3

實數的完備性

這一章的主要目標是要介紹並證明實數完備性公理的幾個等價敘述。首先我們回顧第 1 章的討論, 那時是從有理數系 $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ 出發, 探討有理數集的切割 (cut) 之最小上界 (supremum) 在有理數中存在與否, 將有理數集再添加許許多多的無理數以擴充成爲實數集 $\mathbb{R}$。然後進一步了解到實數集 $\mathbb{R}$ 可以再賦予加法、乘法與全序的關係, 使得實數集 $\mathbb{R}$ 與有理數集 $\mathbb{Q}$ 兩者都具備有序體 (totally-ordered field) 的結構, 但是從上述的建構過程中得知兩者最大的差別在於實數系 $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, (\mathtt{D}))$ 具有完備性, 而有理數系 $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ 並沒有完備性。

d_pe4gva3fA

目前所認識到的實數完備性是由 (D) 戴德金切割原理或是 (S) 確界原理所陳述:

(D) *戴德金切割原理*: 對於實數集 $\mathbb{R}$ 的任何一個切割 R 之最小上界存在。

(S) *確界原理*: 若一個非空的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 有上界, 則有最小上界; 若一個非空的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 有下界, 則有最大下界。

第 1 章我們已經證明了 (D) $\Leftrightarrow$ (S)。而這一章想要引進另外五個與實數完備性有關的重要敘述, 然後試圖把所有論述串聯起來以證明這五個敘述也可以將實數完備性公理的敘述替換。在歷史的進程中, 這些等價敘述的徹底了解加速了近代數學的發展, 像是偏微分方程理論 (partial differential equations theory)、泛函分析理論 (functional analysis theory) 與測度論 (measure theory) 等。在此先將這一章要證明的敘述條列出來:

(M) *單調有界定理*: 遞增有上界的數列必收斂; 遞減有下界的數列必收斂。

(I) *區間套定理*: 若有閉區間列 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足後一個閉區間包含於前一個閉區間以及閉區間長度的極限爲零這兩個條件時, 則存在唯一實數 $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$。

(F) *有限覆蓋定理*: 有界閉區間的任何一個開覆蓋, 必存在有限個數的子覆蓋。

(W) *數列緊緻性定理*: 有界數列必有收斂的子數列。

(C) *柯西收斂準則*: 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂的充分必要條件是無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列。

單元 3.1 到單元 3.6 將逐一完成 (D) $\xrightarrow{\text{已證}}$ (S) $\Rightarrow$ (M) $\Rightarrow$ (I) $\Rightarrow$ (F) $\Rightarrow$ (W) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (D) 的證明。而單元 3.7 將補充說明柯西收斂準則的一些延伸。至於單元 3.8 將簡介數學理論的推廣與抽象化。

3.1 單調有界定理

這一個單元將從確界原理出發證明單調有界定理。

uCpzTbDl7lo

定理 (單調有界定理, Monotonic Sequence Theorem)**.** 任何單調有界的數列必收斂。換言之, 遞增有上界的數列必收斂; 遞減有下界的數列必收斂。

證明: 首先證明: 遞增有上界的數列必收斂。給定遞增有上界的數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 因爲數列非空, 所以由確界原理 (Supremum Principle) 得知這個數列所成的集合必有最小上界 $\alpha = \sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$。以下將證明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$。

由上確界的定義知道: (A) 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n \leq \alpha$。(B) 對任意正數 $\varepsilon > 0$, 則 $\alpha - \varepsilon$ 不再是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上界, 所以存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\alpha - \varepsilon < a_N$。因爲數列遞增, 所以對所有 $n \geq N$, 都有

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$。

以下證明: 遞減有下界的數列必收斂, 而這部份的論述與上面的討論類似。給定遞減有下界的數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 因爲數列非空, 所以由確界原理 (Supremum Principle) 得知這個數列所成的集合必有最大下界 $\beta = \inf\{b_n\} \in \mathbb{R}$, 以下將證明: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$。

由下確界的定義知道: (A) 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\beta \leq b_n$。(B) 對任意正數 $\varepsilon > 0$, 則 $\beta + \varepsilon$ 不再是 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的下界, 所以存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $b_N < \beta + \varepsilon$。因爲數列遞減, 所以對所有 $n \geq N$, 都有

$$\beta - \varepsilon < \beta \leq b_n \leq b_N < \beta + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < b_n - \beta \leq \varepsilon \Rightarrow |b_n - \beta| < \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$。 □

與單調有界定理相關的幾個討論如下:

(A) 有界數列不一定收斂。例如 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個有界而發散的數列 (詳見單元 2.1 例 **13**)。

(B) 遞增無上界的數列必發散。假設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個遞增無上界的數列, 根據無上界的定義, 對任意 $M > 0$, 總是存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $a_N > M$, 而 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞增得知: 對所有 $n \geq N$ 都有 $a_n \geq a_N > M$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$。同理, 我們也可以得到: 若 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是遞減無下界的數列, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$。

(C) 收斂的數列必有界 (詳見單元 2.2 定理 **8**), 而收斂的數列不見得遞增或遞減, 例如 $\{\frac{(-1)^n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$。

