0

高等微積分簡介

高等微積分是被公認爲所有數學系課程中最重要的學科, 在這個人人都看重的學科當中, 不論是老師或學生, 似乎又被「最重要」這三個字綁住而喘不過氣: 學生因爲它最重要而戒愼恐懼, 也知道它最重要卻不知所措; 老師因爲它最重要而狂下猛藥, 也知道它最重要卻無從改善。那些流傳著「高微三修不稀奇」的話, 變成學生修完課後唯一能道出的辛酸史, 卻怎麼也說不出高等微積分課程的實質內涵。

這一章的目的是想從幾個觀點帶大家進入高等微積分課程。單元 0.1 會從課程名稱與數學史的層面介紹高等微積分是什麼樣的學科。單元 0.2 將試圖回答高等微積分課程的難易度, 當中也會解釋自編高等微積分講義的用意與這份講義的特色。有關高等微積分的數學屬性, 在單元 0.3 中會用五個面向逐一介紹; 此外我們還可以用另外五種數學上的思維再次體會本課程, 這是單元 0.4 之重點所在。

每個人都想要學好高等微積分, 但是在學習過程中頻頻遇到困難又該如何解決, 在單元 0.5 我們會從學習的層面提供幾個可以實行的大原則; 另一方面, 你有沒有想過你的上課方式是否也需要大幅調整呢? 我會在單元 0.6 分享我的上課經驗。本課程的另一個特色是平時作業的設計, 在單元 0.7 會解釋平時作業的設計理念以及寫作業需要注意的事情。在單元 0.8 的部份, 我請幾位修過這門課的同學寫下心得, 從他們的現身說法中, 看看是否能與各位產生共鳴。至於單元 0.9 則是本章的結語。

0.1 什麼是高等微積分?

學生在修高等微積分 (advanced calculus) 這門課之前, 先問他們:「你覺得高等微積分會是什麼樣的課程?」得到的答案大多會是: 「應該是比微積分課程來說在計算上還要再困難一點的課吧?」或者是「把微積分課沒講或是沒有講清楚的部份再拿出來講解一次。」極少數學生在學習之前的回覆是比較貼近於這門課的精神。

我們不禁要問的是: 爲什麼會產生這樣的落差? 我想有幾個理由分析如下: 一來, 多數人在選課的時候只顧課名是什麼, 然後單純用課程名稱自行腦補出對於這門課的種種幻想。就像我幾年前認識一個人, 我從他的朋友口中得知他得了憂鬱症, 結果有一天和他吃飯, 我竟然跟他暢談我是怎麼樣藉由運動或是休閒的方式消除心中的鬱悶, 那次的聊天我講得天花亂墜但卻看不出他有變得比較愉悅。之後我上網搜尋有關憂鬱症的資料, 頓時發現我好蠢, 我趕緊跟他道歉, 因爲他的狀況我真的沒有辦法幫助他。各位如果以後遇到一些生病的朋友千萬不要自以爲很厲害可以幫他什麼, 而是要先確定自己對該症狀是否有正確的認識, 再採取適當的方法給予協助。

另一方面, 一門課的中心思想與學生在修課前對於這門課的想法有很大的落差, 這是制度面所導致。多數學生認爲: 反正這門課是必修課, 在強迫中獎的情形下, 我也沒有必要先知道這門課想要學些什麼, 反正所有修課的學生到時候都在熱鍋當中一起掙扎(蒸炸) 之下, 看是要並肩作戰還是同歸於盡, 一切都以且戰且走的方式進行。反倒是大家會非常積極地調查某某通識課怎麼樣、老師風評如何、課堂上好不好玩、會不會有很多報告要繳交之類的問題, 一旦發現是門好課(又涼又甜的課就叫好課?), 甚至會提早到教室就爲了搶到黃單選上課程。

