2

數列的極限理論

這一章的主要目標是要介紹數學分析最基礎的概念: 極限。本講義的編排是從無窮數列作爲研究主體引進數列極限的精確定義 (ε-N language), 在介紹的過程中, 除了盡可能從數學、生活、遊戲等面向解釋極限的概念外, 關於極限的數學操作也有許多技巧與細節必須考量, 這些內容都會在單元 2.1 說明。而單元 2.2 將統整並證明收斂數列的一般性質, 當中包括極限的四則運算以及夾擠定理的認識。

JWV8ByuCI7w

至於單元 2.3 將探討一類特殊的數列: 單調數列。介紹單調數列的用意有二, 首先, 單調有界數列則極限存在這件事與實數的完備性有關, 這裡是先做一個概略性的介紹, 實數完備性相關的理論將會在第 3 章仔細討論。此外, 透過單調有界定理, 我們可以從某個單調有界的數列定義高等數學中非常重要的常數 — 歐拉數 (Euler number) e 。

有時候一個數列的行爲並不容易分析, 但是依序觀察這個數列某些特別的項會有很好的現象, 從子數列的行爲判斷或推測原數列是否極限存在也是一門學問, 在單元 2.4 會介紹幾個相關的定理。至於單元 2.5 要引進無窮小與無窮大的概念, 這部份的內容與等級 (order) 息息相關, 該單元也會證明幾個標準類型的等級列表。現階段或許各位還不太清楚無窮小與無窮大和等級的實質應用, 但等級的原理與極限問題的討論甚至往後數學分析理論像是瑕積分的收斂發散、級數與函數項級數的收斂發散問題高度相關, 這部份可以說是數學分析的靈魂。

本講義會先以無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲主而非直接討論函數的極限有幾個用意, 一來是在教學的經驗中, 初學者多半對於數列極限的接受度比函數極限的接受度來得高, 這是因爲數列的指標 n 可以想成是動態的變化, 有如時間一分一秒地經過, 而相應的數字 a_n 可以標註在實數軸上, 所以用這種方式比較容易想像數列的行爲。相較於函數的極限, 它牽涉到函數 $y = f(x)$ 的圖形當中兩個變量之間的關係, 而且函數的極限又分成左極限、右極限, 另有函數在無窮遠處的極限, 情況比較複雜, 雖然這些內容原理相同, 定義方式大同小異, 但對初學者來說容易失焦, 故而從數列的極限開始討論比較單純。二來, 我們可從數列的極限理論將所有實數完備性的理論整體介紹, 若各位有志從事數學研究的話, 可從這些實數完備性的等價敘述繼續延伸, 便會看到高等數學的各種面向。

最後附帶一提的是: 這一章關於數列的極限理論, 都是基於知道極限值是多少而討論其精確定義以及相關性質。在第 3 章會提到另一個觀點: 柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion), 它是在不知道極限值的情況下, 直接從數列本身的屬性判定數列是收斂或是發散, 而柯西收斂準則其實也是實數完備性的一環, 所以各位到時候必須把第 3 章與柯西收斂準則有關的討論與這一章再做一個結合以對數列極限有更完整地認識。

2.1 數列極限的精確定義

ibmLH2ntQy0

這裡直接開門見山給出無窮數列的定義:

定義 1. 無窮數列 (infinite sequence) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 指的是一串實數依序排列; 換言之, 它其實是指

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \tag{1}$$

其中對每個 $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$。此時 a_n 稱爲無窮數列的 第 n 項 (n-th term)。

因爲正整數 $1, 2, 3, \ldots$ 是一組有順序排列的數字, 所以無窮數列的記號中, 我們使用了正整數作爲 指標 (index), 以正整數的編號告知這串數字的順序關係。這裡我們感興趣的是無窮數列; 也就是說, 這串數字將永無止盡地排列下去, 在 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 記號的右上端會用 ∞ 表示這個現象, 而在 (1) 的表達中, 則會在 a_n 的後面加上點點點「$\ldots$」以明確指出數列無止盡排列的現象。文章中在不引起混淆的情況下, 有時只會用數列二字表示無窮數列。關於上述定義其實寫得較爲口語, 若想把無窮數列的概念再說明清楚, 則它是指定義域爲正整數集合 $\mathbb{N}$ 的一個函數 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, 其中 $a_n = f(n)$。

有時候一個無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 會有一些現象, 想像下標的 n 代表第 n 秒, 而 a_n 這個數字就是在第 n 秒的時候標記在實數軸上的一個點, 於是像 $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ 這個數列來說應該很容易感受到當時間一分一秒地過去, 標記的那些點「愈來愈靠近 0」, 而 $\{\frac{(-1)^n}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots\}$ 這串數字雖然在 0 的左右跳來跳去, 但這串數字好像也有「愈來愈靠近 0」的趨勢。再舉一例, 像 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\}$ 這個數列的行爲也很淸楚, 就是當 n 變動時, 數列在 -1 和 1 反覆跳動, 但是這個數列似乎不會和任何一個數有接近的感覺。

N59jGpWm85M

在數列的理論中, 我們感興趣的是具有「和某個數字愈來愈接近」這個性質的數列, 但是這句話要用數學語言確實地描述它, 在一百多年前的人們總是說不淸楚這件事, 一直到柯西 (Cauchy) 提出了像下段文字要闡述的觀點後, 大家才逐漸體會到這層奧義, 也開始接受以下對於數列的行爲之說詞。

在述說數列極限的精確定義之前, 我想先提一個各位可能在生活中曾經遇到的事情: 比方說兩位同學的老家一個住台北另一個住台中, 彼此聊天提到家鄉時會覺得兩地隔很遠, 但對於在美國長大的人來說, 當你跟他介紹台北和台中這兩座城市時, 他們會覺得台北和台中很近, 這是因爲美國地大物博, 兩座大城市之間就算搭飛機也要兩、三個小時才會到達, 而台北到台中卻有著不到五十分鐘就可以抵達的高鐵, 以每個人的生活經驗去感受距離時, 彼此之間就有明顯地落差。另一個例子是: 對於一個心儀的對象, 明明每天在校園間擦身而過, 但卻產生世界上最遙遠的距離......。

對某個人來說兩個東西很近但是在其他人的眼裡並不覺得很近, 這就造成認知上的不同。於是在討論問題時應該要先有一個默契, 也就是在事前彼此先講好: 到底怎樣叫做「很近」。換句話說, 一開始先給出一個正數, 記爲 ε (epsilon, 它是某個希臘字母), 然後約定: 兩個數之距離如果小於 ε 的話, 那麼我們就認定它們很接近。有了這樣的概念之後, 就可以將無窮數列極限的精確定義寫出來了:

定義 2 (數列極限的精確定義, ε-N language)**.** 給定無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 若以下語句成立:

$$\text{存在 } L \in \mathbb{R}\text{, 對任意 } \varepsilon > 0\text{, 存在 } N \in \mathbb{N} \text{ 使得對所有的 } n \geq N\text{, 都有 } |a_n - L| < \varepsilon,$$

則稱無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 收斂的 (convergent), 此時 L 稱爲無窮數列的 極限 (limit), 記號上會用 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 表示。如果沒有一個實數滿足上述後面的語句, 則稱無窮數列是 發散的 (divergent)。

若重新考察無窮數列極限的精確定義, 便會發現到: 在 *定義* **2** 之前的文字說明其實只解釋了一部份, 也就是在理解極限定義時, 首先要感受的是約定好「很近」的意義, 在彼此可接受的誤差範圍 ε 下, 然後去研究無窮數列是否在某一項之後的所有項與某個特定值 L 的差距都在誤差範圍內。實際上這個定義中還有兩個重要的邏輯用語: 任意(所有)、存在。極限的定義必須經過重重考驗, 比方說一個研究天文的人會覺得兩星球之間只有十光年是很近的, 當他拿著天文望遠鏡看事情的時候, 心中的 ε 是很寬鬆的; 相較於一般人用肉眼看事情時, 在視線範圍內的兩物體才覺得很近, 這時選用的 ε 就會比較嚴格; 若你是拿顯微鏡進行觀察時, 相差不到一毫米的距離可能就超出觀察的範圍了。定義中「對任意 $\varepsilon > 0$」的「任意」兩字就是在強調數列不論是在寬鬆或是嚴格的關卡下「都能經過考驗」, 所謂都能經過考驗, 指的是 N 的存在性; 至於每一次的考驗, 並不是要求數列的每一項都要達標, 只要檢查第 N 項之後的每一項即可, 前面 $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$ 這些數字完全不必理會。

xAzaw4s69OU

這裡各位可以重新回顧單元 0.3 的說明, 當中曾經介紹高等微積分的特色是一門利用不等式處理等式的學問, 而且也證明兩個數「$A = B$」的等價敘述爲「對任意 $\varepsilon > 0$, 都有 $|A - B| < \varepsilon$」。所以在極限精確定義當中最前面與最後面的語句就是在試圖說明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 這個數字與 L 這個數字兩者畫上等號的意義。只是現在的過程稍微再複雜一些, 因爲它還多了一個參數 n 在內, 所以這裡是要研究無限多個數字與 L 之間的關係。注意到: 我們並不是要求 a_n 和 L 一模一樣 (除了常數數列, 其它數列的每一項都不可能總是和 L 完全相同), 而是約定好夠靠近的程度 $\varepsilon > 0$ 之下, 可以確定數列在第 N 項之後的每個 a_n 與 L 之間的距離的確很近。

學會極限的精確定義是了解高等微積分與數學分析的第一步, 往後的所有討論都脫離不了這種論述方式, 所以各位務必要學得精熟。而現在這個階段, 我們先熟悉極限精確語句的後段論述; 也就是說, 基於微積分所學到的各種極限計算技巧, 對於一個極限問題我們假設非常順利得到了相應的實數 L, 這裡先用許多例子帶大家感受並學習如何使用這套語言, 至於這個 L 的存在性, 或是爲什麼該極限問題會對應這個實數而非其它的實數, 我們留到後面再探討。

例 **3.** 常數數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{c\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 而且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$。

opmhV4jxeyw

證明: 對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = 1 \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$, 都有 $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$。因此 $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$。 □

例 **4.** 考慮無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

想法. 首先我們約定一個正數 $\varepsilon > 0$, 然後研究這個數列的哪些項和 0 這個實數之間的距離真如我們所約定的 ε 還要近, 所以現在要觀察的是 $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ 這個不等式在什麼情況下會成立。