(D) 各位可以重新回顧單元 2.3 的內容, 當時是介紹無窮數列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 並證明遞增有上界, 所以利用單調有界定理得知此數列極限存在, 記 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}$ 爲歐拉數。

(E) 關於實數完備性 (S) 確界定理的敘述爲:「若一個非空的集合 $E \subset R$ 有上界, 則有最小上界。」, 而這個敘述與「若一個非空的集合 $E \subset R$ 有下界, 則有最大下界。」等價。現在所討論的 (M) 單調有界定理「遞增有上界的數列必收斂」與「遞減有下界的數列必收斂」雖然這裡的證明都是透過確界原理證明, 實際上這兩個敘述是等價敘述; 也就是說, 單調有界定理可以只取其中一個敘述, 然後可以證明另一個敘述與之等價。

3.2 區間套定理

這個單元要以單調有界定理出發證明區間套定理。

定理 (區間套定理, Nested Intervals Theorem)**.** *若有閉區間列 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足以下兩個條件:*

Fa5fbdmu8eA

(A) 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$。 (後一個閉區間包含於前一個閉區間。)

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$。 (當 n 愈來愈大時, 閉區間的長度趨近於零。)

則存在唯一實數 $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$。

證明: 觀察數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 因爲 $a_n \le a_{n+1}$, 所以數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞增, 而且對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n \le b_1$, 所以 b_1 是數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上界, 故由單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) 得知數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂; 也就是說, 存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$。由條件 (B) 得知:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n + a_n) = \lim_{n\to\infty}((b_n - a_n) + a_n) &= \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= 0 + \xi = \xi,\end{aligned}$$

於是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

再來要證明 $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$; 也就是說, 以下欲證: $\xi \in [a_n, b_n]$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$。給定 $n \in \mathbb{N}$, 對所有的 $m \ge n$, 都有 $a_n \le a_m \le b_m \le b_n$, 因此對指標讓 $m \to \infty$ 取極限之後則有

$$a_n \le \lim_{m\to\infty} a_m = \xi = \lim_{m\to\infty} b_m \le b_n \Rightarrow \xi \in [a_n, b_n] \Rightarrow \xi \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]。$$

最後要證明唯一性: 假設有另一個實數 $\xi' \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\xi \in [a_n, b_n]$ 與 $\xi' \in [a_n, b_n]$, 於是對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|\xi' - \xi| \le b_n - a_n$, 得到 $|\xi' - \xi| \le \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 因此 $|\xi' - \xi| = 0$, 即 $\xi' = \xi$。 □

這裡注意到我們從證明的過程中得知: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

3.3 有限覆蓋定理

本單元將以區間套定理爲基礎證明有限覆蓋定理。在介紹有限覆蓋定理之前, 應先說明覆蓋的意義。

定義 1. 給定一個區間集 $H = \{J_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 即 H 中的元素 J_α 都是一個區間, 以及給定另一個區間 I。

kLezHwLNouo

(A) 若任何 $x \in I$, 都可以在 H 中找到一個區間 J_α 使得 $x \in J_\alpha$, 則稱 H *覆蓋* (cover) I。

(B) 若 H 中的每個區間 J_α 都是開區間, 而且 H 覆蓋 I, 則稱 H 是一個 *開覆蓋* (open cover)。

(C) 若 H 覆蓋 I, 而且 H 的一個子集合 H' 也覆蓋 I, 則稱 H' 是一種 *子覆蓋* (subcover)。

簡單說來, $H = \{J_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 覆蓋 I 的意思就是 $I \subset \cup_{\alpha\in A} J_\alpha$。

例 **2.** 區間集 $H=\{[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}]\}_{n=1}^{\infty}$ 覆蓋區間 $I=[0,1)$。

解. 觀察區間集 $H=\{[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}]\}_{n=1}^{\infty}$, 給定 $n\in\mathbb{N}$, 則 $[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}]\cup[\frac{n}{n+1},\frac{n+1}{n+2}]=[\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2}]$。所以對任何 $n\in\mathbb{N}$, 則有

$$\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]\cup\cdots\cup\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}\right]=\left[0,\frac{n}{n+1}\right]。$$

欲證明區間集 $H=\{[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}]\}_{n=1}^{\infty}$ 覆蓋區間 $I=[0,1)$, 即證明: $[0,1)\subset\cup_{n=1}^{\infty}[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}]=\cup_{n=1}^{\infty}[0,\frac{n}{n+1}]$。若 $0\le x<1$, 則 $1-x>0$, 由阿基米德性質 (Archimedean Property) 得知: 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $0<\frac{1}{N+1}<1-x$, 於是 $x<1-\frac{1}{N+1}=\frac{N}{N+1}$, 得到 $x\in\cup_{n=1}^{N}[0,\frac{n}{n+1}]\subset\cup_{n=1}^{\infty}[0,\frac{n}{n+1}]$。因此區間集 $H=\{[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}]\}_{n=1}^{\infty}$ 覆蓋區間 $I=[0,1)$。

例 **3.** 區間集 $H=\{(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2})\}_{n=1}^{\infty}$ 覆蓋開區間 $(0,1)$。