學生對於課程的誤解, 我不認爲一切都要怪罪於學生爲什麼沒有在修這門課之前就應積極主動地了解它。誠如剛才所說, 這門課的課名本身就有誤導的嫌疑, 加上必修制度的加持之下, 自然就不應該預期會有什麼理想的回覆。也因此, 有愈來愈多的學校將高等微積分這門課的課名改成數學分析 (mathematical analysis) 或分析導論 (an introduction to mathematical analysis)。或許你會覺得將課程換個名稱又有什麼了不起? 但我認爲這的確會有一些影響。試想: 如果當初的問題改成:「你覺得數學分析會是什麼樣的課程?」, 你的回答還會跟原來的說法一樣嗎? 是不是看到「分析」這個帶著神秘的詞彙就比較不敢胡亂猜測或腦補, 甚至會願意去網路搜尋一下是怎麼回事呢?

雖說微積分是由英國物理學家、數學家牛頓 (I. Newton, 1643–1727) 與德國哲學家、數學家萊布尼茲 (G. W. Leibniz, 1646–1716) 建立, 但是如果你把牛頓和萊布尼茲抓來寫瑋哥的微積分期末測驗卷, 他們或許有機會可以低空飛過, 但是他們要是直接參加瑋哥的高等微積分期末測驗, 鐵定死當。這是因爲高等微積分這門課要學習的東西, 將專注於十九世紀從柯西 (A. L. Cauchy, 1789–1857) 附近的年代開始, 經過許多數學家的努力, 把當初牛頓與萊布尼茲所建立的微積分系統下, 一直讓人產生很多不確定的數學邏輯完整地補齊。我沒有讀過什麼數學史, 所以這方面的文獻有勞感興趣的讀者自行去考古, 這邊不敢隨便亂講話, 但是這裡我想要給大家一個概念: 數學理論其實是經過很長的時間得以成熟, 在理論成形的初期並非一開始就是堅固而不破的論述, 而是在很多情況下會從數學的直覺或感覺而認爲應該要如此, 然後怎樣做會不正確。而那些說不上來的數學感覺, 就是有待澄清的疑問, 在數學家不斷地質疑與挑戰, 有時候是設法重新詮釋或是改用別的觀點解釋, 又或者是在一個論述中不斷地增減所需的條件, 去蕪存菁過後才成爲現在看到的理論與定理的樣貌。在這之中, 一個新的觀點也可能在初期帶來熱烈的迴響, 但是過一段時間後由於某些因素(比方說論述起來非常不便, 或是這個理論無法和其它相關的理論橫向連繫) 使得這個觀點逐漸式微。

以微積分爲例, 雖說微積分的鼻祖是牛頓與萊布尼茲, 但對於牛頓和萊布尼茲那個年代的人來說, 他們就跟現在的各位一樣, 把「實數視爲數線上的一個點」這樣的想法就可以把微積分學得不錯, 但是若要他們再繼續闡述實數更深刻的意涵, 卻又無法說出個道理。而這門課第一個星期要介紹的實數完備性, 這是到十九世紀的時候大家才逐漸理解並接受。所以高等微積分課要討論的事情, 是在了解十九世紀之後的數學家做了什麼事, 然後這些想法爲什麼可以把微積分的主結構弄得堅固, 讓微積分變成除了是理科同學的必修課之外, 一些商管、生物、醫學或金融科系的學生也需要學習的一門重要學科。而在大學中幾乎所有的數學課程都是採用時間倒敘的方式鋪陳, 理由在於後人花了很多工夫終於把理論弄得完整, 於是以此爲基礎, 再往前回顧些內容時, 在學習的層面來看會有邏輯清楚的踏實感。

各位應該要感到惜福, 因爲我們生於這個年代, 可以把微積分的理論看得一清二楚, 也唯有數學系二年級的高等微積分課程才有機會徹底體會微積分的奧義, 其它地方沒有機會也沒有管道了解它, 所以不妨從這樣的思維看待高等微積分, 好好體會前人智慧的結晶, 如此將帶來求學與求知的快樂。

0.2 高等微積分是有多困難?