現將不等式改寫, 得到 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 或是 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 於是這個數列可以找到一個正整數 $N = [[\frac{1}{\varepsilon}]] + 1$, 那麼當 $n \geq N$ 的時候, 就有 $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$。

證明: 對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [[\frac{1}{\varepsilon}]] + 1 \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$, 都有

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \overset{(*)}{<} \varepsilon,$$

其中 $(*)$ 式成立是因爲 $n \geq [[\frac{1}{\varepsilon}]] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, 得到 $\frac{1}{n} < \varepsilon$。因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。 □

在正式進行數學論述時, 只要寫出 *證明* 的那段文字即可, 前面的 *想法* 那部份不必寫出來, 那些話語只是此時此刻爲了想要讓各位深刻了解極限的意義而寫下的內心話, 不需要公諸於世。

接著我們看看如何分析稍微複雜一點的數列之極限。

D4NugsdEuzg

例 **5.** 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-3}=2$。

想法**.** 首先研究數列的一般項 $\frac{2n^2}{n^2-3}$ 與 2 的距離:

$$\left|\frac{2n^2}{n^2-3}-2\right|=\left|\frac{2n^2-2(n^2-3)}{n^2-3}\right|=\left|\frac{6}{n^2-3}\right|\overset{(n\geq 2)}{=\!=\!=}\frac{6}{n^2-3}\overset{\text{希望}}{<}\varepsilon,$$

注意到第三個等式只要在 $n\geq 2$ 的時候就可以將絕對值拆掉, 所以我們在等式上面特別註明這件事。增加 $n\geq 2$ 這個條件以去掉絕對值是允許的, 這是因爲數列的極限在乎的是 n 很大的時候數列的行爲, 所以前面的有限項不論多麼「不守秩序」(像是這裡的 $n=1$) 也不打緊。而最後一個不等式是我們希望建立的目標, 所以我們嘗試對這個不等式求解: 在 $n\geq 2$ 時,

$$\frac{6}{n^2-3}<\varepsilon\Leftrightarrow n^2-3>\frac{6}{\varepsilon}\Leftrightarrow n^2>\frac{6}{\varepsilon}+3\Leftrightarrow n>\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3}\text{ 或 }n<-\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3},$$

注意到上面不等式的計算在 $n\geq 2$ 時都是等價的討論, 所以給定誤差 $\varepsilon>0$ 之下, 我們只要選取 $N=\max\left(2,\left[\left[\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3}\right]\right]+1\right)$, 那麼上述討論就可以完全反推回去。

有了前面的想法, 我們就可以給出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-3}=2$ 的證明:

證明: 對任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left(2,\left[\left[\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3}\right]\right]+1\right)\in\mathbb{N}$, 則對所有 $n\geq N$, 都有

$$\left|\frac{2n^2}{n^2-3}-2\right|=\left|\frac{2n^2-2(n^2-3)}{n^2-3}\right|=\left|\frac{6}{n^2-3}\right|\overset{(n\geq 2)}{=\!=\!=}6\cdot\frac{1}{n^2-3}\overset{(*)}{<}6\cdot\frac{\varepsilon}{6}=\varepsilon,$$

其中 $(*)$ 這個不等式成立是因爲

$$n\geq\left[\left[\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3}\right]\right]+1>\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3}\Rightarrow n^2>\frac{6}{\varepsilon}+3\Rightarrow n^2-3>\frac{6}{\varepsilon}\Rightarrow\frac{1}{n^2-3}<\frac{\varepsilon}{6},$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-3}=2$。 $\square$

關於上述分析有一件事情值得思考: 觀察這裡求得 N 的方法, 我們用到解一元二次不等式的技巧。或許你會想: 倘若有理式經過整理後需要解的是三次式或四次式, 那我們不就要先學會如何解三次或四次方程式與不等式嗎? 更不幸地是, 在代數學上, 可以證明「五次以上的多項式方程式沒有公式解」, 那這樣我們不就沒辦法處理更高次或更一般的數列之極限了嗎?

事實上我們不需要對這件事感到沮喪或慌張, 注意到數列極限的主要目標只是要確定「N 的存在性」而已, 並不是要找到滿足不等式的最小值或最佳數字; 也就是說, 每次給定一個誤差 $\varepsilon>0$, 你只要告知是不是真的有一個正整數 N 滿足後面所需的要求即可。想一想在玩大老二撲克牌的時候, 當上一個玩家出了一張黑桃 7 時, 而你手上有著 8 的鐵支, 你並不會把你手上的梅花 8 打出來 (它是可以壓過黑桃 7 的最小的牌), 而是順勢地打出紅心 K (因爲你手上的兩張 9 與三張 J 可以湊出葫蘆 (full house) 也不想拆牌) 壓過黑桃 7 即可。換言之, 我們可以避掉使用解高次不等式的方法得到論證。

以下我們用一個再稍微複雜一點的例子解釋精確定義證明極限問題時的技術性問題。

例 **6.** 證明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-3}{n^3-3n^2+5n-4} = 0$。

DvZHqNFBTEk

想法**.** 這個例題想要呈現的概念如下:

$$\left|\frac{n^2+n-3}{n^3-3n^2+5n-4} - 0\right| \overset{(\star)}{=\!=} \frac{n^2+n-3}{n^3-3n^2+5n-4} < \text{式子 } 1 < \text{式子 } 2 < \cdots < \text{式子 } k \overset{\text{希望}}{<} \varepsilon。$$

一般來說, 若要用精確定義的方式證明極限, 這時會遇到的第一個問題是如何拆絕對值; 若能順利把絕對值去掉, 接著我們可以在這個式子之後適當地安插式子 1、式子 2、......、式子 k, 然後對於「式子 k」的表達來說相當單純, 使得最後建立「式子 $k<\varepsilon$」的討論以及所設立的條件都非常容易求得的情況下完成整個論述。以下先給出關於這個極限問題的一個證明。

證明: 對任意 $\varepsilon>0$, 取 $N = \max\left(6, 9, 12, [\![\frac{6}{\varepsilon}]\!]+1\right) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$, 都有

$$\left|\frac{n^2+n-3}{n^3-3n^2+5n-4} - 0\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}n^2+n+\frac{1}{2}(n^2-6)}{\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{3}n^2(n-9)+5n+\frac{1}{3}(n^3-12)}\right|$$

$$\overset{(n\geq 6,9,12)}{=\!=\!=\!=} \frac{n^2+n-3}{\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{3}n^2(n-9)+5n+\frac{1}{3}(n^3-12)} \leq \frac{n^2+n^2+0}{\frac{1}{3}n^3+0+0+0} = \frac{2n^2}{\frac{1}{3}n^3} = \frac{6}{n} \overset{(*)}{<} \varepsilon,$$

其中 $(*)$ 式成立是因爲 $n \geq N \geq [\![\frac{6}{\varepsilon}]\!]+1 > \frac{6}{\varepsilon}$, 所以 $\frac{6}{n} < \varepsilon$。因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-3}{n^3-3n^2+5n-4} = 0$。 □

上述的證明到底是如何實現呢? 以下歸納出幾個大原則:

- 首先認識到: 對於 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $1 \leq n \leq n^2 \leq n^3 \leq \cdots \leq n^k \leq n^{k+1} \leq \cdots$; 也就是說, 正整數隨著次方增加有遞增的現象。這些不等式很容易驗證: 給定 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $k \in \mathbb{N}$, 那麼 $n^{k+1} - n^k = n^k(n-1) \geq 0$, 所以 $n^k \leq n^{k+1}$。而這個性質到時候會突顯一個現象: 當 n 很大的時候, 次方愈高的量佔有愈重要地位。

- 如果我們想要把要討論的量帶有的絕對值拆掉, 因爲一個量取了絕對值之後非負, 這時就必須研究絕對值內部的量是正號還是負號。如果內部是正量, 那麼就可以直接忘掉絕對值的記號, 如果內部是負量, 那麼這個量取絕對值等同於這個量取負號並且不加絕對值。這裡我們專心處理分數型的極限, 只要確定當 n 很大的時候分子與分母分別來看都是正量的話, 那麼相除之後就會是正量, 也就可以順勢拆掉絕對值。至於如何確定分子與分母的量各別來看都是正量呢? 其實就是透過前一個要點所述正整數隨著次方增加有遞增的現象, 所以低次項只要設法向最高次的項借一點湊合就可以確定符號。例如在第一個等式的分子, 這裡故意把 n^2 拆成兩個 $\frac{1}{2}n^2$, 然後其中一個和最後一項 -3 合併而成 $\frac{1}{2}(n^2-6)$, 這麼一來, 只要 $n \geq 6$ 的話, 那麼這一項就是非負的量了。這個手法同樣也用在分母的第二項與第四項。

- 關於不等式估計的原則, 這裡仍以分數型說明: 一個數, 若分子與分母都是正量, 固定分母, 分子變大其值愈大, 特別地, 將分子中帶有負的項去掉則整體的值變大; 另一方面, 固定分子, 分母變小其值愈大, 特別地, 把分母當中的某些正量直接去掉則整體的值變大。

- 如果要討論的量對 n 來說形成有理式 $\frac{P(n)}{Q(n)}$ 的樣貌, 那麼這樣的估計一定可以做到 $\frac{C}{n^{\deg Q - \deg P}}$ 的形式, 其中 C 是某個正的常數。理由也是來自於第一個要點, 在 n 很大的時候我們可以把低次項替換成高次項而建立出不等式。

我們再舉一個例子說明數列極限該如何用精確定義的方式證明。

DQg4Mv6hei8

例 **7.** 試證 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+4\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n=0$。

想法**.** 給定誤差 $\varepsilon>0$, 想要研究是否在某個 N 之後的項都有 $\left|\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n-0\right|<\varepsilon$。對於要討論的數列, 這時有兩個量相乘, 其中一個量對 n 來說不再是有理式 (rational form) 而是代數式 (algebraic form); 此外, 這個數列看似更爲複雜的原因在於現在還有 $\sin n$ 在攪局, 導致整個數列的行爲現階段都不易掌握。這時, 我們想要做的事情也是設法從中建立一些不等式:

$$\left|\frac{2n+4\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n-0\right|\le \text{式子 }1\le\text{式子 }2\le\cdots\le\text{式子 }k\overset{\text{希望}}{<}\varepsilon,$$

