $t=\frac{1}{x}$, 則當 $x\to\infty$ 時 $t\to 0^+$, 於是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}\xlongequal{(\frac{0}{0},L')}\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(\frac{1}{t})\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

(2) 若是<u>無限大分之無限大的不定型</u>, 考慮變數變換 $t=\frac{1}{x}$, 則當 $x\to\infty$ 時 $t\to 0^+$, 於是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}\xlongequal{(\frac{\infty}{\infty},L')}\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(\frac{1}{t})\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}。$$

$\square$

關於羅必達法則有許多事情值得進一步了解:

q_v_ntYerCc

(A) 使用羅必達法則時請養成好習慣: 在利用羅必達法則的那個等號上面註記 $(\frac{0}{0},L')$ 或是 $(\frac{\infty}{\infty},L')$ 的字樣。

在等號上註記 $(\frac{0}{0},L')$ 或是 $(\frac{\infty}{\infty},L')$ 並不是敷衍交差了事, 而是有意義的。對個人而言, 其實是讓自己在計算極限時先停下腳步, 確定自己要處理的極限是不定型, 並且滿足羅必達法則的所有條件下才可以使用。另一方面, 寫下記號 $(\frac{0}{0},L')$ 或是 $(\frac{\infty}{\infty},L')$ 是在告知別人你在這個計算中用了羅必達法則。因爲利用羅必達法則的前後算式基本上是完全變形, 一般人在閱讀或是跟隨 (follow) 算式的時候基本上只能接受代數上的轉換, 像是通分、化簡、有理化等操作, 若不註記這類符號, 很容易產生前後算式突兀的情況。使用羅必達法則的那個等號前一個式子與後一個式子是兩個完全不同的函數, 只是取極限之後相同。

在等號上註記清楚等號成立的理由是對自己所寫的東西一種負責任的態度。

(B) <u>不可以</u>對 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 這個極限使用羅必達法則然後求得極限值是 1。

記 $f(x)=\sin x$ 與 $g(x)=x$, 則 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 雖然完全符合羅必達法則的所有條件, 然而在求得 $f'(x)=\cos x$ 的證明過程中, 又必須先知道 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 這個極限值, 這樣會產生循環論證的情況。

這也是爲什麼我們利用三角形與扇形面積的關係透過夾擠定理的方式證明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 然後才引出後續的所有討論。

(C) 羅必達法則可適用在有限步驟中, 每一次都滿足羅必達條件的情況; 也就是說, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\ldots$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$ 都是不定型, 而且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=L$, 則

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{(n)}{=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\overset{(n-1)}{=\!=\!=}\cdots\overset{(2)}{=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}\overset{(1)}{=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=L。$$

注意等式成立的理由是先從 (1) 式成立, 再得 (2) 式成立, 再逐一往前推得 $(n-1)$ 式與 (n) 式成立。

(D) 羅必達法則的敘述中, 在 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ 的情況下是可以推得 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$。

rNCtZIe4nSo

(D1) 若是零分之零的不定型, 證明過程完全一樣。

(D2) 若是無限大分之無限大的不定型, 以下只說明右極限的情況, 而左極限的情況同理。對任意 $x, x_1\in\mathbb{R}$, 我們從恆等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}+\frac{f(x_1)}{g(x)}$$

繼續分析, 給定任意 $M>0$, 因為 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, 所以存在 $\delta_1>0$ 使得對所有滿足 $0<x-x_0<\delta_1<\delta_0$ 的點, 都有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|\geq 2(M+1)。$$

記 $x_1=x_0+\delta_1$, 對所有 $x_0<x<x_1$, 因為 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在區間 $[x,x_1]$ 上連續, 在 (x,x_1) 上可微分, 並且 $g'(x)\neq 0$, 故由柯西均值定理 (Cauchy Mean Value Theorem) 得知: 存在 $\xi\in(x,x_1)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|>2(M+1)。$$

因為 $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\infty$, 所以存在 $\delta_2>0$ 使得對所有滿足 $0<x-x_0<\delta_2$ 的點都有

$$\left|1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|>\frac{1}{2}\quad 且\quad\left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right|<1,$$

所以給定 $M>0$, 取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$, 則對所有滿足 $0<x-x_0<\delta$ 的點, 都有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|&=\left|\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}+\frac{f(x_1)}{g(x)}\right|\\&\geq\left|\left|1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\right|-\left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right|\right|\\&>\frac{1}{2}\cdot 2(M+1)-1=M+1-1=M,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$。

1MA2syYIH78

(E) 和 (D) 的情況相比較, 如果羅必達法則的前提都成立, 而 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 極限不存在 (並非 $\to\infty$ 或 $-\infty$ 類型的極限不存在), 這種情況無法推得原極限不存在, 羅必達法則不適用。

爲什麼 (D) 的情況可以 (E) 的情況又不可以, 這之間的機制或是差異到底在哪呢? 若仔細研究證明過程, 發現 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (包含無限大的情況) 可推得任何子數列都收斂而且有相同的極限值, 如此在使用均值定理時得到的 $\xi=\xi(x)$ 才有 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$ 存在 (含無限大)。

在極限不存在 (並非 $\to\infty$ 或 $-\infty$ 類型的極限不存在) 的情況就無法推知子數列的任何行爲。

4hiD2UhI3IQ

(F) 羅必達法則總共有七種類型, 除了前述所說的 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ 之外, 還有 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,\infty^0,1^\infty$, 後面五種類型的極限處理, 是先透過代數的操作 (通分、整理、化簡、取對數或取指數等方式) 將問題轉換成前面兩種類型之後再使用羅必達法則。