這裡我們就打開天窗說亮話, 好好地討論眼前的困境。高等微積分既然是數學系最重要的一門學科, 所以教師在開設這門課程時, 勢必是以嚴格把關的態度面對, 只要學生在學習階段中沒有學到一個程度, 那就只能請他們隔年再次努力。雖然我沒有確實向歷年開設高等微積分課程的老師們調閱資料, 但是據聞每一年學生在高等微積分課程中未達標準的比例至少是三分之一, 甚至到二分之一與三分之二之多。這時我們不禁要問一個問題:

> 爲什麼有許多學生修了這麼多次同樣的課程仍舊無法達到課程的最低要求?

若你問我高等微積分難嗎? 我會跟你說沒有。我也幫你們問了高等微積分助教:「你覺得在求學的過程中, 高等微積分對你來說難嗎?」, 結果助教也說還好。每次講這些風涼話聽在重修生的耳裡格外地刺耳, 對於第一次修高等微積分的學生來說, 不時地聽到學長姊說高等微積分好可怕, 卻又聽到老師與助教說不難, 到底誰說的話才是對的? 甚至班上的學霸也抱著戒慎恐懼的心情進到教室, 真有需要壓力這麼大嗎? 瑋哥不是一心希望同學在學習數學時應抱持著快樂學習的心態, 但是在這樣的氛圍下又怎麼可能快樂得起來呢?

會有上述現象絕非單一原因所造成, 但是若直接將問題歸咎於學生不認真或是不用功而作結並沒有解決任何問題, 況且重修這門課的同學比例偏高, 當中必定有同學曾經努力過只是最後悲劇收場。撇開互相怪罪的事不談, 有件事我覺得是發生這一連串事情而遲遲未解的很大原因。就拿微積分課程與高等微積分課程相比, 微積分課程計算居多證明偏少而高等微積分證明偏多計算較少, 這是多數同學都知道的事, 但是另一個隱藏的因素學生看不到也不曉得的, 那就是: 以微積分課來說, 所有老師對這門課的授課目標比較一致, 彼此之間有共同的默契知道學生在微積分課程中該學什麼, 什麼是次要的, 可是對於高等微積分課程來說, 這個共識基本上不存在。

教師之間對於同一門課的共識差異爲什麼關係著學生的修課通過率? 或許我們先問, 如何知道老師之間對一門課的共識度有多大? 若找出歷年高等微積分的課程大綱, 比方說裡面一定會有「連續函數」這個單元, 所以我們就推論教師之間在連續函數的主題彼此有共識嗎? 做這樣的推論其實是有問題的, 因爲單純「連續函數」一詞是非常大的框架, 要用什麼方式詮釋連續函數這個單元才是問題所在。高等微積分課程中常常有一個概念卻有好幾套說法的現象, 例如我們可以在實數軸 $\mathbb{R}$ 上討論連續函數, 也可以直接以一般的歐氏空間 $\mathbb{R}^n$ 討論連續函數的性質, 還可以將連續函數的概念用抽象化的方式像是度量空間 (metric space) (X, d) 搭配拓樸學 (topology) 的語言去詮釋它。同樣一個連續函數的概念, 只要設定的研究對象不同, 則會有不同的詮釋方法, 而且這之間產生的落差會非常大。你不妨去問問曾經修好幾次高等微積分課程的學長姊一個問題:「在修了同樣課名的課程後, 你覺得這幾次的課程內容一樣嗎?」除非他們是修同一個老師的課 (但重修的人基本上不太會選同樣的老師), 不然他們會告訴你:「我感覺我在修課名雖然相同但是內容好像完全不同的課程。」

換言之, 只要授課老師對於同一門課不具共識, 他們講出來的內容就會聽起來不同, 唯有學到精通的那些人才會知道這些是在講同一回事, 但是對於初學者或是學了但是沒有學到位的同學來說是不會發現這個關係。或許另一個了解課程共識度差異大小的做法是: 若你到圖書館把所有和高等微積分與數學分析的教科書全部拿出來翻一翻, 就會發現到這些書的難易度差異很大; 也就是說, 當老師選定了哪一本教科書, 大概也決定了修課學生在這門課通過率的高低。