Cf02H4CJdE8

解. 觀察區間集 $H=\{(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2})\}_{n=1}^{\infty}$, 給定 $n\in\mathbb{N}$, 則 $(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2})\cup(\frac{(n+1)-1}{n+1},\frac{(n+1)+1}{(n+1)+2})=(\frac{n-1}{n},\frac{n+2}{n+3})$, 得到 $\cup_{k=1}^{n}(\frac{k-1}{k},\frac{k+1}{k+2})=(0,\frac{n+1}{n+2})$。

欲證明區間集 $H=\{(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2})\}_{n=1}^{\infty}$ 覆蓋開區間 $(0,1)$, 即證明: $(0,1)\subset\cup_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2})=\cup_{n=1}^{\infty}(0,\frac{n+1}{n+2})$。給定 $x\in(0,1)$, 則 $0<x<1$, 得到 $1-x>0$, 由阿基米德性質 (Archimedean Property) 得知: 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $0<\frac{1}{N+2}<1-x$, 於是 $x<1-\frac{1}{N+2}=\frac{N+1}{N+2}$, 所以 $x\in\cup_{n=1}^{N}(0,\frac{N+1}{N+2})$, 得到 $x\in\cup_{n=1}^{\infty}(0,\frac{n+1}{n+2})=\cup_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2})$。因此區間集 $H=\{(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2})\}_{n=1}^{\infty}$ 覆蓋開區間 $(0,1)$。

在認識覆蓋的意義之後, 現在要從區間套定理爲基礎, 證明下面的有限覆蓋定理。

定理 (有限覆蓋定理, Heine-Borel Covering Theorem). *有界閉區間的任何一個開覆蓋, 必存在有限個數的子覆蓋。*

DYDIFUQ5Ssk

證明: 利用反證法。假設 $H=\{(\alpha,\beta)\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$ 是區間 $[a,b]$ 的一個無窮開覆蓋, 並且無法從 H 中挑出有限個開區間覆蓋 $[a,b]$。現將 $[a,b]$ 等分成兩個子區間, 那麼至少有一個子區間無法從 H 當中選出有限個開區間覆蓋它, 將這個子區間記爲 $[a_1,b_1]$。將這個子區間 $[a_1,b_1]$ 再等分成兩個子區間, 那麼至少有一個子區間無法從 H 中找到有限個開區間覆蓋它, 將這個子區間記爲 $[a_2,b_2]$。依照這個方法, 我們得到閉區間列 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足以下三個性質:

(A) 對所有 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$。

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$。

(C) 每個 $[a_n,b_n]$ 都無法從 H 中找到有限個數的開區間覆蓋 $[a_n,b_n]$。

由區間套定理 (Nested Intervals Theorem) 得知: 存在唯一 $\xi\in\cap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$。因爲 $\xi\in[a,b]$ 而 H 覆蓋 $[a,b]$, 所以存在某個開區間 $(\overline{\alpha},\overline{\beta})\in H$ 使得 $\xi\in(\overline{\alpha},\overline{\beta})$。

由數列極限的性質知道: 給定 $\varepsilon=\min(\xi-\overline{\alpha},\overline{\beta}-\xi)>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得所有 $n\ge N$ 時, 都有 $\overline{\alpha}<a_n<b_n<\overline{\beta}$; 換言之, 對所有 $n\ge N$ 時, $[a_n,b_n]\subset(\overline{\alpha},\overline{\beta})$。特別地, 對於區間 $[a_N,b_N]$ 來說, 實際上只要用 H 當中的一個開區間 $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ 就可以覆蓋 $[a_N,b_N]$ 了, 這與 (C) 矛盾。因此, 有界閉區間的任何一個開覆蓋, 必存在有限個數的子覆蓋。 □

3.4 數列緊緻性定理

回想無窮數列理論, 我們知道以下兩件事:

vYdV0n9lxc4

(A) 有界的數列不一定收斂, 例如 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界而發散的數列 (詳見單元 2.1 例 **13**)。

(B) 收斂數列的任何子數列必收斂, 並且極限值與原數列的極限值一樣 (詳見單元 2.4 定理 **2**)。

現在想要問的是: 一個有界數列是不是「存在」收斂的子數列? 以下定理告知這件事是對的。

定理 (數列緊緻性定理; 波爾查諾-魏爾斯特拉斯定理, Bolzano-Weierstrass Theorem)**.** 有界數列必存在收斂的子數列。

證明: 利用反證法。假設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個有界數列, 即存在 $m, M \in \mathbb{R}$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都滿足 $m \le a_n \le M$。假設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 沒有收斂的子數列, 也就是說, 任何 $x \in [m, M]$, 在 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 當中都沒有收斂到 x 的子數列。換言之, 每個 $x \in [m, M]$ 都存在包含 x 的開區間, 記爲 $B(x)$, 使得數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一般項又落在 $B(x)$ 當中的個數有限。