(F1) 以下舉例說明 $\infty-\infty$ 的不定型如何處理極限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}\right)\overset{(\frac{0}{0},L')}{=\!=\!=}\lim_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}\right)\\&\overset{(\frac{0}{0},L')}{=\!=\!=}\lim_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+1+x}=\frac{1}{2}。\end{aligned}$$

(F2) 以下舉例說明 $0\cdot\infty$ 的不定型如何處理極限:

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{(\frac{\infty}{\infty},L')}{=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0。$$

(F3) 以下舉例說明 0^0 的不定型如何處理極限: 考慮 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$, 由 (F2) 知: $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$, 因爲函數 e^x 在 $x=0$ 處連續, 所以 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to0^+}x\ln x}=\mathrm{e}^0=1$。

(F4) 以下舉例說明 ∞^0 的不定型如何處理極限: 考慮 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$, 因爲

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{(\frac{\infty}{\infty},L')}{=\!=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

而函數 e^x 在 $x=0$ 處連續, 所以

$$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x}=\mathrm{e}^0=1。$$

l8UhrBNmjhM

(G) 使用羅必達法則時應避免鬼打牆。當你發現使用羅必達法則之後讓整個問題變得更複雜時, 代表你走錯方向了, 必須反向重新分配再操作。例如

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}\overset{(\frac{0}{0},L')}{=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{-\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}-x(\ln x)^2。$$

這種情況就是所謂的鬼打牆, 因爲使用羅必達法則目的是希望將原問題化簡, 但是本來 $x\ln x$ 的極限都處理不了, 卻換來 $x(\ln x)^2$ 這個更複雜的樣式: 對於 $\ln x$ 的次方來說又提升了一次; 所以應該反向操作, 像是 (F2) 的方式重新分配分子與分母再用羅必達法則結果就會變好。

(H) 幾個常用的極限以及它的變形應熟知其結果:

(H1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1 \qquad \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=0$$

(I) 羅必達法則並非萬能, 有很多無法用羅必達法則處理的極限問題, 也有很多就算是不定型, 但是用了羅必達法則之後仍然無法下定論的極限問題, 這時應另尋它法。其它求極限的方法像是夾擠定理 (Squeeze Theorem) 甚至用極限的精確定義確實討論都很好用。未來會討論泰勒級數的理論, 羅必達法則有一大類型其實是泰勒級數理論當中的一個特殊情況而已, 到時候從泰勒級數的眼光下看問題會更清楚。

1HY5nOOPV9E

(J) 不要盲目地使用羅必達法則, 先觀察、整理, 謀定而後動, 而且羅必達法則用在不定型的地方即可, 不要被其它的項干擾。

EhMmSLGlk2s

(J1) 比方說考慮極限 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+3\mathrm{e}^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$, 利用羅必達法則並經過整理之後得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+3\mathrm{e}^x)}{\sqrt{2+3x^2}} \overset{(\frac{\infty}{\infty},L')}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3\mathrm{e}^x}{2+3\mathrm{e}^x}}{\frac{6x}{2\sqrt{2+3x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x\sqrt{2+3x^2}}{(2+3\mathrm{e}^x)x},$$

有很多人在看到這個極限後發現到它又是不定型, 然後就急著再次使用羅必達法則, 這就所謂的盲目。注意到最後一式的分子與分母分別都是兩個函數的相乘, 甚至分子帶有根號, 內部函數其實是有點複雜, 若微分下去, 乘法法則、鏈鎖律等就會列出更多更複雜的式子, 除了要微分正確外, 能不能算出答案可能也不太清楚, 所以使用第二次的羅必達法則是有待商榷的。

若仔細觀察與重新整理, 便發現到答案很清楚:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+3\mathrm{e}^x)}{\sqrt{2+3x^2}} &\overset{(\frac{\infty}{\infty},L')}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3\mathrm{e}^x}{2+3\mathrm{e}^x}}{\frac{6x}{2\sqrt{2+3x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2+3\mathrm{e}^x}\cdot\frac{\sqrt{2+3x^2}}{x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{e}^{-x}+3}\sqrt{\frac{2}{x^2}+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{e}^{-x}+3}\cdot\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2}{x^2}+3} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}。\end{aligned}$$

(J2) 羅必達法則可以和極限乘法法則一起使用, 一些和不定型無關的量全部抽出來, 使用羅必達法則的時候不要對它微分:

K20ej5yKnS0

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3} &\overset{(\frac{0}{0},L')}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2} \overset{(\frac{0}{0},L')}{=\!=} \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2x}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6}。\end{aligned}$$

5.5 幾個導數理論的重要結果

這一節將對導數理論做進一步延伸。這裡只是寫了幾個經典的例子, 實際上它的應用層面更廣泛, 各位除了這份講義介紹的內容外, 應多多閱讀其它文獻, 便會發現更多有趣的應用。

5.5.1 對數函數的等級

fWkPto5JvSA

回顧第二章單元 2.5 介紹了無窮大與無窮小的概念, 並列出了幾個基本數列之等級關係:

$$c \ll \ln n \ll n^p (p>0) \ll a^n (a>1) \ll n! \ll n^n, \quad \text{當 } n \to \infty\text{。}$$

這些等級的關係可以過渡到將 n 換成實數 x 並且 $x \to \infty$ 的情況, 只是這個列表中需要重新解釋的是階乘的部份, 數學上會演變成 *伽瑪函數* (Gamma function) $\Gamma(x+1)$。基本上伽瑪函數形成的理由, 主要是希望將階乘這個概念連續化, 這部份的建構必須在了解 *瑕積分* (improper integral) 的理論之後才有辦法說清楚, 這裡先暫時不提。