對我來說, 目前所完成的第一件事情, 就是寫了一份適合於彰師大數學系學生的教材。由於坊間高等微積分教科書並沒有一本讓我覺得非常滿意可以直接當成上課用的教材, 每本高等微積分書都有優點也有美中不足的地方, 於是我想要整理出每本書的優點並重新編寫成課程講義。此外, 我認爲學生在修完高等微積分後有些內容是必須要帶走的觀念, 那麼這些內容不論難易也必須放進教材中。

整體說來, 這份高等微積分講義有以下幾個特色:

(A) 盡量避免枯燥乏味的三段式論述 — 定義、定理、證明 — 之無窮迴圈呈現教材。我會在教材中試圖寫下我對這些數學概念的想法, 或是當初學這些內容時發生在自己身上的故事與心得。生活中有很多現象都和高等微積分要傳達的意象相近甚至相同, 只是這個概念用數學的符號及數學語言包裝下顯得生澀又不平易近人, 在講義或是課堂當中, 若能適當地運用比喻或是類比, 相信會讓各位覺得高等微積分其實是很貼近生活的。而這樣的教材一定有別於其它教科書, 希望有助學生對高等微積分的認識, 至少期能有一種想要繼續學習的慾望。

    數學的內容, 對於初學者而言勢必產生不少學習上的障礙, 但對數學老師來說, 在課堂上教學的難點並非數學的內容。所謂聞道有先後, 老師也只不過是早你們二十年 (以上) 學會了這些東西, 教師在這些年的歷練下對於該學科有一定程度的體悟。而教學現場的難點其實是在數學背後的意義傳達不易。早期我在教學的時候太注重於表面, 只把操作的層面解釋清楚, 給學生有一個最基本的認識, 而學生的學習甚至各種測驗也多半只是在檢視形式上的理解。然而在教學上如何達到更高的境界對我來說是一項更大的挑戰, 將心中的想法記錄下來並且寫一些其它教科書中絕對看不到的內容或許是一個不錯的開始。

(B) 教材中關於數學論述層面盡量力求完整呈現。我看過很多書籍, 想必作者的數學程度非常好, 所以在很多地方都會寫著「顯然」或是「留給讀者自行證明」的話語, 但是在我的學習過程中, 常常就是因爲這個問題不太會又自己無法完成的情形下, 才會著手去翻閱其它文獻看看是否能從中多得一些訊息, 結果看到書上寫著「留給讀者自行證明」的字句時顯得十分無奈。此外, 我遇過很多學生問我問題, 在我看來這些問題是很簡單的, 但對初學者而言卻是個盲點, 所以一件事情到底是簡單還是困難似乎也不能純憑個人心證。所以我在寫這份教材時給自己的期許是: 仔細把每件事的來龍去脈交代清楚, 不要寫一些無助於學習的文字。

    而我這麼做其實還有另一個原因, 多數學生在數學寫作的成熟度還是顯得不足, 甚至感到畏懼。寫下這份教材, 希望每件事都寫清楚之下, 至少這就是一個學習的模板, 如果你覺得這樣的寫法或論述方式很好, 就把它學起來; 若你覺得這樣寫不理想, 那麼也可以重想否有更好的呈現方式, 拓展出一套具有個人特色的數學寫作風格。

(C) 這份教材的內容對於想要繼續深造的同學來說是不夠的, 但這些內容若能好好地學過一次一定會有很穩固的基礎繼續向前學習。這裡必須說明的是: 彰師大數學系學生大學畢業後的出路, 要繼續攻讀碩士甚至博士 (這裡指的是純數學) 的比例並非最大宗。面對學生興趣多樣化的情形下, 整體課程的設計也變得困難, 考量到一個班級學生學習需求的最大公約數, 卻也不可能迎合所有人的胃口。所以打算往純數學領域前進的同學必須注意到: 這一年的課程學完對你日後的求學是不足的, 必須自己再去進修, 多找其它的資源自學。對於要走統計、資訊, 或是想要當國、高中老師的同學我想這些內容應該算是堪用。