考慮 $H = \{B(x) | x \in [m, M]$ 並且數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一般項又落在 $B(x)$ 當中的個數有限$\}$, 則 H 形成閉區間 $[m, M]$ 的一個開覆蓋, 根據有限覆蓋定理 (Heine-Borel Covering Theorem), 存在 H 的有限個數的子覆蓋 $H' = \{B(x_1), B(x_2), \ldots, B(x_N)\}$。因爲 H' 覆蓋了 $[m, M]$, 所以 H' 也覆蓋了數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$。然而, 每個 $B(x_i), i = 1, 2, \ldots, N$ 都只包含 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 當中的有限多項, 得到在 $\cup_{i=1}^{N} B(x_i)$ 中也只有有限多個 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一般項。這與 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個無窮數列矛盾。因此 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 必有收斂的子數列。 □

這個定理告訴我們: 一個有界數列可能不收斂, 也就是原先想要掌控所有 $n \ge N, N \in \mathbb{N}$ 的 a_n 辦不到, 但是可以退而求其次地從中依序找到某一些項而形成子數列, 子數列的行爲可以掌控。

3.5 柯西收斂準則

首先我們給出柯西數列的定義:

tG45sqrA1N4

定義 **1** (柯西數列, Cauchy sequence)**.** 一個無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 若滿足以下條件:

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $m, n \ge N$, 都滿足 $|a_m - a_n| < \varepsilon$,

則稱無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 柯西數列 (Cauchy sequence)。

給定一個數列, 從柯西數列的精確定義中看到, 它是在比較數列中任兩項之差距是否在項數很大之下可以控制, 與數列極限的精確定義相比, 柯西數列的討論不需要建立在有一個基準點 (極限值 L) 的情況下以研究差距。但是相應的難點在於這個誤差要夠小的條件必須是所有的 $m, n \ge N$ 都要成立, 而 m 和 n 都任意表示這是有雙重的自由度都必須控制。

關於柯西數列更詳細的內容會在單元 3.7 說明, 這一節的目標是要從數列緊緻性定理 (Bolzano-Weierstrass Theorem) 爲基礎推得下面要描述的柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion)。

定理 (柯西收斂準則, Cauchy Convergence Criterion). 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂的充分必要條件是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列。

證明: ($\Rightarrow$) 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 即 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足:「存在 $L \in \mathbb{R}$ 使得對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $k \geq N$, 都有 $|a_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$」這個性質, 則對所有 $m, n \geq N$, 利用三角不等式 (triangle inequality), 都有

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| = |a_m - L + L - a_n| &\leq |a_m - L| + |L - a_n| \\ &= |a_m - L| + |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列。

vABIZZhk3q8

($\Leftarrow$) 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列, 即 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足「對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $m, n \geq N$, 都滿足 $|a_n - a_m| < \varepsilon$」這個性質, 首先證明數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 必有界: 取 $\varepsilon = 1 > 0$, 則存在 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $m, n \geq N_0$, 都滿足 $|a_n - a_m| < 1$, 特別選 $m = N_0$, 則對所有 $n \geq N_0$, 都滿足 $|a_n - a_{N_0}| < 1$, 由三角不等式 (triangle inequality) 得知: 對所有 $n \geq N_0$, 都有

$$|a_n| = |a_n - a_{N_0} + a_{N_0}| \leq |a_n - a_{N_0}| + |a_{N_0}| < 1 + |a_{N_0}|,$$

因此, 令 $M = \max(|a_1|, |a_2| \ldots, |a_{N_0-1}|, |a_{N_0}| + 1)$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $|a_n| \leq M$, 因此數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界。

因爲數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 由數列緊緻性定理 (Bolzano-Weierstrass Theorem) 得知: 存在收斂的子數列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 也就是 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$。更明確地說, 以下敘述成立:

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $k \geq K$, 都有 $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$。

以下要證明的是: 數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 並且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$。對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $k_0 = \max(K, N) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq k_0$, 因爲 $k_0 \geq K$, 所以 $|a_{n_{k_0}} - L| < \varepsilon$; 此外, 因爲 $n_{k_0} \geq n_N \geq N$, 所以 $|a_n - a_{n_{k_0}}| < \varepsilon$, 於是

$$|a_n - L| = |a_n - a_{n_{k_0}} + a_{n_{k_0}} - L| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - L| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$。 □

3.6 由柯西收斂準則證明戴德金切割原理

dnvHR8c03DM

這一個單元要證明的是: 從柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 出發證明戴德金切割原理 (Dedekind Cut Principle) 成立。在此簡單說明證明的思路: 任給實數集 $\mathbb{R}$ 的一個切割 R, 要想辦法證明 $\sup(R)$ 的存在性; 也就是說, 我們想要在實數集 $\mathbb{R}$ 上設法造出柯西數列, 根據柯西收斂準則得知數列收斂, 再進一步證明數列的極限值即爲切割的最小上界。

當我們把這個定理證明完畢之後, 這樣就可以確定前面幾個單元所描述的定理都是實數完備性公理的等價敘述, 所以各位可能會在不同的文獻或書籍中看到作者使用前面所說的任何一種方法詮釋實數的建構與完備性。