另一方面, 這裡要補充的是: 當初的列表其實我們一直沒有證明當 $n \to \infty$ 時有 $c \ll \ln n \ll n^p$ 這個關係, 在指數函數的完全認識以及羅必達法則 (L'Hôpital Rule) 的建立後, 我們就可以很快地證明以下結果:

$$\text{對任何 } p>0,\ c \overset{\text{(A)}}{\ll} \ln x \overset{\text{(B)}}{\ll} x^p \text{ 當 } x \to \infty\text{。}$$

(A) 給定任意 $\varepsilon > 0$, 取 $X = 3^{[\![\frac{|c|}{\varepsilon}]\!]+1} \in \mathbb{R}$, 則對所有 $x > X$, 都有

$$x > 3^{[\![\frac{|c|}{\varepsilon}]\!]+1} > 3^{\frac{|c|}{\varepsilon}} > \mathrm{e}^{\frac{|c|}{\varepsilon}} \Rightarrow \ln x > \frac{|c|}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{c}{\ln x}\right| = \frac{|c|}{\ln x} < \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c}{\ln x} = 0$, 即 $c \ll \ln x$ 當 $x \to \infty$。

(B) 由羅必達法則 (L'Hôpital Rule) 得知:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} \overset{(\frac{\infty}{\infty}, L')}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{p \cdot x^{p-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{p \cdot x^p} = 0,$$

因此對任何 $p > 0$, $\ln x \ll x^p$ 當 $x \to \infty$。

5.5.2 反導函數的起源

N6U4BRMRCS8

這裡先介紹兩個看似簡單的推論, 卻關係到積分理論的成形。

定理 1. 若函數 $f(x)$ 在 (a,b) 上滿足 $f'(x) = 0$, 則 $f(x) = c$, 其中 $c \in \mathbb{R}$; 也就是說, $f(x)$ 是一個常數函數。

證明: 對任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 不妨假定 $x_1 < x_2$, 因爲函數 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上連續, 在 (x_1, x_2) 上可微分, 故由均值定理 (Mean Value Theorem) 得知: 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1),$$

因此 $f(x)$ 爲常數函數。任取 $x_0 \in (a,b)$, 記 $c = f(x_0)$, 則在 (a,b) 上 $f(x) = c$。 $\square$

推論 2. 若有兩個可微分函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在區間 (a,b) 上滿足 $f'(x)=g'(x)$, 則 $f(x)=g(x)+c$, 其中 $c\in\mathbb{R}$。

證明: 考慮 $\bar{F}(x)=f(x)-g(x)$, 它在 (a,b) 上是可微分函數, 而且 $\bar{F}'(x)=f'(x)-g'(x)=0$, 由定理 **1** 得知: $\bar{F}(x)=f(x)-g(x)=c$, 其中 $c\in\mathbb{R}$, 因此 $f(x)=g(x)+c$。 □

給定函數 $f(x)$, 這一章主要是在探討導函數 $f'(x)$ 及其理論; 反之, 我們想問: 給定一個函數 $f(x)$, 是否存在一個可微分函數 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$? 如果存在這樣的 $F(x)$, 我們稱之爲 $f(x)$ 的 *反導函數* (anti-derivative)。而 推論 **2** 告知: 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的反導函數, 那麼任何 $F(x)+c$, 其中 $c\in\mathbb{R}$, 都是 $f(x)$ 的反導函數, 所以只要有辦法找到一個關於 $f(x)$ 的反導函數, 就可以立刻得到一族反導函數 (a family of anti-derivative functions)。

這裡應注意的是: 一族反導函數會是以定義域上的一個連通部份 (connected component) 作爲整體。比方說你會在所有的書籍與文獻中看到 $\frac{1}{x}$ 的反導函數是 $\ln|x|+C$, 實際上這個記號應理解成:

$$\ln|x|+C=\begin{cases}\ln|x|+C_1 & \text{若 } x>0\\ \ln|x|+C_2 & \text{若 } x<0,\end{cases}$$

其中 $C_1,C_2\in\mathbb{R}$; 也就是說, 在 $x>0$ 的部份, 會有一族關於 $\frac{1}{x}$ 的反導函數, 在 $x<0$ 的部份, 會有另一族關於 $\frac{1}{x}$ 的反導函數, 它們是彼此獨立的兩族函數, 選用不同的常數作爲參數。

這兩個結果除了和反導函數與積分的理論有關, 我們也可以拿它來證明一些恆等式。數學上存在著許多的恆等式, 在三角函數理論中特別常見, 當中最經典的莫過於 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$。比方說我們可以用微分的方法證明此恆等式: 令 $F(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, 則 $F'(x)=2\sin x\cos x+2\cos x(-\sin x)=0$, 所以 $F(x)$ 爲常數函數, 於是 $F(x)\equiv F(0)=0+1=1$。

pJ9ZjovOIrk

以下再看一個比較不顯然的恆等式。

例 **3.** 試證 $2\tan^{-1}(x)+\sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})=\pi, x\in[1,\infty)$。

證明: 令 $F(x)=2\tan^{-1}(x)+\sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})$, 因爲

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{(1+x^2)2-2x(2x)}{(1+x^2)^2}\\&=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{x^2-1}\cdot\frac{-2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}=0,\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 在 $(1,\infty)$ 是一個常數函數。因爲

$$F(\sqrt{3})=2\tan^{-1}(\sqrt{3})+\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{1+3}\right)=2\tan^{-1}(\sqrt{3})+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi,$$

所以在 $(1,\infty)$ 上 $F(x)=2\tan^{-1}(x)+\sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})=\pi$。