(D) 高等微積分的學習重點與微積分課程的重點不同, 所以教材的內容會截然不同。微積分課程大致上還是著重於如何操作, 如何確實計算微分、積分還有相關的應用。而高等微積分的課程重點是在解釋微積分的原理, 課程目標是要解釋爲什麼當初微積分課程中告訴你這樣的操作是合法的。所以這兩門課可能會選用同樣的例題, 但是探討的重心不同, 於是內容的鋪陳也會差異很大。例如一個極限問題, 微積分課程是告訴你在什麼樣的操作或是轉換下可以把極限值求出。而高等微積分則是要了解: 極限到底是什麼樣的概念? 爲什麼我們會用這個實數表示該極限問題的極限值? 以一種追根究柢的精神, 從極限的精確定義出發給出完整的論述。

微積分課程中介紹了很多的定理, 那時是把這些定理當成已知然後處理實際問題; 也就是說, 微積分課程中, 我們是先接受定理是對的情況下, 當遇到一個問題想使用這個定理時, 只要確定該問題對於這個定理的所有前提都正確無誤下, 就可以順勢地使用定理之結論。

而那些曾經當成已知的定理, 在高等微積分課程中就必須逐一解釋並給予證明, 甚至有一些數學上更根本的問題, 也是各位當初覺得這是再淸楚不過的東西, 都會被拿出來重新質問以獲得澄淸。最經典的幾個例子是: 實數是什麼? 指數函數是什麼? 對數函數又是什麼? 目前的你可能會信誓旦旦地說出一番對於實數與指、對數的大道理, 但是只要仔細思考你所說的話, 便會發現你的說詞處處都有漏洞, 甚至還有循環論證的現象。也因此, 關於實數的完備性、還有指數與對數函數的建構都應在高等微積分課程中補充說明。

多數人會覺得微積分很容易、高等微積分很難。但我也有遇過高等微積分學得很好而微積分三修的同學。我認識的那位同學, 他很喜歡思考, 對於邏輯的推演很感興趣, 特別對那些分析的手法非常著迷, 高等微積分的課程也就是在培養這方面的思維, 所以他樂在其中。而微積分表面上看來是在解題, 但這當中隱藏著很多技巧, 一個重積分的題目, 到底要用直角坐標系、柱坐標、球坐標還是特殊的坐標, 甚至要怎麼令變數就足夠惱人了, 有些題目甚至帶著特殊的型式, 解題的方法很神奇, 在你沒看過解法之前想不到就是想不到, 看完之後又有一種無言的感覺。所以微積分和高等微積分可以說是表面上相近實則是兩門不同的學科。

以上除了和各位分析雖然課名相同, 但是老師的選材也會影響學生對於高等微積分的內容之接受度與適應力, 所以我花了一年的時間編寫出一份較爲白話的數學教材。期能幫助學生對於這門課有更淸楚的認識。現在回到這一單元的標題: 高等微積分到底是有多困難? 這裡我們必須先講淸楚「困難」與「不困難」的意義。以我的學習經驗, 大學部的所有數學課程都不困難, 這裡所謂「不困難」是指所有數學概念或理論一定可以弄得一淸二楚, 不會令我產生一絲困惑的感覺。既然所有事情都可以弄淸楚, 那種學到東西而且心情舒坦的感覺, 不就是各位當初學數學的心境嗎? 數學觀念想通了則可舉一反三, 這正是數學的價值之一。然而, 若要把這些數學概念弄得一淸二楚, 是需要花足夠的時間才能解決。大學課程的數學理論不再像是高中數學那樣單一式的邏輯, 而是複合式甚至帶有架構式的層面, 幾乎不可能一學就會, 而是必須反覆思索並且不斷嘗試下才有可能澄淸所有疑點。把一個數學觀念弄淸楚所需要的時間長短當然因人而異, 但這勢必要進行長期投資。

所以大家會覺得高等微積分很困難的這個想法產生, 多半都是時間的問題, 當你沒有充足的時間把疑點逐一澄淸, 心中就無法對該學科有一種踏實感。在時間的壓力下, 除了要趕在期中測驗或期末測驗之前把高等微積分學到一個地步, 又還有很多其它科目要同時處理, 另有非課業的活動想要完成, 總時間固定的情形下, 如何有效率的學習才是「困難」所在。