在建立不等式的過程中, 除了要確定每個不等式是否會對 n 有些附加的約束條件, 還必須對於最後的「式子 $k<\varepsilon$」當中找出明確的 $N_1\in\mathbb{N}$ 使得 $n\ge N_1$ 的時候這個不等式成立。這麼一來, 只要取 $N=\max(N_1,\text{所有的約束條件})$, 則當 $n\ge N$ 時, 所有的不等式就能完全串連起來。同樣地, 因爲我們必須明確找出 N_1, 所以如果「式子 k」愈單純則愈好分析。

這裡我們需要以下兩個觀察:

- 前一個例題我們證明了任何正整數次方愈高值愈大, 這個現象其實次方是正數的時候也成立; 也就是說, 對任何 $n\in\mathbb{N}$ 以及 $0<p_1<p_2$, 都有 $1\le n^{p_1}\le n^{p_2}$。原因也是直接計算可得: $n^{p_2}-n^{p_1}=n^{p_1}(n^{p_2-p_1}-1)\ge 0$, 所以 $n^{p_2}\ge n^{p_1}$。

- 根據前面的經驗, 有時候我們需要向次數最高的量借用一部份和低次項合併以確定當 n 很大的時候非負, 所以, 我們必須回答以下問題: 若 $p,q\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}$ 以及 $c>0$, 在 n 多大的時候可以得到 $n^{\frac{p}{q}}-c\ge 0$ 呢? 其中一個找法是: 若 $n\ge c^q$, 則 $n^p\ge n\ge c^q$, 得到 $n^{\frac{p}{q}}\ge c$, 即 $n^{\frac{p}{q}}-c\ge 0$。

由上面的分析, 我們可以給出關於這個極限問題的證明。

證明: 對任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\max(4,[\![(\frac{12}{\varepsilon})^2]\!]+1)\in\mathbb{N}$, 則對所有 $n\ge N$, 都有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n+4\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n-0\right| &= \left|\frac{2n+4\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n\right| = \left|\frac{2n+4\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}+2n-1}\right||\sin n| \\
&\le \left|\frac{2n+4\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}+2n-1}\right| = \left|\frac{2n+4n^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}+2n+\frac{1}{2}(n^{\frac{3}{2}}-2)}\right| \\
&\underset{\underline{(n\ge 4)}}{=} \frac{2n+4n^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}+2n+\frac{1}{2}(n^{\frac{3}{2}}-2)} \le \frac{2n+4n}{\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}+0+0} = \frac{6n}{\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}} = \frac{12}{n^{\frac{1}{2}}} \overset{(*)}{<} \varepsilon,
\end{aligned}$$

其中不等式 $(*)$ 成立的原因在於

$$n\ge N\ge\left[\!\!\left[\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^2\right]\!\!\right]+1>\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^2\Rightarrow n^{\frac{1}{2}}\ge\frac{12}{\varepsilon}\Rightarrow\frac{12}{n^{\frac{1}{2}}}<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+4\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n=0$。 □

論證數列極限存在而使用不等式化簡的方法叫做 估計 (estimate)。有時候你的估計可能會太過粗糙導致證不出來; 也就是說, 你可能會遇到一種狀況, 就是前面寫下的每個不等式邏輯上都說得通, 但是最後一式卻無法達到目的。這個時候必須重新調整不等式, 不能讓資訊放掉太多。日後需要培養的數學能力就是要知道哪些量至關重要, 哪些量可以不用太在意。

前面花了一些篇幅介紹無窮數列收斂的精確定義, 也用例子示範如何確實論述數列是收斂的。現在要介紹一個在數學上很重要的數列: 等比數列。

定義 **8.** 給定 $a_1 \in \mathbb{R}$ 與 $r \in \mathbb{R}$, 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 若滿足 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, 其中 $n \geq 2$, 則稱此數列爲 等比數列 (geometric sequence)。此時, 常數 r 稱爲 公比 (common ratio)。

phieAUuYshw

等比數列最原始的概念是來自於該數列任取相鄰兩項, 則後項比前項恆爲常數, 在每一項都不是零的情況下, 利用 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ 就可以推得 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ 這個結果。若我們不以相除的樣貌呈現等比數列時, 就可以將 $r = 0$ 還有 $a_1 = 0$ 的情況一併考量, 所以這裡直接以數列的一般式定義等比數列。

以下我們先證明某些等比數列的收斂情形, 一般的情況會陸續在後面幾個單元補充。

例 **9.** 給定實數 r 滿足 $|r| < 1$, 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$。

證明:

(A) 若 $r = 0$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $r^n \equiv 0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ (詳見 例 **3**)。

(B) 若 $0 < |r| < 1$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 希望找到自然數 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有

$$|r^n - 0| = |r^n| = |r|^n \overset{\text{希望}}{<} \varepsilon。$$

注意到: 若 $\varepsilon \geq 1$, 則任何 $n \in \mathbb{N}$ 不等式都成立, 於是以下討論將聚焦在 $0 < \varepsilon < 1$ 的情況。將最後一個不等式兩邊取常用對數(這份講義到目前爲止還沒有提到歐拉數 (Euler number) e, 所以在此就沒有使用自然對數 ln 討論問題) 後得到 $n \log |r| < \log \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log |r|}$。由上分析得到: 對任意 $0 < \varepsilon < 1$, 取 $N = \llbracket \frac{\log \varepsilon}{\log |r|} \rrbracket + 1 \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$ 都有 $n \geq \llbracket \frac{\log \varepsilon}{\log |r|} \rrbracket + 1 > \frac{\log \varepsilon}{\log |r|}$, 於是

$$|r^n - 0| = |r^n| = |r|^n < |r|^{\frac{\log \varepsilon}{\log |r|}} = \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$。

□

上述論證方式的想法非常直接, 因爲這個數列會變動的量 n 是出現在指數的部份, 所以利用取對數的方式就可以把 n 降到底部的位置就可以進行估計, 而且這種方式不致產生太大的困難。

不過對於一個想要追求嚴謹數學思維的人來說, 可能會對上面的討論感到有一點不那麼令人心安, 原因是我們好像對於指數函數與對數函數的定義並不清楚, 這個現象如同第 1 章曾經討論過的問題一樣, 中學數學老師會把指數與對數的定義輕描淡寫地講過, 讓你以爲你了解這兩類函數的真實意義, 但是若要繼續深究的話就會發現你對指數與對數函數其實是一無所知。

關於指數函數與對數函數的意義, 在這份講義中, 我們會在單元 4.7 的地方仔細討論, 而我們現在想問的是: 是否有別的方式重新證明等比數列在公比絕對值小於一時的收斂性? 以下提供另一個證明方法, 所以各位可以了解到: 對於同樣的問題, 我們可以善用以前所學, 常常會有許多方法都可以處理極限, 思維不必受限。在給出第二種證明之前, 我想先提一個分析上有時會使用的 伯努力不等式 (Bernoulli's Inequality):

3m-YAIF2tV8

定理 10 (伯努力不等式, Bernoulli's Inequality)**.** 對任意 $x \geq -1$ 與任何自然數 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$(1+x)^n \geq 1+nx。$$

證明: 利用數學歸納法完成論述:

(1) 當 $n=1$ 時, 則 $(1+x)^1 = 1+x \geq 1+1\cdot x$ 不等式成立。

(2) 假設 $n=k, k\in\mathbb{N}$ 時, 不等式 $(1+x)^k \geq 1+k\cdot x$ 成立。

當 $n=k+1$ 時, 則

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \overset{(x\geq -1)}{\geq} (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x。$$

(3) 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 對任意滿足 $x \geq -1$ 的實數與任何自然數 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $(1+x)^n \geq 1+nx$。

□

現在要利用伯努力不等式再次證明公比絕對值小於一的等比數列收斂, 而且極限值爲零。

例 11. 給定實數 r 滿足 $|r|<1$, 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$。

證明:

(A) 若 $r=0$, 則對任何 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $r^n \equiv 0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ (詳見 例 **3**)。

(B) 若 $0<|r|<1$, 將公比改寫成 $|r| = \frac{1}{1+p}$, 其中 $p>0$ 是一個定數, 由伯努力不等式 (Bernoulli's Inequality) 得知

$$|r|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{1}{1+np} < \frac{1}{np},$$

對任意 $\varepsilon>0$, 取 $N = [\![\frac{1}{\varepsilon p}]\!]+1 \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$ 都有 $n \geq [\![\frac{1}{\varepsilon p}]\!]+1 > \frac{1}{\varepsilon p}$, 得到 $\frac{1}{np} < \varepsilon$, 以及

$$|r^n - 0| = |r^n| = |r|^n < \frac{1}{np} < \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$。

□

各位可以看到伯努力不等式也是建立一種會變動的量一個在指數另一個在底部的關係式。利用伯努利不等式, 我們得到較爲精簡的估計式。

網路科技的進步約莫是最近這二十年才興起, 也就是各位在小時候玩的遊戲或許都是以網路線上遊戲爲主。我小時候雖然家中有任天堂紅白機可以玩 (或許你們覺得任天堂很無聊, 甚至根本不知道什麼是任天堂?) 但是常常被限制玩電動的時間。在電動也不能玩的情況下, 桌上唯一的「電動」就剩下計算機了。我以前有兩台計算機, 一個按鈕很大顆按起來很爽, 另一台是太陽能工程計算機(就是要有光才有電力), 小時候計算機陪了我很長一段時間, 生活單調無趣的我卻對那兩台計算機愛不釋手, 險些就要把它操爆了。我最愛玩的一個計算機遊戲我把它叫做「十秒一加加」, 先輸入「$1, +, +$」之後計時十秒鐘狂按「$=$」按鍵看最後的數字, 那兩台計算機的功能真的不相上下, 都曾經被我突破數字超過 100。而某年奧運的比賽階段(應該是 1992 年巴塞隆納奧運會吧?) 選手在百米衝刺之時, 這個遊戲也被我拿來變成百米挑戰賽, 在換算成一單位就是一公尺的意義下, 我變成了奧運金牌得主, 鳴槍起步之下, 經過 9.82 秒的時間就到終點 100 了。

CkWX46cJGXs

我玩計算機的遊戲不只於此, 我那時候對工程計算機上的 $\sqrt{}$ 這個按鍵情有獨鍾, 一種符號看起來有點像除法的東西, 尾巴又勾了一下覺得超好笑, 然後我那時候一直在測試一件事: 隨便按一個正數, 然後狂按 $\sqrt{}$ 按鍵, 結果最後都會變成 1, 不管怎麼試都一樣, 我那時候只是覺得這很好玩也沒多想什麼, 直到唸了更多的數學之後, 才恍然大悟我曾經用計算機驗證了以下的結果:

例 **12.** 給定實數 $a > 1$, 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$。

證明: 令 $\sqrt[n]{a} = 1 + y_n$, 首先證明: 對所有 $n \in \mathbb{N}$, $y_n > 0$。利用反證法, 假設有某個 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $y_n \le 0$, 那麼 $\sqrt[n]{a} \le 1$, 將不等式兩邊 n 次方之後得到 $a \le 1^n = 1$, 這與前提矛盾。

由二項式定理 (Binomial Theorem) 知道

$$\begin{aligned} a = (1+y_n)^n &= C_0^n \cdot 1^n \cdot (y_n)^0 + C_1^n \cdot 1^{n-1} \cdot (y_n)^1 + C_2^n \cdot 1^{n-2} \cdot (y_n)^2 + \cdots + C_n^n \cdot 1^0 \cdot (y_n)^n \\ &\ge n y_n, \end{aligned}$$

得到 $|\sqrt[n]{a} - 1| = |y_n| = y_n \le \frac{a}{n}$, 所以對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [\![\frac{a}{\varepsilon}]\!] + 1 \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \ge N$, 都有 $|\sqrt[n]{a} - 1| \le \frac{a}{n} < \varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$。 □

以下的要證明另一個數列的極限, 花一點時間和前一個例題比較, 想一想它們的差異以及論述方法的異同。

例 **13.** 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$。

JDNY3pZe6Lc

證明: 令 $\sqrt[n]{n} = 1 + y_n$, 首先證明: 對所有 $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$, $y_n > 0$。利用反證法, 假設存在某個 $n \ge 2$ 使得 $y_n \le 0$, 則 $\sqrt[n]{n} \le 1$, 將不等式兩邊同時 n 次方之後則有 $n \le 1^n = 1$ 得到矛盾。

由二項式定理 (Binomial Theorem) 知道

$$n = (1+y_n)^n = 1 + n y_n + \frac{n(n-1)}{2}(y_n)^2 + \cdots + (y_n)^n \overset{(n\ge 2)}{\ge} \frac{n(n-1)}{2}(y_n)^2,$$

得到

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| = |y_n| \overset{(n\ge 2)}{\le} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}(n-2)}} \overset{(n\ge 2)}{\le} \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2}n}} = \frac{2}{\sqrt{n}},$$

所以對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \max(2, [\![\frac{4}{\varepsilon^2}]\!] + 1) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \ge N$, 都有 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$。 □

各位有體會到上面兩個例子的異同嗎? 首先, 這兩個數列的最大差異在於開 n 次根號內的數字, 一個是固定的正數 a, 另一個是會變動的量 n。雖然兩者最終的結果, 也就是這兩個數列的極限都是 1, 但是在證明的過程中, 關於 $|y_n|$ 的估計, 前者只需要取二項式定理的第二項, 就能得到 $|y_n| < \frac{a}{n}$ 以確定 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$; 而後者必須取到二項式定理的第三項, 得到 $|y_n| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ 才有辦法證明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$。

關於數列極限理論, 我覺得下面這個例子非常值得討論, 不僅要學會的是論證的巧思, 這個結果也很耐人尋味。

NzjIzjDCG-k

例 **14.** 假設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 令 $b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 試證 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。

同樣地, 我們在證明之前先進行一些分析: 給定 $\varepsilon > 0$, 希望找到明確的正整數 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$, $b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 滿足 $|b_n - 0| = |b_n| < \varepsilon$。這裡的難點是: b_n 是 n 個數字取平均, 項數這麼多該如何控制? 這時, 把這個容許的誤差 ε 分成兩部份, 比方說 $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, 然後觀察

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_0-1} + a_{m_0} + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_{m_0-1}}{n} + \frac{a_{m_0} + \cdots + a_n}{n} = \mathtt{I} + \mathtt{II},$$

在這樣的拆解下, 首先觀察第 $\mathtt{II}$ 部份, 看看有沒有機會滿足 $|\mathtt{II}| < \frac{\varepsilon}{2}$。事實上是可行的, 這是因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 所以可以在某個 $m_0 \in \mathbb{N}$ 之後的項都有 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, 其中 $n \geq m_0$。一旦 m_0 確定之後, 第 $\mathtt{I}$ 部分的分子就是一個明確的數字, 只要讓分母的 n 愈來愈大就能滿足 $|\mathtt{I}| < \frac{\varepsilon}{2}$。所以爲了啟動這兩個機制, 到時候選取的 N 必須同時滿足這兩個條件。

大家是否有玩過密室逃脫的遊戲, 爲了要逃出密室, 你要先找到房門鑰匙, 而這個房門鑰匙是被鎖在一個保險箱內, 保險箱的四位數密碼在遊戲過程中分成兩組必須各自找到兩位數, 再想辦法理出一個順序, 然後開啟保險箱之後取出鑰匙, 最後才能逃離房間。也就是說, 完成一件事所採取的策略會有先後的順序, 這在驗證數列極限的時候也會發生, 就像這個例子中, 我們必須先處理 $\mathtt{II}$ 的部份, 再解決 $\mathtt{I}$。各位可以想一想爲什麼無法先處理 $\mathtt{I}$ 再處理 $\mathtt{II}$。

證明: 對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 所以存在 $m_0 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq m_0$ 都有 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$。記 $M = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{m_0-1}|)$, 對於 $n \geq m_0$, 觀察數列

$$\begin{aligned} |b_n| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_0-1} |a_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=m_0}^{n} |a_k| \\ &< \frac{1}{n}\cdot M \cdot (m_0 - 1) + \frac{1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot(n - (m_0 - 1)) \leq \frac{M(m_0-1)}{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

所以對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \max\left(m_0, \left[\left[\frac{2M(m_0-1)}{\varepsilon}\right]\right] + 1\right) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$, 都有

$$|b_n| < \frac{M(m_0-1)}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

其中 $(*)$ 式成立因爲 $n \geq N > \frac{2M(m_0-1)}{\varepsilon}$ 得到 $\frac{M(m_0-1)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$。因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。 □

若各位對機率與統計感興趣的話, 這個例子是大數法則 (law of large number) 的起源, 未來若學到相關理論時, 可以再把這個例子拿出來好好體會兩者的關係。

關於數列的定義, 這裡想要補充說明一件事情: 基於極限精確定義一開始宣告誤差的「任意性」, 我們可以證明數列極限存在 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 與以下敘述等價:

rp19PPgrMho

> 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 時, 都有 $|a_n - L| < M\varepsilon$, 其中 $M > 0$ 是一個與 n 無關的常數。

這裡先給出此等價敘述的證明。

證明: $(\Rightarrow)$ 已知: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 即對任意 $\varepsilon' > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_n - L| < \varepsilon'$。對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon' = M\varepsilon > 0$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_n - L| < \varepsilon' = M\varepsilon$。

$(\Leftarrow)$ 已知: 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_n - L| < M\varepsilon$, 其中 $M > 0$ 與 n 無關。對任意 $\varepsilon' > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{M} > 0$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_n - L| < M\varepsilon = M \cdot \frac{\varepsilon'}{M} = \varepsilon'$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$。 □

這個等價敘述有助於往後在證明和極限有關的論述時不需要一直花心思去調整或分配誤差 ε, 而是可以對於每一個要估計的量都先用 ε 各自處理, 最後再進行整合即可。比方說, 我們用下面的方式重新證明 例 **14**:

證明: 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $m_0 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq m_0$ 都有 $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$。記 $M = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{m_0-1}|)$, 對於 $n \geq m_0$, 觀察數列

$$\begin{aligned}|b_n| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_0-1} |a_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=m_0}^{n} |a_k| \\ &< \frac{1}{n}\cdot M\cdot(m_0-1) + \frac{1}{n}\cdot\varepsilon\cdot(n-(m_0-1)) \leq \frac{1}{n}\cdot M\cdot(m_0-1) + \varepsilon,\end{aligned}$$

得到對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \max(m_0, [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$ 都有

$$|b_n| < \varepsilon\cdot M\cdot(m_0-1) + \varepsilon = (M(m_0-1)+1)\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。 □

註. 根據求和的記號 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{m-1}|a_k|$, 下標 $k = 1$ 表示指標 k 從 1 開始, 每次指標增加 1 單位後將 $|a_k|$ 相加, 一直加到指標的數字爲 $m - 1$ 爲止, 最後再除以 n。若上標的數字比下標的起始值來得小, 則表示完全沒有那一項; 也就是說, 在這個例子下, 如果 $m = 1$ 的話, 那就沒有 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{m-1}|a_k|$ 這一部份。

接下來要討論的是發散數列的語法及例子。所謂的發散數列, 表示任何實數都不是數列的極限值, 若用精確定義表述, 則是說

pl8CGs-fr78

「存在 $L \in \mathbb{R}$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 對所有的 $n \geq N$ 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$。」不成立

$\Leftrightarrow$「對任意 $L \in \mathbb{R}$, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 對所有 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $n_0 \geq N$ 使得 $|a_{n_0} - L| \geq \varepsilon_0$。」成立。

寫出否定敘述並沒有很困難, 原則上就是把任意換成存在, 存在換成任意, 最後結論的不等式用三一律 (trichotomy law) 改掉。

例 **15.** 證明無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。

證明: 對任意 $L \in \mathbb{R}$, 現分成以下兩種情況討論:

(A) <u>若 $L \geq 0$</u>, 取 $\varepsilon_0 = 1 > 0$, 對所有 $N \in \mathbb{N}$, 取 $n_0 = 2N + 1 \geq N$, 則

$$|a_{n_0} - L| = |a_{2N+1} - L| = |(-1)^{2N+1} - L| = |-1 - L| = 1 + L \geq 1 = \varepsilon_0。$$

(B) <u>若 $L < 0$</u>, 取 $\varepsilon_0 = 1 > 0$, 對所有 $N \in \mathbb{N}$, 取 $n_0 = 2N \geq N$, 則

$$|a_{n_0} - L| = |a_{2N} - L| = |(-1)^{2N} - L| = |1 - L| = 1 - L > 1 = \varepsilon_0。$$

由 (A) 與 (B) 得知: 任何實數 L 都不是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的極限, 因此無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。 □