注意到使用定理的時候, 只能得知在開區間上函數爲常數函數, 函數在端點的情況要另外檢查: 直接計算 $F(1)=2\tan^{-1}(1)+\sin^{-1}(1)=2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\pi$, 因此在 $[1,\infty)$ 上 $F(x)=2\tan^{-1}(x)+\sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})=\pi$。 □

5.5.3 導函數的一些限制

若一個函數 $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ 在每一點 $x_0\in(a,b)$ 的導數存在, 那麼對於 $x_0\in(a,b), x_0\mapsto f'(x_0)$ 就會形成函數關係, 我們會用 $f'(x)$ 表示這個函數關係, 稱爲 $f(x)$ 的 導函數 (derivative)。另一方面, 我們曾經對於一個函數的連續性進行討論, 特別是函數的不連續點進行分類。

現在將焦點放在導函數 $f'(x)$, 我們要觀察的是: 對於一個定義在 (a,b) 上的可微分函數 $f(x)$, 它的導函數 $f'(x)$ 的不連續點有一些限制。

cQ3UVJ4AK54

定理 4. 若函數 $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ 的導函數 $f'(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ 處處存在, 則導函數的不連續點類型不可能是跳躍的不連續點。

證明: 假設導函數 $f'(x)$ 在 $x=x_0, x_0\in(a,b)$ 是一個跳躍的不連續點 (jump discontinuity); 也就是說, 導數 $f'(x_0)$ 存在, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 皆存在, 但是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$。
由均值定理 (Mean Value Theorem) 知: 存在 $\xi_h\in(x_0,x_0+h)$ 使得 $f'(\xi_h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, 故

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim_{h\to 0^+} f'(\xi_h)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_+(x_0);$$

此外, 存在 $\bar{\xi}_k\in(x_0+k,x_0)$ 使得 $f'(\bar{\xi}_k)=\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}$, 所以

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x)=\lim_{k\to 0^-} f'(\bar{\xi}_k)=\lim_{k\to 0^-}\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}=f'_-(x_0)。$$

因爲 $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ 矛盾。所以導函數的不連續點不可能是跳躍的不連續點。 □

Bnx6rAUHrEs

與上述討論相關而且也值得類比的是函數

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & 若\ x\neq 0\\ 0 & 若\ x=0,\end{cases}$$

我們在單元 5.2 例 **5** 曾經仔細討論過這個函數的性質, 這裡將結果條列出來:

(A) 若 $x\neq 0$, 則 $f'(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$。

(B) 導數 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$。

(C) 極限 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 不存在。

觀察函數 $f(x)$, 它在閉區間 $[0,x]$ 上連續, 在開區間 $(0,x)$ 上可微分, 由均值定理 (Mean Value Theorem) 得知: 存在 $\xi_x\in(0,x)$ 使得 $f'(\xi_x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$。於是

$$\lim_{x\to 0} f'(\xi_x)=\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0,$$

和 (C) 的結論相比, 極限 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 不存在, 但是當 $x\to 0$ 的過程中, 可以從中找到一些特別的點 ξ_x, 在 $x\to 0$ 的時候 $\xi_x\to 0$, 而且 $f'(\xi_x)\to 0$。

換言之, 這裡把 定理 **4** 與單元 5.2 例 **5** 的函數兩者對照的用意是希望各位能夠看清楚關於 ξ 的討論。定理是先假定了極限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 的存在, 所以在這當中特別選取一些點 ξ_h 滿足當 $h\to 0^+$ 時 $\xi_h \to x_0^+$ 的情況下則有 $\lim\limits_{h\to 0^+} f'(\xi_h)$。而單元 5.2 例 **5** 的例子也可以解釋成: 即使可以找到一些特殊的點 ξ_x, 在 $x\to 0$ 的時候 $\xi_x\to 0$, 而且 $f'(\xi_x)\to 0$, 但是 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不見得存在。

另一個值得提出的是導函數的中間值定理。第四章曾經介紹了有界閉區間上的連續函數必有中間值定理, 那時還特別強調函數必須是連續函數才有此結果。當一個函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間可微分, 也就是導函數 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上處處有定義 (端點只要求單側導數), 這時不需要假設導函數的連續性就可以證明導函數有中間值定理 (因為導數的定義提供了一些訊息在內)。

定理 **5** (導函數中間值定理, Darboux Theorem)**.** *若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微分, 並且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$。*

82-JHf36fzk

(A) *如果 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$, 則存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$。*

(B) *若 C 是介於 $f'_+(a)$ 與 $f'_-(b)$ 之間的任何實數, 則存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=C$。*

證明: 不妨假設 $f'_+(a)>0$ 以及 $f'_-(b)<0$, 另一種情況同理可證。

(A) 因為 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微分, 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上達到最大值。因為

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,\quad f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0,$$

由極限的保號性得知: 所以存在 $\delta_1>0$ 使得對所有 $0<x-a<\delta_1$ 都有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow f(x)-f(a)>0\Rightarrow f(x)>f(a),$$

也存在 $\delta_2>0$ 使得對所有 $-\delta_2<x-b<0$ 都有

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\Rightarrow f(x)-f(b)>0\Rightarrow f(x)>f(b)。$$

這兩件事情告知: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上達到最大值的地方不會發生在端點 $x=a$ 與 $x=b$; 也就是說, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\max\limits_{[a,b]} f(x)$, 故由費馬定理 (Fermat's Theorem) 得知: $f'(\xi)=0$。

(B) 給定 $f'(b)<C<f'(a)$, 考慮函數

$$F(x)=f(x)-Cx,$$

CDACOAry4SY

因為 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微分, 而且 $F'(x)=f'(x)-C$ 滿足 $F'(a)=f'(a)-C>0, F'(b)=f'(b)-C<0$, 所以由 (A) 知: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-C=0$; 也就是說, $f'(\xi)=C$。