定理. 由柯西收斂準則可推得戴德金切割原理。

證明: 任給實數集 $\mathbb{R}$ 的一個切割 R, 現在要證明的是 R 的最小上界存在。因爲 $R \neq \emptyset$, 所以在 R 中存在一元素記爲 a_1, 因爲 $R' \overset{\text{記}}{=} \mathbb{R} - R \neq \emptyset$, 所以在 R' 中存在一元素記爲 b_1。由此開始構造出數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如下: 對於 $n \in \mathbb{N}$,

- 若 $\frac{a_n+b_n}{2} \in R$, 記 $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = b_n$。
- 若 $\frac{a_n+b_n}{2} \in R'$, 記 $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$。

這樣建構出的數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足以下兩個性質:

(A) 對所有 $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in R$ 且 $b_n \in R'$。

(B) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都是柯西數列: 這是因爲對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{b_1-a_1}{2^{N-1}} < \varepsilon$, 對於 $m, n \in \mathbb{N}$ 滿足 $m, n \geq N$, 都有 $|a_m - a_n| \leq |b_N - a_N| \leq \frac{b_1-a_1}{2^{N-1}} < \varepsilon$。同理 $|b_m - b_n| \leq |b_N - a_N| \leq \frac{b_1-a_1}{2^{N-1}} < \varepsilon$。

注意到上述 N 的存在性應避免直接使用實數版本的阿基米德性質, 而是要從實數的稠密性出發, 存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $0 < r < \frac{\varepsilon}{b_1-a_1}$, 記 $r = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, (p,q) = 1$, 由此找到 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{b_1-a_1}{2^{N-1}} < \varepsilon$。

由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知: 數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都收斂。記 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$。實際上 $a = b$, 這是因爲

$$|b - a| \leq |b - b_n| + |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |b - b_n| + \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} + |a_n - a|,$$

得到

$$|b - a| \leq \lim_{n\to\infty} |b - b_n| + \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} + \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0 + 0 + 0 = 0,$$

所以 $a = b$。

記 $\alpha = a = b$, 現在要證明 $\sup R = \alpha$。

OWBGKGmjvcQ

(A) <u>α 是切割 R 的一個上界</u>: 假設 α 不是切割 R 的一個上界, 則存在 $\overline{a} \in R$ 使得 $\alpha < \overline{a}$, 記 $\varepsilon = \overline{a} - \alpha > 0$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$, 所以對於 $\varepsilon = \overline{a} - \alpha > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得所有 $n \geq N$ 都有 $|b_n - \alpha| < \varepsilon$, 得到 $b_n < \alpha + \varepsilon = \overline{a}$, 因爲 $\overline{a} \in R$, 由切割的定義得知對所有 $n \geq \mathbb{N}$ 都有 $b_n \in R$, 這件事與 $b_n \in R'$ 矛盾。所以 α 是 R 的一個上界。

(B) <u>比 α 小的任何實數都不是 R 的一個上界</u>: 對所有 $M' \in \mathbb{R}$ 且 $M' < \alpha$, 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, 考慮 $\varepsilon = \alpha - M' > 0$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, 得到對所有 $n \geq N$ 都有 $M' = \alpha - \varepsilon < a_n$, 所以 M' 不是 R 的上界。

由上討論可知: 任何實數集 $\mathbb{R}$ 的切割 R 之最小上界存在。 □

至此, 我們終於把 (D) ⇒ (S) ⇒ (M) ⇒ (I) ⇒ (F) ⇒ (W) ⇒ (C) ⇒ (D) 全部證明完畢。

3.7 與柯西數列相關的討論

mhnrr3Dp-D4

不曉得各位在一開始學數列極限的精確定義時, 心中是否曾經浮現著一種怪怪的感覺, 這個感覺來自於因爲我們先學過微積分了, 所以收斂數列的極限值的求得是透過當時微積分老師告訴你如何操作然後生出一個答案, 然後到高等微積分的時候, 就拿著這種 ε-N 語言 (ε-N language) 以馬後炮的方式去說這個無窮數列與給定的值之間有一層在微積分老師口中所說的「愈來愈靠近」的關係。這個奇怪的感覺在於: 我們怎麼會有一種先見之明, 先知道極限值, 然後再反過來證明數列的收斂? 然後在操作極限的過程中, 又默許著某些數列滿足精確定義而得到結果。

觀察柯西數列所給的條件, 它純粹就是在討論數列任兩項的差距是否能有一個控制, 而不是先給出一個數 (極限值) 然後再討論數列每一項與該極限值的差距是否能夠控制; 也就是說, 給定一個無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 我們就可以直接問它是否爲柯西數列, 只要確定它是柯西數列, 那麼由柯西收斂準則得知這個無窮數列收斂, 即存在 $L \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$。從這樣的觀點出發, 就可以免除掉原先討論數列極限的精確定義時, 必須先知道極限值然後又要再證數列收斂看似多此一舉的怪異現象。

對於一個複雜的無窮數列, 很有可能無法透過現有的計算能力先把極限值 $L \in \mathbb{R}$ 求得 (要把一個數列的極限值算出來, 這是技術層面的問題), 再用數列極限的精確定義去論述這個無窮數列是收斂的。然而, 柯西收斂準則避免了預先知道 L 是什麼才去驗證數列的收斂性。以下要介紹的三個例子, 都是利用柯西數列準則的方式來證明數列收斂或發散。首先回顧數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列 (Cauchy sequence) 的精確定義:

$$\text{對任意 } \varepsilon > 0, \text{ 存在 } N \in \mathbb{N} \text{ 使得對所有 } m, n \geq N, \text{ 都滿足 } |a_m - a_n| < \varepsilon\text{。}$$