0.3 高等微積分的數學屬性

這一單元我想要介紹高等微積分的幾個數學屬性。在正式學習高等微積分前, 若先對該學科的特色有一個初步認識, 然後在學習過程中經常拿出來思考, 想必會有更深刻的體悟。

(A) 高等微積分是一門利用不等式處理等式的學科。

大學以前的數學, 多半都是用等號串起所有的解題過程。比方說某個問題是要證明兩個數 A 和 B 相等, 那麼你可以考慮 $A-B$, 透過這個問題所給的條件進行代數轉換, 逐步整理、替換、相消等方法最後化簡成 0, 那麼就證明了 $A=B$。

高等微積分課程中將提供與上述方式完全不同的解題思維。若想證明 A 和 B 相等, 其原則是: 先設法證明 $A \leq B$, 再想辦法證明 $A \geq B$, 那麼這兩個結論合併則得 $A=B$。

這個想法看起來沒什麼了不起, 但高等微積分的重頭戲是在證明 $A \leq B$ 與 $A \geq B$ 的方法, 它提供了一種全新的思維處理不等式。以下將指出數學分析的基本精神:

「$A \leq B$」等價於「對任意正數 $\varepsilon > 0$, 都有 $A < B + \varepsilon$」。

這裡先證明該命題的等價性。($\Rightarrow$) 若 $A \leq B$, 而 ε 是任意正數, 則有 $A + 0 < B + \varepsilon$, 即 $A < B + \varepsilon$。($\Leftarrow$) 若對任意正數 $\varepsilon > 0$, 都有 $A < B + \varepsilon$, 但是 $A > B$, 取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$, 那麼 $A < B + \frac{A-B}{2} = \frac{A+B}{2} < \frac{A+A}{2} = A$ 矛盾, 因此 $A \leq B$。

同理, 我們也可以寫出 $A \geq B$ 的等價條件 (只要將上面討論的 A 和 B 角色對調即可):

「$A \geq B$」等價於「對任意正數 $\varepsilon > 0$, 都有 $A + \varepsilon > B$」。

注意到 $A < B + \varepsilon$ 可改寫成 $A - B < \varepsilon$, 而 $A + \varepsilon > B$ 可改寫成 $-\varepsilon < A - B$。現將兩結果合併, 並引進絕對值 (absolute value) 的記號, 則得

「$A = B$」等價於「對任意正數 $\varepsilon > 0$, 都有 $A - B < \varepsilon$ 而且 $-\varepsilon < A - B$」。
等價於「對任意正數 $\varepsilon > 0$, 都有 $|A - B| < \varepsilon$」。

上述分析的巧思各位應細細體會。在等號的世界裡, 三一律 (trichotomy law) 說明兩個數相同表示兩數不允許有任何誤差。當等號問題改成了不等號 $|A-B| < \varepsilon$, 某個程度看起來是放寬了標準: 給定一個正數 $\varepsilon > 0$, 則這個正數可以理解成兩數之間容許的誤差, 此時, 確定 $|A-B| < \varepsilon$ 這個不等式是比較容易驗證的。在這看似放寬條件的情形下, 爲什麼最後又能證得 $A = B$ 呢? 關鍵在於正數 $\varepsilon > 0$ 的任意性。看起來 ε 的確提供了一個彼此容許的誤差, 但加上「任意」這個詞, 意味著這個誤差可以完全地控制以致沒有誤差。

高等微積分課程中將不斷地看到這種思路反覆出現, 實際上這是極限 (limit) 定義當中的一個重要環節。因此, 處理各種不等式的能力大家勢必要及早習慣並且熟練。

(B) 高等微積分的數學論述具有互動式的思維。

各位一定玩過大老二撲克牌或是象棋、西洋棋等棋藝活動。玩牌或下棋的特色是一種互動式的過程, 以玩牌爲例, 你是根據前一個玩家所出的牌, 再對照自己的手牌才決定最後的出牌策略。這種與玩家互動的感覺在高等微積分中是經常出現的模式。