□

5.5.4 函數的遞增遞減與凹口

若函數 $f(x)$ 是一個可微分的函數, 那麼就可以用導函數的符號得知函數的單調性。

f-Snx22Tr9U

定理 **6.** 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微分, 則

(A1) 函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上遞增的充分必要條件是對所有 $x \in (a,b)$ 都有 $f'(x) \geq 0$。

(A2) 函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上遞減的充分必要條件是對所有 $x \in (a,b)$ 都有 $f'(x) \leq 0$。

(B1) 若函數 $f(x)$ 對所有 $x \in (a,b)$ 都有 $f'(x) > 0$, 則函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上嚴格遞增。

(B2) 若函數 $f(x)$ 對所有 $x \in (a,b)$ 都有 $f'(x) < 0$, 則函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上嚴格遞減。

證明: 以下只證 (A1) 與 (B1)。對於 (A2) 與 (B2), 只要將證明中對應的符號都變號即可完成。

(A1) $(\Rightarrow)$ 對所有 $x_0 \in (a,b)$, 因爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上遞增, 所以對任何 $x \in [a,b], x \neq x_0$ 都有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0。$$

$(\Leftarrow)$ 給定任兩點 $x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2$, 因爲函數在 $[x_1, x_2]$ 上連續, 在 (x_1, x_2) 上可微分, 由均值定理 (Mean Value Theorem) 得知: 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

所以函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上遞增。

(B1) 給定任兩點 $x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2$, 因爲函數在 $[x_1, x_2]$ 上連續, 在 (x_1, x_2) 上可微分, 由均值定理 (Mean Value Theorem) 得知: 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

所以函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上嚴格遞增。

□

注意到 (B1) 與 (B2) 的逆敘述不一定成立。若從 (A1) 與 (A2) 的證明過程中可發現: 在計算 $f'(x_0)$ 時, 我們需要用到取極限的過程, 就算尚未取極限之前有 $>$ 或是 $<$ 的關係, 然而取極限後終究都只能得到比較弱的不等式 (等號都有可能成立)。又例如 $f(x) = x^3$ 是一個嚴格遞增的函數, 這是因爲對任何 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ 都有

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1)^3 - (x_2)^3 = (x_1 - x_2)((x_1)^2 + x_1x_2 + (x_2)^2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

但是 $f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$, 得知嚴格遞增函數的確可能存在著導數爲零的點。

函數的二階導函數可以幫助我們了解函數圖形的凹口。在說明兩者之間的關係之前, 這裡先給出凸函數的定義。

定義 **7.** 假設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定義,

(A) 若對任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 與 $\lambda \in (0,1)$ 都有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

則稱函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 凸函數 (convex function)。若上述不等式 $\le$ 換成 $<$, 則稱函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 嚴格凸函數 (strictly convex function)。

(B) 若 $-f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函數, 則稱 $f(x)$ 是 凹函數 (concave function)。

nOYbwV9SwvM

記 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ 表示介於 (x_1, x_2) 的一點, 而 $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ 表示將 $f(x_1)$ 與 $f(x_2)$ 進行同樣的比例分配。則凸函數的幾何意義是說: 函數圖形上任兩點連線形成的弦都在函數圖形的上方。

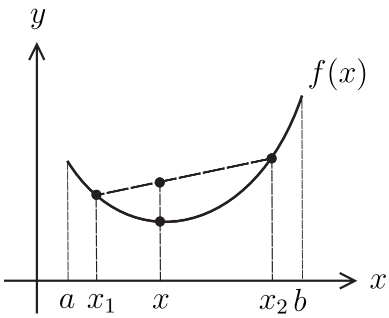

圖 5.1: 凸函數的幾何意義: 任兩點連線所成的弦始終在函數圖形的上方。

注意到凸函數的定義本身是從函數值是否滿足不等式而得, 它並不牽涉到函數是否可以求導, 即使函數有導數不存在的點, 我們仍然可以問它是否爲凸函數。

例 **8.** 證明: 絕對值函數 $f(x) = |x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上是凸函數。

xdpbjflrFGE

證明: 對任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 以及 $\lambda \in (0,1)$, 由三角不等式 (Triangle Inequality) 得知:

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= |\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| \le |\lambda x_1| + |(1-\lambda)x_2| \\ &= |\lambda||x_1| + |1-\lambda||x_2| = \lambda|x_1| + (1-\lambda)|x_2| \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \end{aligned}$$

所以 $f(x) = |x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上是凸函數。 □

例 **9.** 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都是凸函數, 則 $h(x) \overset{\text{記}}{=} f(x) + g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是凸函數。

證明: 對任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 以及 $\lambda \in (0,1)$, 則

$$\begin{aligned} h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + g((\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) \\ &\le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) + \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2) \\ &= \lambda(f(x_1) + g(x_1)) + (1-\lambda)(f(x_2) + g(x_2)) = \lambda h(x_1) + (1-\lambda) h(x_2), \end{aligned}$$

所以 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是凸函數。 □

若函數是可微分的時候, 以下定理給出凸函數的一種刻畫:

定理 10. 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微分, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函數的充分必要條件是 $f'(x)$ 是遞增函數。

nsI8ZuSHQC8

證明: $(\Rightarrow)$ 對任何 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 與 $\lambda \in (0,1)$, 記 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, 因為 $f(x)$ 是凸函數, 故

$$f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \Rightarrow f(x) - f(x_1) \le (1-\lambda)(f(x_2) - f(x_1))$$
$$f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \Rightarrow f(x) - f(x_2) \le -\lambda(f(x_2) - f(x_1)),$$