ISDfAaPNkUQ

例 **1.** 討論無窮數列

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

的收斂性。

解. 對於 $m, n \in \mathbb{N}$, 不妨設 $m > n$, 計算

$$\begin{aligned}
|s_m - s_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\sin m}{m^2}\right| \\
&\leq \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}\right| + \left|\frac{\sin(n+2)}{(n+2)^2}\right| + \cdots + \left|\frac{\sin m}{m^2}\right| \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \\
&\leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

由上述分析得知: 對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1 \in \mathbb{N}$, 則對所有 $m > n \geq N$, 都有 $m > n \geq N = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, 即 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 於是對所有 $m > n \geq N$, 都有

$$|s_m - s_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

故由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知無窮數列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂。

現在將 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是柯西數列的精確定義寫出來:

$$\text{存在 } \varepsilon_0 > 0, \text{ 對任何 } N \in \mathbb{N}, \text{ 存在 } m_0, n_0 \geq N \text{ 使得 } |a_{m_0} - a_{n_0}| \geq \varepsilon_0。$$

在上述精確定義中, 注意到 $m_0 = m_0(N)$ 與 $n_0 = n_0(N)$, 意思是說 m_0 和 n_0 的選取都與指定的 N 有關。當我們確定數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是柯西數列, 則柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 告知數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。

例 **2.** 討論無窮數列

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

的收斂性。

解**.** 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$, 對任何 $N \in \mathbb{N}$, 取 $n_0 = N, m_0 = 2N$, 則

$$\begin{aligned}|s_{m_0} - s_{n_0}| = |s_{2N} - s_N| &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{N+N} \\ &\geq \frac{1}{N+N} + \frac{1}{N+N} + \cdots + \frac{1}{N+N} = \frac{N}{N+N} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0,\end{aligned}$$

故由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知數列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。

如果各位在微積分課程中有認真學習的話, 應該會發現到上述的兩個數列實際上是在研究 無窮級數 (infinite series) 的收斂或發散。無窮級數在概念上是希望把無窮數列的所有數字全部加起來, 然而我們不可能真的把所有數字加總, 取而代之的是去研究 部份和數列 (partial sum) 的收斂性。給定一個無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 可以得到部份和數列, 它是指 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 也就是將數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的前面 n 項加總而得到的數列。部份和數列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有意義的, 因爲有限個數字總是可以確實地加總完成, 這也是爲什麼在前兩個例子中將數列的符號寫成 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以區分原無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的原因。若部份和數列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 我們會用記號 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 表示無窮級數是收斂的; 若 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散, 則稱無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 發散。

無窮級數的收斂與發散理論又是另一個豐富且多元的內容, 在往後數學發展的層面非常廣泛, 它關係到函數的泰勒級數 (Taylor series)、傅立葉級數 (Fourier series) 等理論的完整性。這些級數還有函數項級數的理論將在第 8 章與第 9 章討論。

另一方面, 經過上面兩個例子的討論後, 我想大家應該可以體會到的事情是: 在很多情況下我們是無法先知道數列的極限值, 然後才去驗證數列的收斂性。就以 例 **1** 來說, 這個級數收斂到哪一個真正的實數其實是不得而知的, 這裡所謂的不得而知是指它的收斂結果並不是有理數 $\frac{p}{q}$ 也不是我們常見可以寫得出來的無理數 (像是 $\sqrt{2}$), 所以若真要表示它的收斂值, 我們也只能用一個新的符號 (比方說 α 好了) 表示它。取而代之的是, 我們用柯西數列的討論, 則有辦法確實估計數列中任兩項的差以得知數列的收斂性。

以下我們再介紹一個用柯西數列討論數列收斂的例子, 當數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 只是用前後項之間的不等式描述時, 這個數列不可能先知道極限值, 所以只能探討它是否爲柯西數列的方式論證它。

xvs-pSOY_7w

例 **3.** 考慮無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 若存在一個常數 $k \in (0,1)$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 而且 $n \geq 2$, 都有

$$|a_{n+1} - a_n| \leq k|a_n - a_{n-1}|, \tag{1}$$

試證: 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂。

證明: 首先觀察

$$|a_{n+1} - a_n| \leq k|a_n - a_{n-1}| \leq k^2|a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \cdots \leq k^{n-1}|a_2 - a_1|,$$

假設 $m, n \in \mathbb{N}$ 且 $m > n$, 則

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq k^{m-2}|a_2 - a_1| + k^{m-3}|a_2 - a_1| + \cdots + k^{n-1}|a_2 - a_1| \\
&= (k^{m-2} + k^{m-3} + \cdots + k^{n-1})|a_2 - a_1| < \frac{k^{n-1}}{1-k}|a_2 - a_1|,
\end{aligned}$$