極限 (limit) 的精確定義就是最經典的例子, 給定函數 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 以及 $x_0\in(a,b)$, 則 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ 定義如下:

> 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得對所有 $0<|x-x_0|<\delta$ 都有 $|f(x)-L|<\varepsilon$。

以下欲解釋極限定義與玩牌或下棋的互動之間有什麼相近之處。現有兩玩家, 不妨稱爲玩家 A 與玩家 B,「對任意 $\varepsilon>0$」表示玩家 A 隨意出一張手牌, 而「存在 $\delta>0$」表示玩家 B 有牌可出, 而這張牌並不是隨便亂出的, 它必須滿足和 ε 有關的條件 (玩家 A 出的牌) 才做出的策略, 當玩家 B 的牌一給出, 我們必須檢查後面的「對所有 $0<|x-x_0|<\delta$ 都有 $|f(x)-L|<\varepsilon$」是否成立。比方說, 玩家 A 出了方塊 7, 而玩家 B 可以把手上的黑桃 8 打出, 也可以出梅花 10, 極限定義中的存在性類比於玩家 B 至少有一張手牌可出。這兩張牌的確滿足大老二的遊戲規則: 黑桃 8 可壓過方塊 7, 梅花 10 也可以壓過方塊 7, 但是玩家 B 若是出紅心 5 的話那就犯規了。

極限是數學分析中的靈魂, 既然極限的定義伴隨著互動的感覺, 凡是從極限衍生出的所有概念也必然有互動的成份。各位可以多從玩牌的各種情境與這類的數學概念做類比, 便能快速地領略到其中的精髓。

(C) 高等微積分的內容以及論述的邏輯中經常有先後順序的關係。以下指出三種與先後順序有關的面向供大家體會。

(C1) 數學上有一大部份的研究都是在探討順序互換的問題。

什麼是順序互換的問題呢? 我們知道先穿襪子再穿鞋子與先穿鞋子再穿襪子兩者結果不同, 而先穿衣服再穿褲子與先穿褲子再穿衣服兩者結果相同。這裡用三個例子說明數學操作順序先後的意義:

(1) 連續函數的意義是指: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$。左式是先把 x 代入函數值, 再討論函數值對於 x 趨近於 x_0 的極限; 右式是先看 x 趨近於 x_0 的極限, 再把極限值代入函數得到函數值。連續函數表示取極限和代入函數值兩個操作的順序可互換。

(2) 數列四則運算 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\lim\limits_{n\to\infty} b_n$。左式是對於 $n\in\mathbb{N}$, 先將對應的項相加 $a_n+b_n\overset{\text{記}}{=}c_n$, 再看數列的極限 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$。右式是先各別求得數列的極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=M$, 再把極限值相加 $L+M$。數列四則運算則是指: 在數列極限各自皆存在的情形下, 極限的操作與加法的操作順序可互換。

(3) 關於式子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right)$, 一個是先求和再求導, 另一個是先求導再求和。這個等式的成立其實是大哉問, 並非任何收斂的函數項級數等號都成立。此時必須引進均勻收斂 (uniformly convergent) 並仔細探討等式成立的可行性。

(C2) 解題或證明過程也有先後順序的問題。

系上從某一年開始漸漸盛行密室逃脫的遊戲。我說玩密室逃脫比唸高等微積分還要困難你一定會哈哈大笑, 可是這對我來說也真的是如此啊! 這麼說好了, 若把我關在密室裡然後獨自把所有謎團都解出來的話, 可能三、四個小時 (甚至更久) 跑不掉, 可是高等微積分作業我不用一個小時就寫完了啊!