因為 $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1) > 0$ 以及 $x - x_2 = -\lambda(x_2 - x_1) < 0$, 所以

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{與} \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2},$$

對於第一組不等式取 $x \to x_1$ 左式得可 $f'(x_1)$, 對於第二組不等式取 $x \to x_2$ 右式可得 $f'(x_2)$, 於是

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2)$$

得知 $f'(x)$ 是遞增函數。

$(\Leftarrow)$ 對任何 $x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2$ 以及 $\lambda \in (0,1)$, 記 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, 對於函數 $f(x)$ 分別在 $[x_1, x]$ 以及 $[x, x_2]$ 上使用均值定理 (Mean Value Theorem), 得到存在 $\xi_1 \in (x_1, x)$ 與 $\xi_2 \in (x, x_2)$ 使得

KMuWo4VMfsA

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \Rightarrow f(x) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x - x_1)$$
$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \Rightarrow f(x) - f(x_2) = f'(\xi_2)(x - x_2),$$

現計算

$$\begin{aligned} f(x) - (\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)) &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x) - (\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)) \\ = \lambda(f(x) - f(x_1)) + (1-\lambda)(f(x) - f(x_2)) &= \lambda f'(\xi_1)(x - x_1) + (1-\lambda)f'(\xi_2)(x - x_2), \end{aligned}$$

因為 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, 所以 $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)$ 且 $x - x_2 = -\lambda(x_2 - x_1)$, 又 $f'(x)$ 在 (a,b) 上是遞增函數, 所以

$$\begin{aligned} f(x) - (\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)) &= \lambda f'(\xi_1)(1-\lambda)(x_2 - x_1) - (1-\lambda)f'(\xi_2)\lambda(x_2 - x_1) \\ &= \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)(f'(\xi_1) - f'(\xi_2)) \le 0, \end{aligned}$$

於是 $f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, 因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函數。 □

以下要介紹的是函數圖形的凹口與二階導函數的關係:

定理 11. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上是二階可微分的, 則

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函數的充分必要條件是在 $x \in (a,b)$ 上都有 $f''(x) \ge 0$。

Wmz_MYqnvu4

(B) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上滿足 $f''(x) > 0$, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是嚴格凸函數。

證明: 將 定理 **6** 用在導函數 $f'(x)$ 並結合 定理 **10** 上即可得證。 □

至此, 我們從函數值與割線值的關係定義了凸函數, 然後給出凸函數對於導函數與二階導函數的等價敘述。以下還要再給出另一個等價敘述, 它是在說明凸函數的圖形與任一點切線之間的關係:

定理 12. 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微分, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函數的充分必要條件是對所有 $x_0 \in (a,b)$ 以及 $x \in [a,b]$ 都有

WGOTwsWNiic

$$f(x) \geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)。$$

換言之, 函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函數等價於函數的圖形會在曲線上任一點的切線上方。

證明: $(\Rightarrow)$ 給定 $x_0 \in (a,b)$ 與 $x \in [a,b]$, 先看 $x_0 < x \leq b$ 的情況, 對任意 $\lambda \in (0,1)$, 記 $\bar{x} = \lambda x_0 + (1-\lambda)x$, 由凸函數的定義得知:

9iSIJ1G538E

$$f(\bar{x}) \leq \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x) \Rightarrow f(\bar{x}) - f(x_0) \leq (1-\lambda)(f(x)-f(x_0)),$$

而 $\bar{x} - x_0 = (1-\lambda)(x-x_0) \geq 0$, 所以

$$\frac{f(\bar{x})-f(x_0)}{\bar{x}-x_0} \leq \frac{(1-\lambda)(f(x)-f(x_0))}{(1-\lambda)(x-x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

得到

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\bar{x}\to x_0^+} \frac{f(\bar{x})-f(x_0)}{\bar{x}-x_0} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

於是 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ 在 $x_0 < x \leq b$ 的時候成立。

同理, 在 $a \leq x < x_0$ 的情況, 對任意 $\lambda \in (0,1)$, 記 $\bar{x} = \lambda x + (1-\lambda)x_0$, 由凸函數的定義得知:

$$f(\bar{x}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_0) \Rightarrow f(\bar{x}) - f(x_0) \leq \lambda(f(x)-f(x_0)),$$

而 $\bar{x} - x_0 = \lambda(x-x_0) < 0$, 所以

$$\frac{f(\bar{x})-f(x_0)}{\bar{x}-x_0} \geq \frac{\lambda(f(x)-f(x_0))}{\lambda(x-x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

得到

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\bar{x}\to x_0^-} \frac{f(\bar{x})-f(x_0)}{\bar{x}-x_0} \geq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

於是 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ 在 $a \leq x < x_0$ 的時候成立。

將上述兩結果合併, 得知對所有 $x_0 \in (a,b)$ 以及 $x \in (a,b)$ 都有 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$。

$(\Leftarrow)$ 對任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 不妨假設 $x_1 < x_2$, 以下將證明 $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, 由此得知 $f'(x)$ 是一個遞增函數, 所以由 定理 **10** 得知 $f(x)$ 是一個凸函數。

WdmcljRwtlQ

對於 $x > x_1$, 因為 $f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1)$, 所以 $f'(x_1) \leq \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$; 特別地, 我們有

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}。$$

對於 $x < x_2$, 因為 $f(x) \geq f(x_2) + f'(x_1)(x-x_2)$, 所以 $f'(x_2) \geq \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$; 特別地, 我們有

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

因此 $f'(x_1) \leq f'(x_2)$。 □

5.6 微分

sSo6RLXtkPQ

這一節要以線性代數的語言來詮釋微分的意義。在此之前, 我們先看一個例子:

例 **1.** 討論邊長爲 x 的正方形, 當邊長變成 $x+\Delta x$ 時, 正方形面積改變了多少?