注意到 $k \in (0,1)$ 與 $|a_2 - a_1|$ 都是固定的數, 因爲

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^{n-1}}{1-k}|a_2 - a_1| = \lim_{n\to\infty} k^{n-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_2 - a_1|}{1-k} = 0 \cdot \frac{|a_2 - a_1|}{1-k} = 0,$$

所以對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_m - a_n| \leq \frac{k^{n-1}}{1-k}|a_2 - a_1| < \varepsilon$, 進而得知 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列, 於是無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂。 □

關於 例 **3** 的 (1) 式要描述的數列現象, 我們會說它是一種 *收縮映射* (contraction mapping), 其中 k 值稱爲 *收縮因子* (contraction factor)。收縮映射的理論會在微分方程 (differential equations)、泛函分析 (functional analysis)、動態系統 (dynamical system theory)...... 等有很重要的應用, 若各位有機會接觸到這些理論時, 記得把這個例子再拿出來好好體會。

3.8 理論的推廣與抽象化

xZBlLbMQ3eg

當一個數學理論建立出一套完整的架構之後, 數學家並不會因此而滿足, 而是會去思考這個理論有沒有辦法推廣 (generalize) 它。所謂的推廣有很多層面可以進行, 但大體上來說是想要重新檢視該理論當中的每一個敘述, 觀察哪些敘述變得沒有意義, 哪些東西非得保留, 而哪些東西是可以進行替換, 而且在替換的過程可以讓這個理論當中每個事物的屬性區分地更清楚, 或是可適用的範圍更廣。至於該替換什麼東西, 或是該替換成什麼東西, 現以實數完備性公理的七個等價敘述爲例, 指出哪些是在數學上可進行的推廣, 並稍加說明這些推廣會有什麼後續的演變。

在此我們重述一次實數系 $\mathbb{R}$, 它是指帶有以下任何一個條件 (稱爲完備性公設) 的有序體:

(D) *戴德金切割原理*: 對於實數集 $\mathbb{R}$ 的任何一個切割 R 之最小上界存在。

(S) *確界原理*: 若一個非空的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 有上界, 則有最小上界; 若一個非空的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 有下界, 則有最大下界。

(M) 單調有界定理: 遞增有上界的數列必收斂; 遞減有下界的數列必收斂。

(I) 區間套定理: 若有閉區間列 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足後一個閉區間包含於前一個閉區間以及閉區間長度的極限爲零這兩個條件時, 則存在唯一實數 $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, 並且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

(F) 有限覆蓋定理: 有界閉區間的任何一個開覆蓋, 必存在有限個數的子覆蓋。

(W) 數列緊緻性定理: 有界數列必有收斂的子數列。

(C) 柯西收斂準則: 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂的充分必要條件是無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列。

在這一章的前幾個單元所得到的結論是: 在實數系下所有敘述彼此等價。現在我們要問的是: 當集合不再是實數系時, 那麼這些敘述當中哪些仍舊有意義? 哪些需要重新解釋? 除此以外, 哪些敘述仍然會互相等價? 哪些概念就不一樣了?

通常一種最直接的推廣是關於 *維度* (dimension) 的探討, 也就是問一個理論是否會依賴於維度的限制? 所謂的維度, 這裡不妨從線性代數的眼光看待之, 則實數系 $(\mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 可視爲一維內積空間 (one-dimensional inner product space), 它可以用一個向量張出 (span) 整個實數系, 而當中的內積可幫助我們了解向量的長度或兩向量的差別, 進而內積也可以度量兩點之間的距離。現在我們試圖把研究的主體替換成 N-維歐氏空間 $(\mathbb{R}^N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, 此時這些敘述會發生什麼現象呢?

(A) 敘述 (D) (S) (M) 似乎變得沒有意義, 因爲這三個敘述當中強烈用到 $\mathbb{R}$ 是 *有序體* (totally-ordered field) 的概念。更清楚地說, 關於 (D) 當中的切割、(S) 當中的最小上界、(M) 的遞增或遞減等概念, 是建立在實數系 $\mathbb{R}$ 中任兩個元素都可以比大小的情況下才能探討。當我們把集合替換成 $\mathbb{R}^N$ 時, 若要真的給出 $\mathbb{R}^N$ 中任兩元素 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ 與 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ 的大小關係就變得棘手。這裡應解釋清楚的是, 雖然內積空間 $\mathbb{R}^N$ 中的元素(向量) 可以賦予長度的意義, 比方說 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle} = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_N)^2}$, 而我們能夠比大小的是向量的「長度」, 長度是一個 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 的映射關係, 因爲對應域是實數 $\mathbb{R}$, 所以向量長度可以比大小, 然而定義域 $\mathbb{R}^N$ 的全序關係還要滿足 (O1) 到 (O4) 的條件就需要仔細思量。

(B) 敘述 (I) 的內容, 可以轉變成閉方塊列 $\{I_n = [a_{1n}, b_{1n}] \times [a_{2n}, b_{2n}] \times \cdots \times [a_{Nn}, b_{Nn}]\}_{n=1}^{\infty}$ 之間有包含的關係, 而閉方塊的最大寬度 $\max(|b_{1n} - a_{1n}|, |b_{2n} - a_{2n}|, \ldots, |b_{Nn} - a_{Nn}|)$ 趨近於零的情況下, 那麼可以試著證明區間套定理的性質也成立。