注意到 例 **15** 中的 ε_0 可以取小一點, 比方說 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ 也是可以的, 只要我們找到正數滿足條件(存在性) 即可。

gbTzpANgunA

這一單元的最後想要觀察的是數列收斂或發散與在區間內與區間外一般項個數的關係。從圖形來看, 給定 $\varepsilon > 0$, 現將區間 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 在實數軸上畫出來, 然後再標註 $a_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ 的所在位置, 如圖 2.1 所示:

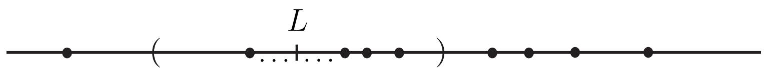

圖 2.1: 收斂的數列, 對任何 $\varepsilon > 0$, 在 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 外面的項最多只有有限多個。

注意到 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮數列, 我們無法真的把每一項都標示在數線上, 但是以下現象是可以確定的: 根據定義, 因爲存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 時都有 $|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$, 所以從 a_N 之後的所有項都會落在區間 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 內; 換句話說, 在區間 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 外的項只會有有限多個 (最多只有 $N - 1$ 項)。所以我們有以下結論:

(A) 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂等價於:

存在 $L \in \mathbb{R}$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 外的項只有有限多個。

(B) 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散等價於:

對任何 $L \in \mathbb{R}$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 外的項有無限多個。

各位可以把西遊記故事與數列收斂的情況做一個類比, 用 a_n 比喻成孫悟空在翻筋斗雲的動態, 孫悟空不論翻了多少個筋斗雲 (a_n 隨著 n 一直在數線上動來動去), 終究逃不出如來佛的手掌心 (a_n 終究會掉到 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 的範圍內)。至於什麼樣的情境比較像是數列發散的情況呢? 比方說你坐在教室中聽著老師講著枯燥無味的課程, 每一次上課都無法全神貫注聽講, 也就是每次上課總是會有一個時刻恍神而分心, 而你的思緒就有如發散的數列般總是飄走無法聚焦。

2.2 收斂數列的性質

這個單元的主要目標是要證明收斂數列的基本性質。

定理 1. 若無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 則極限值唯一。

T5E4CrQHEFo

證明: 利用反證法。假設數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂於兩相異的值 L 與 M; 也就是說, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$ 且 $L \neq M$, 不妨設 $L < M$, 考慮正數 $\varepsilon = \frac{M-L}{2} > 0$,

(A) 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 所以對於正數 $\varepsilon = \frac{M-L}{2} > 0$ 而言, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_1$, 都有 $|a_n - L| < \frac{M-L}{2}$, 得到 $a_n < L + \frac{M-L}{2} = \frac{L+M}{2}$。

(B) 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$, 所以對於正數 $\varepsilon = \frac{M-L}{2} > 0$ 而言, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_2$, 都有 $|a_n - M| < \frac{M-L}{2}$, 得到 $\frac{L+M}{2} = M - \frac{M-L}{2} < a_n$。

對於正數 $\varepsilon = \frac{M-L}{2} > 0$, 取 $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$, 都有 $a_n < \frac{L+M}{2}$ 且 $a_n > \frac{L+M}{2}$ 矛盾。因此無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 若收斂, 則極限值唯一。 □

這個定理的出現對於學數學的人(或數學老師) 來說是最開心不過的事, 因爲該敘述是說一個極限問題若算得出答案的話, 那麼它就只會有一個標準答案。以數學本身而言, 極限的唯一性也能夠顯示這個數列有一個聚焦的現象, 而且若是把極限概念想成是「聚焦」的話, 那當然數列只會聚焦在「一個」地方。

這裡應再強調的是: 該定理是建立在已知數列極限「存在」的情形下, 才會得到唯一性; 一個數列是否極限存在, 這個定理並未說明, 而且這是另一個故事, 比方說我們可利用前一個單元介紹的精確定義方式論證極限的存在性, 我們也會在後面介紹其它可以幫助了解極限存在的定理。

下一個定理想要描述的極限性質是說: 兩個數列的極限若有大小關係, 則可以得知在某一項之後兩數列一般項的大小關係。

定理 2. 若有兩個收斂數列 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ 且 $L < M$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$, 不等式 $a_n < b_n$ 成立。

NfqJihDAe9Q

證明: 考慮正數 $\varepsilon = \frac{M-L}{2} > 0$, 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 所以對於 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_1$, 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$; 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, 所以存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_2$, 都有 $|b_n - M| < \varepsilon$。考慮 $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$, 都有

$$|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < \underline{a_n < L + \varepsilon} \Rightarrow a_n < L + \left(\frac{M-L}{2}\right) = \frac{L+M}{2}$$

$$|b_n - M| < \varepsilon \Rightarrow \underline{M - \varepsilon < b_n} < M + \varepsilon \Rightarrow \frac{L+M}{2} = M - \left(\frac{M-L}{2}\right) < b_n,$$

所以 $a_n < \frac{L+M}{2} < b_n$。 □

我們可以把這個定理情境化, 想像有兩位神槍手, 當他們練習射擊練到精熟的時候, 他們打出的子彈也就離各自的靶心愈來愈近。若兩位神槍手所要瞄準的靶心一個在左一個在右, 那麼我們可以發現他們的子彈也可以左右完全區分。

以下我們想問: 如果兩個數列的一般項有大小關係, 那麼兩數列的極限也能夠比大小嗎? 透過邏輯「若 P 則 Q」與「非 Q 則非 P」的等價性還有 定理 **2**, 我們得到以下結果:

定理 3. 若有兩個收斂數列 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, 並且存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $n \geq N$, 不等式 $a_n \leq b_n$ 都成立, 則 $L \leq M$。

a2o3C_PrOp0

證明: 利用反證法。假設 $L > M$, 則由 定理 **2** 得知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $n \geq N$, 不等式 $a_n > b_n$ 成立, 這與前提矛盾。因此 $L \leq M$。 □

uetWVOAV_8o

現在想要花一點時間比較 定理 **2** 與 定理 **3**, 這裡特別想討論「嚴格不等式」與「弱的不等式」的差異。在此故意寫「弱的不等式」, 表示想強調這個不等式的等號可能會成立。就以 定理 **2** 目前的鋪陳, 它是在說取極限之後的嚴格不等式可以推得兩數列在某一項之後的逐項嚴格不等式; 至於 定理 **3** 則是說如果兩個數列在某一項之後有逐項弱的不等式, 可以得到極限值也會保持弱的不等式。

以下想對這兩個定理繼續延伸討論:

- 關於 定理 **2**, 如果把定理的條件改成弱的不等式 $L \leq M$, 這時結論並無法推得弱的不等式, 也就是: 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $a_n \leq b_n$。例如 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{(-1)^n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 而 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, 這時 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 但是當 n 是奇數, 則 $a_n < b_n$, 當 n 是偶數, 則 $a_n > b_n$。

- 關於 定理 **3**, 如果把定理的條件改成嚴格不等式 $a_n < b_n$, 其結論仍然只能得到弱的不等式 $L \leq M$, 無法推得嚴格不等式。比方說考慮 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n < b_n$, 但是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。一般來說, 取極限之後結果都是只能得到弱的不等式, 這是極限概念的一個精神與普遍的現象。

而下面的推論基本上是 定理 **2** 的特例。

推論 4.

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 且 $L < M$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$, 都有 $a_n < M$。

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 且 $L > M$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$, 都有 $a_n > M$。

證明:

(A) 考慮數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $b_n \equiv M$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, 由 定理 **2** 得知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$, 不等式 $a_n < b_n = M$ 都成立。

(B) 考慮數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $b_n \equiv M$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, 由 定理 **2** 得知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$, 不等式 $a_n > b_n = M$ 都成立。

□

下面要介紹的是在研究數列極限時實用性很高的夾擠定理, 它是在探討三個數列之間一般項與極限之間的關聯。

定理 5 (夾擠定理, Squeeze Theorem). 考慮三個數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, 若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$, 都有 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 並且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$。

fjSuNZU7wGs

證明: 對任意正數 $\varepsilon > 0$, 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_1$, 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_2$, 都有 $|c_n - L| < \varepsilon$。取 $\overline{N} = \max(N, N_1, N_2) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq \overline{N}$, 都有

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$。 □

夾擠定理的建立將帶來很多好處, 對於一個較爲複雜的數列欲研究其極限, 這時把數列設定成定理中的 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 然後試著找尋比這個數列的一般項還要大與比較小的另外兩個數列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 若這兩個數列相對單純而容易討論其極限, 而且只要這兩個極限也相等, 那麼夾在中間的數列極限也隨之確定。

至於夾擠定理的證明, 我們不能直接使用 **定理 3** 而得到結果, 原因在於 **定理 3** 必須假設兩個數列都收斂, 但是夾擠定理的討論並沒有假設數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收斂的, 而是透過 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂才得到 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也收斂。

例 6. 試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n^2-4n+3}$。

aM7jCLyXjQQ

解. 因爲

$$0 \overset{(n\geq 4)}{<} \frac{n-1}{2n^2-4n+3} = \frac{n-1}{n^2+n(n-4)+3} \overset{(n\geq 4)}{<} \frac{n+0}{n^2+0+0} = \frac{1}{n},$$

而且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, 故由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n^2-4n+3} = 0$。

回想第 1 章曾經提到有上界或是有下界的集合, 將這個概念用到數列上則可定義有界數列。

定義 7. 若存在 $m, M \in \mathbb{R}$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $m \leq a_n \leq M$, 則稱 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 **有界數列** (bounded sequence)。此時 m 稱爲數列的一個 **下界** (lower bound), 而 M 稱爲數列的一個 **上界** (upper bound)。

MNgoh_IpyWs

以下兩件事應該很容易理解:

(A) 若數列有界, 則上界、下界不唯一。假設 $m, M \in \mathbb{R}$ 是數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的下界與上界, 則對所有 $l \in \mathbb{R}, l > 0$, $m - l, M + l$ 都是數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的下界與上界。

(B) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界數列等價於: 存在 $\overline{M} > 0$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n| \leq \overline{M}$。證明如下:

($\Rightarrow$) 已知: 存在 $m, M \in \mathbb{R}$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $m \leq a_n \leq M$。令 $\overline{M} = \max(|m|, |M|)$, 如果 $a_n \geq 0$, 則 $0 \leq a_n \leq M$, 所以 $|a_n| \leq |M| \leq \overline{M}$; 如果 $a_n < 0$, 則 $m \leq a_n < 0$, 所以 $|a_n| \leq |m| \leq \overline{M}$。因此 $|a_n| \leq \overline{M}$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$。上述討論若取到 $\overline{M} = 0$, 這時改取 $\overline{M} = 1$ 即可。

($\Leftarrow$) 已知: 存在 $\overline{M} > 0$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n| \leq \overline{M}$, 則 $-\overline{M} \leq a_n \leq \overline{M}$, 記 $m = -\overline{M}$ 與 $M = \overline{M}$, 於是對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $m \leq a_n \leq M$。所以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界數列。

定理 8. 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 則數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界的。

證明: 假設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, 特別考慮 $\varepsilon = 1 > 0$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $n \geq N$ 都有

$$|a_n - L| < 1 \Rightarrow |a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|。$$

令 $M = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |L|)$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n| \leq M$, 所以數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界的。 □

C1OV3JFC1mY

定理 9 (極限的四則運算)**.** 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 皆收斂, 則

(A) 數列 $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 並且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(B) 數列 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 並且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, 則數列 $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 並且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$。

證明: 假設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$。

(A) 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_1$, 都有 $|a_n - L_1| < \varepsilon$; 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_2$, 都有 $|b_n - L_2| < \varepsilon$。取 $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$, 利用三角不等式 (triangle inequality), 得到

$$\begin{aligned}&|(a_n \pm b_n) - (L_1 \pm L_2)| = |(a_n - L_1) + (\pm(b_n - L_2))|\\ \leq\ &|a_n - L_1| + |\pm(b_n - L_2)| = |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L_1 + L_2 = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n。$$

(B) 因爲數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 所以數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 即存在 $M > 0$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n| \leq M$。對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_1$, 都有 $|a_n - L_1| < \varepsilon$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_2$, 都有 $|b_n - L_2| < \varepsilon$。

取 $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$, 都有

$$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - L_1 \cdot L_2| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot L_2 + a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2|\\ &\leq |a_n \cdot b_n - a_n \cdot L_2| + |a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2|\\ &= |a_n(b_n - L_2)| + |(a_n - L_1)L_2|\\ &= |a_n||b_n - L_2| + |a_n - L_1||L_2|\\ &\leq M\varepsilon + \varepsilon|L_2| = (M + |L_2|)\varepsilon,\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = L_1 \cdot L_2 = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n。$$

(C) 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_1$, 都有 $|a_n - L_1| < \varepsilon$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_2$, 都有 $|b_n - L_2| < \varepsilon$。

NBFBYBXTkOw

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2 \neq 0$ 得到 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n \cdot L_2) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} L_2 = (L_2)^2 > \frac{1}{2}(L_2)^2$。根據 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n \cdot L_2) > \frac{1}{2}(L_2)^2$ 與 推論 **4** 得知: 存在 $N_3 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_3$ 都有 $b_n \cdot L_2 > \frac{1}{2}(L_2)^2 > 0$。

取 $N = \max(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$, 都有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \left|\frac{a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot b_n}{b_n \cdot L_2}\right| = \left|\frac{a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot L_2 - L_1 \cdot b_n}{b_n \cdot L_2}\right| \\
&\leq \frac{|a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| + |L_1 \cdot L_2 - L_1 \cdot b_n|}{|b_n \cdot L_2|} \\
&= \frac{|a_n - L_1||L_2| + |L_1||b_n - L_2|}{|b_n \cdot L_2|} < \frac{\varepsilon|L_2| + |L_1|\varepsilon}{\frac{1}{2}(L_2)^2} = \frac{2(|L_1| + |L_2|)}{(L_2)^2}\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}。$$

□

極限四則運算對日後處理複雜的數列極限帶來很大的便利。使用極限四則運算時, 必須確定每一個拆開後的數列都收斂, 而且在分母的部份<u>整體而言</u>極限值不爲 0 的情形下, 就可以順勢使用四則運算。此外, 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 原理得知極限四則運算可適用於任何有限個數列加減乘除之拆解。

YiAAm_rTz5E

多數人在認識極限的四則運算時, 都過於專注在四則運算的操作面, 覺得這件事情就如同小學數學一樣很順理成章地就把那些量進行加減乘除的操作, 卻忽略了這個定理其實有一個很重要的前提, 那就是兩個數列都要確定是收斂的數列, 然後才可以使用極限的四則運算。

如果兩個數列不見得都是收斂的數列, 那麼會有什麼結果呢? 現進行探討:

- 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂而 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散, 則 $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。

  證明: 利用反證法, 假如 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 則

  $$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}((a_n + b_n) - a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) - \lim_{n\to\infty} a_n$$

  收斂, 這與前提 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散矛盾, 所以 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。

  假如 $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 則

  $$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - (a_n - b_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$$

  收斂, 這與前提 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散矛盾, 所以 $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。 □

- 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都發散, 則 $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可能收斂也可能發散。

  舉例來說, 考慮 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, 兩者都是發散的數列, 但是 $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{0\}_{n=1}^{\infty}$ 則爲收斂的數列。若考慮 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 兩者皆發散, 而 $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{2(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 亦發散。

- 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂而 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散, 則 $\{a_n\cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可能收斂也可能發散。

  舉例來說, 考慮 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散, 則 $\{a_n\cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{(-1)^n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂。若考慮 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散, 則 $\{a_n\cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。

- 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都收斂, 且對所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $b_n\neq 0$, 而且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, 則 $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是收斂或發散無法確定, 這部份各位可以自行舉例, 實際上這與不定型 (indeterminate form) 的問題有關, 我們會到第 5 章討論羅必達法則 (L'Hôpital's Rule) 時會再仔細說明。

關於極限四則運算, 還有兩件事值得註記: 爲什麼除法的規則只需要假設極限非零而不需要假設一般項也非零呢? 其實在證明的過程中就可以發現這與 推論 **4** 相關, 只要確定極限非零, 那麼就可以得知數列在某一項之後都不是零, 而這個數列產生零的項只會出現在前段, 可以不必理會。另一個註記是關於極限四則運算在代數上是在描述四則運算與極限操作的交換性, 等式左邊是先操作四則運算然後再考慮極限, 等式右邊則是先考慮極限再進行四則運算, 當兩個數列都收斂時, 那麼四則運算與極限的操作先後順序可以互換。

回想單元 2.1 當中的 例 **12** 曾經介紹按計算機的故事, 那時候證明了對於 $a>1$, 不斷地開根號之下, 數字會愈來愈接近 1。以下要證明的是: 其實這個現象對於 a 是任何的正數都有同樣的結果。

rIs9NX56go4

例 **10.** 對於正數 $a>0$, 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

解.

(A) <u>若 $a>1$</u>, 則單元 2.1 的 例 **12** 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

(B) <u>若 $a=1$</u>, 則 $\sqrt[n]{a}\equiv 1$, 由單元 2.1 的 例 **3** 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

(C) <u>若 $a<1$</u>, 則 $\frac{1}{a}>1$, 由極限的四則運算得知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1。$$

最後再給出一個極限的綜合例題:

fo1I6K-03QQ

例 **11.** 給定正數 $a_1,a_2,\ldots,a_k$, 試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$。

解. 記 $A=\max(a_1,a_2,\ldots,a_k)$, 因爲

$$A^n\le a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n\le k\cdot A^n\Rightarrow A\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\le\sqrt[n]{k}\cdot A,$$

而且 $\lim\limits_{n\to\infty}A=A$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}\cdot A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}A=1\cdot A=A$, 故由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max(a_1,a_2,\ldots,a_k)$。

2.3 單調數列理論

前一單元介紹的是一般數列的基本性質, 這一單元要討論一類特別的數列: 單調數列。首先給出定義:

5aGmPnq-8tA

定義 1. 設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個無窮數列,

(A) 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $a_n \le a_{n+1}$, 則稱數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *遞增的* (increasing)。

(B) 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $a_n < a_{n+1}$, 則稱數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *嚴格遞增的* (strictly increasing)。

(C) 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $a_n \ge a_{n+1}$, 則稱數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *遞減的* (decreasing)。

(D) 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $a_n > a_{n+1}$, 則稱數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *嚴格遞減的* (strictly decreasing)。

(E) 如果數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是遞增的或是遞減的, 則稱數列是 *單調的* (monotonic)。

介紹完遞增與遞減數列的概念後, 再配合前一單元提到有界數列的概念, 在此要介紹一個定理:

定理 2 (單調有界定理, Monotonic Sequence Theorem)**.** 單調有界的數列必收斂。這句話較爲明確的表述是*: 遞增有上界的數列必收斂; 遞減有下界的數列必收斂。*

關於這個定理的證明與實數完備性有關, 我們留到第 3 章再好好闡述, 屆時會將所有與實數完備性有關的定理一併介紹。先接受這個定理之下, 現在想要花一些時間介紹歐拉數 (Euler number) e。關於歐拉數的建構方法有很多種, 其中一種源自於連續複利的問題, 在這裡做一個簡要的介紹。

某人拿 1 元去「佛心銀行」存款, 只見銀行服務員口沫橫飛地推銷最新優儲方案: 利率 100%, 並以複利計算, 也可以選擇年複利、季複利、月複利、日複利、時複利、分複利、秒複利。

DMoxoF2x6jU

根據複利的公式:

$$\text{本利和} = \text{本金} \times \left(1 + \frac{\text{利率}}{\text{期數}}\right)^{\text{期數}},$$

我們可以把各種複利方案的本利和都計算出來: 記 n 表示複利的期數, 於是

複利	n	本利和 $= (1+\frac{1}{n})^n$
年複利	1	2
季複利	4	2.44140625
月複利	12	2.61303529
日複利	365	2.71456748
時複利	8760	2.71812669
分複利	525600	2.71827924
秒複利	31536000	2.71828178

在這個表格中會看到一個現象是: 本利和對於期數 n 而言有遞增的現象, 那它會無限制增加嗎? 換言之, 把一塊錢存入銀行, 然後跟服務員說我想要用更精細的複利方案, 這樣可能一元致富嗎? 這個問題在 1727 年瑞士數學家歐拉 (L. Euler, 1707–1783) 就知道它並不會無限制增大, 現把這個結果用例題的方式呈現。

5sN_mmlwfuo

例 **3.** 考慮無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$, 證明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞增有上界, 所以數列收斂。

證明:

(A) 首先證明數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞增: 由二項式定理 (Binomial Theorem) 得知:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \left(\frac{1}{n}\right)^k \quad \text{與} \quad a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k,$$

對於 $k = 0, 1, \ldots, n$, 考慮

$$\begin{aligned}
\frac{C_k^{n+1}(\frac{1}{n+1})^k}{C_k^n\,(\frac{1}{n})^k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^k} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} \cdot \frac{n^k}{1} \\
&= \frac{n+1}{n+1-k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \frac{n+1}{n+1-k}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^k \\
&\geq \frac{n+1}{n+1-k}\left(1-\frac{k}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{n+1-k}{n+1} = 1,
\end{aligned}$$

當中的不等式是用到單元 2.1 的 定理 **10** 伯努力不等式 (Bernoulli's Inequality)。於是

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n} C_k^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k + C_{n+1}^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\geq \sum_{k=0}^{n} C_k^n \left(\frac{1}{n}\right)^k = a_n,
\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞增。

(B) 再來要證明數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界: 當 $n=1$, 則 $a_1 = 2$; 對於 $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_k^n\left(\frac{1}{n}\right)^k = C_0^n\left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_1^n\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \sum_{k=2}^{n} C_k^n\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{n} \leq 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \\
&\leq 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 1+1+1-\frac{1}{n} < 3,
\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界。

(C) 因爲 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞增有上界, 故由單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在。

□

在數學分析上, 我們會將這個極限記爲 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}$, 稱爲 歐拉數 (Euler number)。關於歐拉數的其它等價敘述, 各位有興趣的話可以試著找尋相關文獻延伸閱讀。

2.4 子數列理論

qitJR1prZTg

這一個單元想要介紹子數列, 也就是想要觀察一個數列當中的某一部份, 然後研究其行爲。若我們只看數列的一部份, 那麼很有可能無法看到數列的全貌; 也就是說, 若以數列爲研究主體, 原數列本身可能逐項觀察會看不出什麼結果, 但是經過特別篩選下可能會發現到好的性質。另一方面, 因爲觀察子數列只能獲知某些片段的資訊, 那麼我們到底需要多少的資訊才能得知原數列真正的行爲呢? 這個問題也是子數列理論的一個核心問題。

以下先給出子數列的定義。

定義 1. 給定無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 而 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 是一個嚴格遞增的正整數數列, 則

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\}_{k=1}^{\infty}$$

稱爲無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一個 子數列 (subsequence)。

關於 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 這個記號有雙重的意義, 若是看成 $\{(a_n)_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的時候, 則是強調這個子數列是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的繼承者, 並且子數列是以 k 爲指標以表示子數列的第 k 項; 另一方面, 若是看成 $\{a_{(n_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 則是強調 n_k 是一個正整數, 然後連繫子數列的第 k 項與原數列的第 a_{n_k} 項。

這裡觀察指標的對應: $k \in \mathbb{N} \mapsto n_k \in \mathbb{N}$, 因爲此映射嚴格遞增, 故對所有 $k \in \mathbb{N}$, 都有 $n_k \geq k$ 這個性質。這個性質會在討論子數列與原數列的關係時使用。

回到這個單元一開始的說明, 這裡再次重述其概念: 無窮數列與其子數列之間有許多微妙的關係, 很值得仔細討論。當面對一個很複雜的數列不知如何處理時, 有時會先觀察子數列的行爲, 這是因爲子數列的意義是我們選擇性忽略一些項, 只研究某些特定項的行爲, 在得知數列的一部份有某些結果時, 希望可以反推原數列的行爲。以下幾個定理就是在說明原數列與其子數列之間的關係。

首先要證明的是若數列收斂, 則數列極限與子數列的極限一致。

定理 2. 若無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂於 L, 則它的任何子數列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 也收斂於 L。

4KAw8BnR-Zs

證明: 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$。對於子數列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 來說, 取 $K = N$, 則對所有 $k \geq K$, 因爲 $n_k \geq k \geq K = N$, 所以 $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$。 □

就實用性來說, 我們經常拿 定理 2 的否逆命題判斷一個數列是否發散。

定理 3. 無窮數列若有一個子數列發散, 或是有兩個子數列收斂但極限值不同, 則無窮數列發散。

證明: 這是 定理 2 否逆命題的敘述。 □

因爲子數列的概念就是把原數列的某些部份選擇性不看, 也就是說它會失去一些原數列的訊息, 若要從子數列的方式研究原數列, 一種方法是要追查所有可能的子數列之行爲。

定理 4. 無窮數列收斂等價於它的任何子數列都收斂。

證明: $(\Rightarrow)$ 這是 定理 2 的結果。$(\Leftarrow)$ 由於 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 本身也是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一個子數列, 故結論成立。 □

注意到 定理 **4** 是一個邏輯上等價的敘述, 但是實用性不高, 因爲一個數列都搞不定了, 更何況我們還要檢查所有的子數列的收斂性。那有沒有一種用子數列了解原數列且比較好的方法呢? 回想前面一段話的討論, 子數列會失去一些原數列的訊息, 那麼有沒有可能挑出某幾個子數列而且不會失去原數列的訊息呢? 下面的定理提供了一個可行的方法。

jk5asVNxcDk

定理 **5.** 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂等價於奇數項子數列 $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ 與偶數項子數列 $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收斂並且極限值相同。

證明: $(\Rightarrow)$ 這是 定理 **2** 的結果。

$(\Leftarrow)$ 首先, 記 $b_k = a_{2k-1}$ 與 $c_k = a_{2k}$, 則 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots, b_k, c_k, \ldots\}$。若 $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = L$, $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = L$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 則存在 $K_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $k \geq K_1$ 都有 $|b_k - L| = |a_{2k-1} - L| < \varepsilon$, 也存在 $K_2 \in \mathbb{N}$ 使得 $k \geq K_2$ 都有 $|c_k - L| = |a_{2k} - L| < \varepsilon$。對於數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 而言, 對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \max(2K_1 - 1, 2K_2) \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N$, 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$, 因此無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂 。 □

若各位的領悟力夠高的話, 應該可以發現: 把一個無窮數列經過適當的分割 (partition), 如果分割數有限, 每一個分割將形成一個子數列。若原數列的每一項都在某一個子數列中出現, 而且如果每個分割對應的子數列都收斂且極限值相同的話, 那麼原來的無窮數列也收斂。上面的定理是分成奇數項子數列與偶數項子數列, 另一個簡單的推論是三分法, 像是標號除以三餘零、餘一、餘二而形成三個子數列, 證明這三個子數列都收斂且極限值一樣, 那麼原數列收斂且有相同的極限值。

2.5 無窮小與無窮大

在數列理論或是往後的函數理論中, 無窮小與無窮大這兩個觀念及其理論是相當重要的, 這套原則若能確實掌握, 對於數學分析的能力基本上也就打通任督二脈。當中的一些想法在日後分析基礎上能有相對直觀的方式看待, 也容易依循這個原則掌握大致的現象。

首先我們給出無窮小數列與無窮大數列的定義。

J0WYrCVE3Kw

定義 **1.**

(A) 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂且極限值爲 0; 也就是說, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_n| < \varepsilon$, 則稱 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲 *無窮小數列* (infinitesimal sequence)。

(B) 設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個數列, 如果對任意正數 $M > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_n| > M$, 則稱 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲 *無窮大數列* (infinitely large sequence)。

這裡可再細分無窮大數列的行爲: 若一個無窮大數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足: 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_1$ 都有 $a_n > 0$, 則稱這個無窮大數列是 *發散至正無窮大* (divergent to positive infinity), 此時以記號 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ 表達這個概念。相應地也有 *發散至負無窮大* (divergent to negative infinity) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 的概念, 它表示一個無窮大數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足: 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_1$ 都有 $a_n < 0$。在後續的討論, 通常都會先以發散至正無窮大的數列爲主體, 而發散至負無窮大的論述都可以同理推得。

以下要說明的是無窮小數列與無窮大數列在倒數的意義下是一體的兩面。

定理 2.

vPBU5WTIhq8

(A) 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮大數列, 則 $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列。

(B) 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列, 並且 $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, 則 $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮大數列。

證明:

(A) 因爲 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮大數列, 對任意 $M > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_n| > M$。對任意 $\varepsilon > 0$, 考慮 $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_n| > M = \frac{1}{\varepsilon}$, 所以 $|\frac{1}{a_n}| = \frac{1}{|a_n|} < \varepsilon$, 因此 $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列。

(B) 因爲 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列而且 $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $0 < |a_n| < \varepsilon$。對任意 $M > 0$, 考慮 $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $0 < |a_n| < \varepsilon = \frac{1}{M}$, 所以 $|\frac{1}{a_n}| = \frac{1}{|a_n|} > M$, 因此 $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮大數列。

□

既然無窮小數列與無窮大數列是一體的兩面, 這份講義的編排會以無窮大數列爲主, 各位可以用類比的方式得到無窮小數列的相關結論。

之前我們已經討論了等比數列 (geometric sequence) $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在某些公比的結果, 藉由無窮小與無窮大理論, 我們可以把其它情形都討論完畢。

例 3. 關於等比數列 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$,

wXbSzHOozME

(A) 若 $|r| < 1$, 則 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲無窮小數列。

(B) 若 $r = 1$, 則 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 極限值爲 1。

(C) 若 $r = -1$, 則 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。

(D) 若 $|r| > 1$, 則 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲無窮大數列。

證明:

(A) 這是單元 2.1 例 **9** 或 例 **11** 的結果。

(B) 這是單元 2.1 例 **3** 的結果。

(C) 考慮奇數項子數列 $\{r^{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = \{-1\}_{k=1}^{\infty}$, 則 $\lim\limits_{k\to\infty} r^{2k-1} = -1$。另一方面, 考慮偶數項子數列 $\{r^{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{1\}_{k=1}^{\infty}$, 則 $\lim\limits_{k\to\infty} r^{2k} = 1$, 由單元 2.4 的 定理 **3** 得知數列發散。

(D) 利用本單元 定理 **2** 搭配上述 (A) 的情況(取倒數) 可得證。

□

各位不妨再拿起手上的電動玩具 — 計算機(手機內建的計算機功能也行), 先隨便按一個數字, 再按「×、×」之後狂按「=」按鍵, 觀察數字的變化, 看看其結果是否如上面所述一致。

以下將觀察一個無窮小數列的現象:

定理 4. 如果數列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 有界, 數列 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ 是無窮小數列, 則 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^\infty$ 也是無窮小數列。

證明: 因爲 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 有界, 所以存在 $M > 0$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n| \leq M$, 而 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ 是無窮小數列告知: 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|b_n| < \varepsilon$。由此得知: 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|a_n \cdot b_n| < M\varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$ 得到 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^\infty$ 是無窮小數列。 □

一個體會 **定理 4** 的方式是從極限四則運算的角度出發。回顧單元 2.2 的 **定理 9**, 這個定理有一個很重要的前提: 必須先確定兩數列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ 都收斂的情況下, 才能得知逐項相乘後的數列 $\{c_n\}_{n=1}^\infty \stackrel{\text{定義}}{=\!=} \{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^\infty$ 也是收斂的。如果 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ 其中一個不收斂的話, 那麼極限四則運算的定理無法使用。而 **定理 4** 則是在說明若極限四則運算無法使用的時候, 看看有沒有機會再多說一些什麼事。這裡得到的結論是: 無窮小數列是一類很特別的數列, 當 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ 是無窮小數列, 而 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 只是有界的情況下 (注意到有界數列不見得收斂), 那麼相乘之後的數列 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^\infty$ 仍然是無窮小數列 (當然它是收斂的數列)。

剛才的推論有用到「有界數列不見得是收斂的數列」這件事, 它應該與單元 2.2 的 **定理 8** 一併考量。原定理只是說: 收斂的數列必爲有界的數列。而它的逆敘述不對, 比方說 $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \{(-1)^n\}_{n=1}^\infty$ 即爲一例。

RUd60pewFEQ

現在我們繼續從數列極限的四則運算這個角度出發, 探討另外一類型的極限問題。若數列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 是無窮小數列而數列 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ 是無窮大數列, 欲探討 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^\infty$ 的行爲, 同樣地, 此時無法直接利用極限的四則運算而得到任何結果。事實上, 在上述設定下, 各種情況都可能發生, 比方說:

(A) 考慮 $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty = \{n\}_{n=1}^\infty$, 則 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^\infty = \{1\}_{n=1}^\infty$ 爲收斂的數列。

(B) 考慮 $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \{\frac{1}{n^2}\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty = \{n\}_{n=1}^\infty$, 則 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^\infty = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^\infty$ 是無窮小數列。

(C) 考慮 $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty = \{n^2\}_{n=1}^\infty$, 則 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^\infty = \{n\}_{n=1}^\infty$ 是無窮大數列。

也就是說, 無窮小數列乘上無窮大數列的結果, 它是會被零吸走變成無窮小, 還是無窮大數列比較強勢而讓整體趨於無窮大, 又或者是零與無窮大之間相互拔河與抗衡下達到一個平衡, 在最初步判斷下是無法直接下定論的。

像這類的極限問題, 數學上稱爲 *不定型* (indeterminate form)。這裡所舉的三個例子都叫做 $0\cdot\infty$ 的不定型, 不定型還有很多種類(若仔細分類的話, 總共有七種類型), 各位在微積分課程中所遇到的極限問題, 絕大部份都是不定型的情況, 所以那時候花了相當大的篇幅在探討什麼條件下的不定型會歸結到什麼結論。

而上述關於不定型的極限問題之結果其實與 *等級* (order) 有密切的關聯。爲闡述等級的原理, 首先我們用兩個例子觀察數列的行爲:

例 **5.** 比較數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ 的關聯。

解. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} 2n=\infty$, 而且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=\lim_{n\to\infty}2=2。$$

這個例子告訴我們: 雖然兩個數列 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ 都發散至正無窮大, 但是他們趨於無窮大的行爲是「一致的」; 也就是說, 我們會把上述的現象看成是 $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ 趨於無窮大與 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 趨於無窮大的比值爲 2。這裡的「一致」指的是兩者有一個明確的比例關係趨近於正無窮大。

例 **6.** 比較數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ 的關聯。

解. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\infty$, 而且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}n=\infty。\tag{2}$$

上面的數學式告訴我們: 雖然兩個數列 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ 都發散至正無窮大, 但是兩數列趨於無窮大的行爲有等級或程度上的差別; 也就是說, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ 趨於無窮大比 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 趨於無窮大還要快, 這是式子 (2) 要傳達的意義。

從以上兩個例子, 各位應該可以體會到: 我們研究數列除了探討單一數列的行爲以外, 還會去比較不同數列之間是否有等級的區別。一些量雖然以最初步的方式看待時都會趨近於無窮大, 而我們對於「趨近於無限大」這件事現在開始需要再做更進一步地討論與分類, 這就是「等級」想要傳達的概念。

各位如果對數學的敏銳度夠高的話, 可能也會意識到單元 2.1 的 例 **6** 註記的第一個要點其實與現在要討論的內容是有直接關聯的, 建議各位在看完這個單元的所有討論後再花一點時間回顧極限問題的討論。

關於等級, 現在就給出明確的數學定義。

定義 **7.**

(A) 若兩數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\infty$, 則稱 b_n 比 a_n 而言等級更大, 或是說 b_n 對於 a_n 而言是 高階的無窮大量 (higher order infinity), 記號上用 $a_n\ll b_n, n\to\infty$ 表示。

dsTJi0c4nls

(B) 若兩數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=L\neq 0$, 則稱 b_n 與 a_n 有相同的等級, 或是說 b_n 對於 a_n 而言是 等量的無窮大量 (equal infinity), 記號上用 $a_n\sim b_n, n\to\infty$ 表示。

注意到我們可以用 定理 **2** 將 定義 **7** 檢驗的條件 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\infty$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=L\neq 0$ 分別改成 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ 或是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L'\neq 0$ 以得知兩個無窮大量之間的等級。

等級的概念有許多實際應用, 例如資訊工程中演算法必須考量到該程式的執行效率, 而效率的高與低就是依據時間量級的大或小來判定。

在數學上, 幾個基本數列的等級關係如下:

$$c \ll \ln n \ll n^p(p>0) \ll a^n(a>1) \ll n! \ll n^n, \quad \text{當 } n \to \infty \tag{3}$$

若以無窮小量的觀點看待時, 則會有以下高階無窮小量的列表:

$$\frac{1}{c} \gg \frac{1}{\ln n} \gg \frac{1}{n^p}(p>0) \gg \frac{1}{a^n}(a>1) \gg \frac{1}{n!} \gg \frac{1}{n^n}, \quad \text{當 } n \to \infty$$

各位在初學等級理論的時候, 不妨先把無窮大量的等級關係弄清楚。如前所述, 無窮大量與無窮小量只是一體的兩面, 之後遇到無窮小量的問題時, 再順勢地翻譯而熟悉之。所以接下來的討論, 我們將以無窮大量這個系統仔細認識等級這個概念。

關於式子 (3) 的列表, 以下討論是先建立 $n^p(p>0) \ll a^n(a>1) \ll n! \ll n^n$ 這一部份的關係, 與對數數列 $\ln n$ 有關的等級, 我們留到對數函數的定義還有相關性質都討論完畢之後再補足這部份的論述。倒是這個結論相當重要, 可先記住: 對數數列 $\ln n$ 當 $n \to \infty$ 是一個無窮大數列, 但是它比任何 冪次數列 (power sequence) n^p 的等級來得低 (這裡的 p 可以是正實數, 當 p 是正整數的時候稱爲 多項式數列 (polynomial sequence))。而列表 (3) 的最左式 c 泛指有界數列。

另外一個註記是: 式子 (3) 的列表只是針對不同類型的數列而寫出關係式, 對於 $n^p(p>0)$ 來說, 我們可以更仔細地區分其等級, 比方說, 若 $0<p_1<p_2$, 則 $n^{p_1} \ll n^{p_2}, n \to \infty$。至於 $a^n(a>1)$ 的部份, 則有: 若 $1<a_1<a_2$, 則 $(a_1)^n \ll (a_2)^n, n \to \infty$。

以下三個例題就是要分別證明式子 (3) 除了對數數列以外的列表。

c2vbC-9Ensw

例 **8.** 試證: 當 $n \to \infty$ 時, $n! \ll n^n$。

解**.** 對所有 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \le \frac{1}{n},$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, 由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$; 也就是說, 當 $n \to \infty$ 時, $n! \ll n^n$。

例 **9.** 給定 $a>1$, 試證: 當 $n \to \infty$ 時, $a^n \ll n!$。

證明: 取 $N = 2([\![a]\!]+1) \in \mathbb{N}$, 則當 $n \ge N$ 時

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{N} \cdot \frac{a}{N-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-(N-1)} \cdot \frac{a^{N-1}}{(N-1)!} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2a)^{N-1}}{(N-1)!},$$

因爲

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2a)^{N-1}}{(N-1)!} = \frac{(2a)^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

以及 $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, 由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, 即 $a^n \ll n!$, $n \to \infty$。 □

例 **10.** 給定 $a>1$ 與 $p>0$, 試證: 當 $n\to\infty$ 時, $n^p \ll a^n$。

TN0Av8dNCYQ

證明: 記 $a=1+a_0$, 則 $a_0>0$。當 $n\geq 2$ 時, $n-1=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}(n-2)\geq\frac{1}{2}n$, 由二項式定理 (Binomial Theorem) 得知: 對所有 $n\geq 2$, 都有

$$a^n=(1+a_0)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\cdot 1^{n-k}\cdot(a_0)^k>C_2^n(a_0)^2=\frac{n(n-1)}{2}(a_0)^2\geq\frac{n^2}{4}(a_0)^2=\frac{n^2}{4}(a-1)^2。$$

現分成兩種情況討論:

(A) 若 $p=1$, 則

$$0<\frac{n^p}{a^n}=\frac{n}{a^n}<\frac{4n}{n^2(a-1)^2}=\frac{4}{n(a-1)^2},$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ 而且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n(a-1)^2}=\frac{4}{(a-1)^2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{4}{(a-1)^2}\cdot 0=0$, 所以由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$, 即 $n\ll a^n$, $n\to\infty$。

(B) 若 $p>0, p\neq 1$, 則

$$\frac{n^p}{a^n}=\left(\frac{n}{\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^n}\right)^p,$$

因爲 $a^{\frac{1}{p}}>1$, 由 (A) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^n}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0$, 即 $n^p\ll a^n$, $n\to\infty$。

□

各位以後若遇到極限甚至是級數的問題時, 都可以試著從等級的原理進行觀察, 這將是一種很好的預判法則。