解. 直接計算: 邊長爲 $x+\Delta x$ 與邊長爲 x 的正方形面積相差

$$(x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2。\tag{1}$$

在中學以前寫了這個答案, 老師就會爲你拍拍手、給滿分, 似乎這個問題也沒有什麼好再探究? 實則不然, 微積分就是要從這麼簡單的問題延伸出很多更深刻的數學。

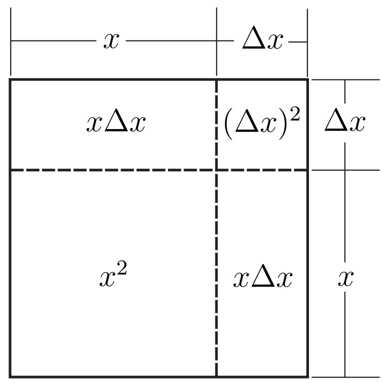

圖 5.1: 邊長從 x 變化爲 $x+\Delta x$ 時, 正方形面積增加的主要部份爲 $2x\Delta x$。

若用圖 5.1 重新觀察式子 (1), 第一項 $2x\Delta x$ 代表左上角與右下角的兩塊長方形面積和, 而第二項 $(\Delta x)^2$ 是右上角的正方形面積, 多出來的這兩個量之間有 等級 (order) 的差別。這裡要討論的等級是指當 $\Delta x \to 0$ 的情況, 也就是說: 當 $\Delta x \to 0$ 時雖然 $2x\Delta x$ 和 $(\Delta x)^2$ 兩者都趨近於零, 但是兩者的關係爲: $(\Delta x)^2 \ll 2x\Delta x$ (當 $\Delta x \to 0$), 用極限表達的話則爲

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^2}{2x\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{2x} = 0,$$

我們會說 $(\Delta x)^2$ 對於 $2x\Delta x$ 而言是 高階無窮小量 (higher order infinitesimal)。於是我們會說:

> 邊長爲 x 與邊長爲 $x+\Delta x$ 的正方形, 在 Δx 很小的時候, 面積主要相差了 $2x\Delta x$, 而 $(\Delta x)^2$ 則是次要的面積誤差量。從 Δx 的角色來說, 我們會說 $2x\Delta x$ 是線性增長量。

另一方面, 觀察函數 $f(x) = x^2$ 在 x 處的導數:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2x + \Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} 2x + \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x = 2x + 0 = 2x, \end{aligned}$$

相較於 (1) 的計算下便發現 (1) 式完全出現在極限式當中分子的地方, 而且 $2x\Delta x$ 當中的 $2x$ 其實是 $f'(x)$ 的意思。而這個現象在一般的可微分函數都成立, 於是我們想要把一個函數的線性增長量用更精確的數學語言表達。既然它是線性增長, 用線性代數的方式描述它是再適合不過了。

這裡簡要地回顧線性代數的理論。考慮向量空間 (vector space) V^n, 取 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 是一組基底 (basis), 現考慮集合 $(V^n)^*$, 它是將所有從向量空間 V^n 映至向量空間 $\mathbb{R}$ 之間的線性泛函 (linear functional) 收集而成的集合; 也就是說, 元素 $F \in (V^n)^*$ 滿足 $F(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$, 其中 $\mathbf{v} \in V^n$, 並且

itqIn6CEQ3I

$$\begin{cases} F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = F(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_2) & \text{對所有 } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V^n \\ F(c\,\mathbf{v}) = c\,F(\mathbf{v}) & \text{對所有 } \mathbf{v} \in V^n \text{ 以及 } c \in \mathbb{R}\text{。} \end{cases}$$

可以驗證: $(V^n)^*$ 滿足向量空間的所有條件。這個空間稱爲 V^n 的 *對偶空間* (dual space)。

既然 $(V^n)^*$ 是一個向量空間, 我們想要寫出 $(V^n)^*$ 的一組基底。定義 $\{\mathbf{f}_i : V^n \to \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ 如下:

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i = j \\ 0 & \text{如果 } i \neq j, \end{cases}$$

以下將驗證: $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ 是對偶空間 $(V^n)^*$ 的一組基底。因爲它是透過 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 而來, 所以 $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ 稱爲 *對偶基底* (dual basis)。

(A) 若 $\sum\limits_{i=1}^n a_i \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$, 對於 $j = 1, 2, \ldots, n$, 兩邊作用 $\mathbf{e}_j$ 之後得到

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{f}_i(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}(\mathbf{e}_j) \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j = 0,$$

所以 $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ 線性獨立。

(B) 對任何線性泛函 $F : V^n \to \mathbb{R}$, 對所有 $\mathbf{v} = \sum\limits_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i \in V^n$, 則

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) &= F\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i F(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n F(\mathbf{e}_i) a_i = \sum_{i=1}^n F(\mathbf{e}_i)\mathbf{f}_i(\mathbf{v}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n F(\mathbf{e}_i)\mathbf{f}_i\right)(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

所以線性泛函 $F : V^n \to \mathbb{R}$ 都可以表示成 $F = \sum\limits_{i=1}^n F(\mathbf{e}_i)\mathbf{f}_i$ 的形式, 即 F 可寫成 $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ 的線性組合。

(C) 綜合 (A) 與 (B) 可得: $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ 是對偶空間 $(V^n)^*$ 的一組基底。

微分 (differential) 這個概念是想要把函數在一點的線性增長量這個線性結構搭配線性代數的語言表示出來, 則得如下定義:

定義 2. 給定可微分函數 $y = f(x)$, 函數 $f(x)$ 在 x 處的 *微分* (differential) $\mathrm{d}y \overset{\text{記}}{=} f'(x)\,\mathrm{d}x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 指的是從向量空間 $V^1 = \mathbb{R}$ 映至向量空間 $\mathbb{R}$ 的一個 *線性泛函* (linear functional), 其中 $V^1 = \mathbb{R}$ 上的基底爲 $\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\}$, 而 $\{\mathrm{d}x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ 是 $\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\}$ 的對偶基底。而 $f'(x)$ 指的是線性泛函 $\mathrm{d}y$ 對於基底 $\{\mathrm{d}x\}$ 表示時的係數。

9zIVNmIWPyg

我們知道: 所有從 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的線性變換 T, 若在 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上呈現其意義, 則 T 會是一條通過原點的直線。現在用圖 5.2 再次解釋微分的意義: 給定可微分函數 $y = f(x)$, 對於一點 x, 微分 $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ 是一個由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的線性變換, 其中定義域 $\mathbb{R}$ 是以 x 的位置當做零向量橫向延伸而得的向量空間, 而對應域 $\mathbb{R}$ 是以 $f(x)$ 的位置當做零向量縱向延伸而得的向量空間。這兩個向量空間的乘積空間 (product space) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 就如圖形中以 $(x, f(x))$ 爲零向量, 灰色軸爲坐標而張開的空間。於是微分 $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ 在圖形上的呈現是函數 $y = f(x)$ 的圖形在 $(x, f(x))$ 的切線。

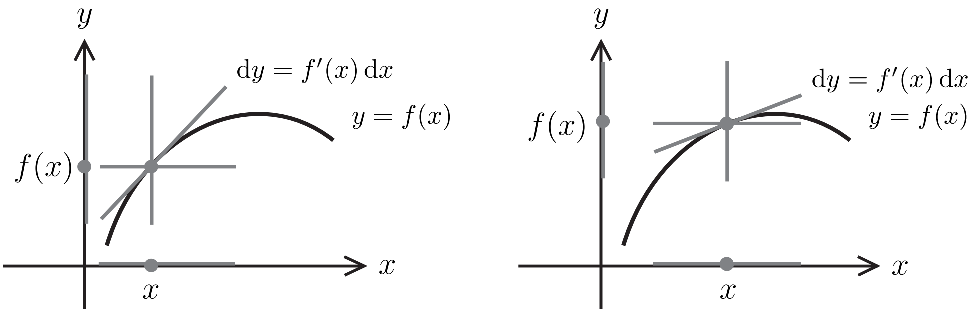

圖 5.2: 微分 $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是在每一個點都指定一個線性泛函。

注意到微分 $\mathrm{d}y$ 是每一點都指定一個線性泛函, 不同的點對到的線性泛函都不同。

5.7 附錄

RdG1BSe5fpQ

本附錄將補充證明初等函數的導函數。

(A) 常數函數的導數處處爲零。

記 $f(x) = c$, 其中 $c \in \mathbb{R}$, 則

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0。$$

(B1) 正弦函數 $\sin x$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 皆可微, 並且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x$。

記 $f(x) = \sin x$, 則

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x。\end{aligned}$$

(B2) 餘弦函數 $\cos x$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 皆可微, 並且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x$。

記 $f(x) = \cos x$, 則

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} -\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x。\end{aligned}$$

(B3) 其它四個三角函數的導函數, 利用求導法則可順勢推得:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x(\cos x)' - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x(1)' - 1(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\tan x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x(1)' - 1(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x\cot x\text{。}
\end{aligned}$$

(C) 反三角函數的導函數利用三角函數的導函數與反函數的導數的結果推得:

tlY5GIJSiJQ

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1} x &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^{-1} x &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cos y} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1} x &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\tan y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot^{-1} x &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cot y} = \frac{1}{-\csc^2 y} = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1} x &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sec y} = \frac{1}{\sec y\cdot\tan y} = \frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc^{-1} x &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\csc y} = \frac{1}{-\csc y\cdot\cot y} = -\frac{1}{\csc y\sqrt{\csc^2 y - 1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\text{。}
\end{aligned}$$

(D1) 對數函數的導函數爲 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a x) = \frac{1}{x\cdot\ln a}$。

GX4OY6QlVz8

記 $f(x) = \log_a x$, 則

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right) = \frac{1}{x}\cdot\log_a \mathrm{e} = \frac{1}{x\cdot\ln a}\text{。}
\end{aligned}$$

(D2) 這裡有一個函數的延拓性必須了解。對數函數 $f(x) = \log_a x$ 的定義域是 $\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$, 現考慮

$$\bar{f}(x) = \log_a|x| = \begin{cases}\log_a x & \text{若 } x>0 \\ \log_a(-x) & \text{若 } x<0,\end{cases}$$

則 $\bar{f}(x) = \log_a|x|$ 的定義域爲 $\mathbb{R}-\{0\}$。此外, 我們可得 $\bar{f}'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a|x| = \frac{1}{x\cdot\ln a}$。特別地, 取 $a = \mathrm{e}$ 則有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x| = \frac{1}{x}$。

EQmRG1b0qbk

(E) 指數函數的導數爲 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = a^x \cdot \ln a$。

利用對數的導函數以及反函數的導數理論可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\log_a y} = \frac{1}{\frac{1}{y\cdot\ln a}} = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a。$$

特別地, 取 $a = \mathrm{e}$ 則有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$。

(F) 冪函數對於 $x > 0, a \in \mathbb{R}$ 的導函數爲 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^a = a \cdot x^{a-1}$。

記 $f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a\ln x}$, 則

$$f'(x) = \mathrm{e}^{a\ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1}。$$