(C) 至於 (F) 的敘述也有機會將它推廣到 $\mathbb{R}^N$, 只要我們定義清楚什麼是 *開集合* (open set) 與 *閉集合* (closed set), 而覆蓋的想法是利用集合論當中的包含關係就可以定義清楚, 也就是說覆蓋這個概念和空間的維度無關。

(D) 關於 (W) 的敘述, 在 $(\mathbb{R}^N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中也可以研究數列 $\{\mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{Nn})\}_{n=1}^{\infty}$, 數列的有界性可利用 $\|\mathbf{a}_n\| \le M$ 來解釋, 而內積與長度的計算也可以進一步轉化成計算兩點之間的距離, 於是我們也可以討論數列的收斂性, 例如 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{L}$ 定義成 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{a}_n - \mathbf{L}\| = 0$。

(E) 從上面的討論, 關於 (C) 的敘述中, 若要重新定義柯西數列看起來也是沒有問題的; 也就是說, 數列 $\{\mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{Nn})\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| = 0$ 稱爲柯西數列。

8uklBJ3pTbE

上述討論得知對於 $\mathbb{R}^N$ 來說, 在 (I) (F) (W) (C) 可以重新詮釋之下, 通常會採用柯西數列的敘述重新定義空間的完備性, 而日後在探討高維度歐氏空間 $\mathbb{R}^N$ 的理論時, 可證明一個封閉 (closed) 且有界 (bounded) 的集合等價於該集合有數列緊緻性 (sequentially compact) 也等價於這個集合是緊緻集 (compact set), 也就是將 (I) (F) (W) 這三個概念再進行整合, 它們是在描述實數有界閉區間所具有的性質。

除了把維度從 $\mathbb{R}$ 變成 $\mathbb{R}^N$ 之外, 還可以做什麼樣的推廣呢? 不曉得各位有沒有發現到, 上述的討論雖然仰賴著 $\mathbb{R}^N$ 中的內積結構過渡到可以計算向量長度還有兩點之間的距離, 由此定義數列的收斂, 但是再仔細想想就會知道: 我們只要有「空間中任兩點可以量距離」的想法就可以討論問題, 距離不見得要從內積而來。於是, 數學家試圖從這個觀點去蕪存菁 (這就是一種抽象化的過程) 得到賦距空間 (metric space) 的概念:

定義 **1.** 給定非空集合 X, 若能定義 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 滿足以下三個條件:

(A) 對所有 $x, y \in X$ 都有 $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ 若且唯若 $x = y$。 (距離非負與零值唯一性)

(B) 對所有 $x, y \in X$ 都有 $d(x, y) = d(y, x)$。 (對稱性)

(C) 對所有 $x, y, z \in X$ 都有 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$。 (三角不等式)

則稱 (X, d) 是一個 *賦距空間* (metric space), 其中 d 稱為集合 X 的 *度量* (metric)。

這麼一來, 原先在 $\mathbb{R}^N$ 中利用內積才能定義距離的概念, 就可以轉化成在集合 X 上直接用度量 d 來討論, 而且這時候 X 不見得是要勻稱的歐氏空間, 它可以是很隨意的非空集合, 度量的定義方式也有很多彈性的選擇, 只要滿足上述所說的條件就可以討論問題。於是日後的數學分析理論, 將會以賦距空間為主體, 藉由柯西收斂準則的概念定義度量空間的完備性, 然後再介紹緊緻性或數列緊緻性等概念以證明相關的等價敘述, 這就是另一種抽象化的過程。

另一方面, 關於 (F) 的敘述方式牽涉到開集合與閉集合的概念, 在數學的發展中, 這個想法將轉變成為 *拓樸學* (topology) 的範疇, 只要約定好開集合與閉集合是什麼, 就可以定義 *拓樸空間* (topological space), 然後就可以討論覆蓋 (covering) 的概念, 在那個領域當中又會用更為抽象的方式詮釋各種現象。

kB7pkzMVbMI

最後, 各位若有機會研究泛函分析 (functional analysis) 的理論時, 就會知道泛函分析主要是在討論無窮維向量空間 (infinite dimensional vector space) 之理論, 例如很多的函數空間其實也具有向量空間(甚至是內積空間) 的結構, 但是當討論的主體變成函數空間時, 函數空間不再是有限維, 所以泛函分析又是一個更高層次的理論。在泛函分析理論中, 首先也可以知道無窮維內積空間也是一種賦距空間, 而賦距空間的緊緻性 (compact) 會與「完備性 (complete) 和完全有界性 (totally bounded)」等價, 而在這個觀點來看, 所有事物又會再分道揚鑣了 (在有限維空間中, 有界與完全有界等價)。

各位讀到這裡不需要感到昏頭, 若你真的有志從事數學研究時, 那就必須好好分清楚這一節文字中的所有事情。對於高等微積分的初學者來說, 我認為此時還是先以一切實際化為主, 將以前在微積分課學到的所有事物利用極限的精確語言重新理解一次, 行有餘力再逐步跳脫出框架外, 看看抽象化的意涵。