兩年前的大一迎新我加入了假大一的行列, 冒充是你同學或是你學弟, 那時候我自認爲是位以假亂真的大一新生。猶記那三天的活動中有好幾個密室逃脫的遊戲, 我在玩遊戲的初期幾乎是一個謎題都解不出來 (所以很有大一新生的蠢樣吧!), 但這三天的密集訓練下, 我好像掌握了不少訣竅, 除了暗號與密碼破解愈來愈順手, 我發現到每個密室逃脫在架構上也有共通性: 想要逃離被鎖的房間, 那麼必須找到房門鎖, 而房門鎖是放在一個保險箱中, 要先打開保險箱才能取出鑰匙, 然而必須知道四位數密碼才能開啟保險箱, 整個房間分佈著各種奇怪的線索提示著到底是哪四個數字還有它的排列。所以若要逃出房間, 我們要先從房間內的各種資訊拼湊出四位數後才能打開保險箱, 然後取出鑰匙後就可以打開房門逃離出去。

我用密室逃脫的故事是想跟大家說明: 大學數學課程會注重解決問題的先後順序, 有時順序錯誤了將無法得到結論。這裡舉一個數學的例子以闡明上段文字之意義:

例. 若 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 爲連續函數, 而且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, 則 $f(x)$ 有界。

我們看一下這個問題的處理的方法 (以下說明只是解決問題的策略, 並非嚴格證明):

解. 先從 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ 這個條件得到: 存在 $X \in \mathbb{R}$ 使得函數 $f(x)$ 在 (X, ∞) 上滿足 $|f(x)| < 1$。再用有界閉區間上函數的連續性得知: 存在 $M_1 > 0$ 使得 $f(x)$ 在 $[0, X]$ 上滿足 $|f(x)| \le M_1$。因此取 $M = \max(1, M_1)$ 即爲所求。

特別注意到, 在這個問題中, 我們無法先得有界閉區間上的 $M_1 > 0$ 再找函數在 (X, ∞) 的有界性, 這是因爲極限的概念中, 是從給定函數值的上、下界而確定 X, 無法從 X 得到函數值的上、下界。

(C3) 數學寫作中隱藏著邏輯推理的先後順序。

羅必達法則或許是各位在處理極限問題時最愛使用的一個方法。但是你知道羅必達法則正確的數學邏輯是什麼嗎? 例如以下極限問題, 不論是你的作答過程, 或是教科書的編排都會這麼寫:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}\right) \overset{(\frac{0}{0},L')}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}\right)\\ &\overset{(\frac{0}{0},L')}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+1+x} = \frac{1}{2}。\end{aligned} \tag{1}$$

上述寫法只是一個使用羅必達法則時的精簡表示 (甚至已經被公認爲正式寫法)。實際上, 根據羅必達法則, 正確的邏輯順序應爲如下陳述:

證明: 想要計算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$, 這個極限是多少並不清楚, 但它經過通分後是不定型, 所以改考慮分子、分母各自求導後的極限問題 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}\right)$; 至於這個新的極限問題的極限值是多少仍然不知道, 但它也是不定型, 所以改考慮對此分子、分母各自求導後的另外一個極限問題 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2+x}\right)$。因爲此極限值爲 $\frac{1}{2}$, 所以由羅必達法則得知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}\right)=\frac{1}{2}$, 最後再用一次羅必達法則將原極限問題與後面的極限用等號連接起來而作結。 $\square$

由上述討論可知: (1) 式的等號並非從頭開始寫到尾, 而是從後面的等號逐一確定回來。而羅必達法則的先後順序是數學寫作上的問題, 我們看到: 依照後者這種數學論述, 寫下來是順的邏輯, 但是比較難立即抓到重點; 而 (1) 式在數學寫作上算是合法, 因爲前後兩式的等號確實可以建立, 只是心中必須了解哪個等式是先建立哪個等式是後來才建立的。

(D) 高等微積分中必須體會「有限」與「無限」還有這兩者帶來的影響。

數學上的有限與無限應再分成兩種情況討論:

(D1) 集合元素個數的有限與無限: 一個集合元素個數的分類會用基數 (cardinality) 的原理討論, 它有明確的數學定義, 但這裡試用較爲口語的方式解釋這個概念。若一個集合內的元素數得完, 則說集合的元素個數有限; 若集合中的元素數不完或是根本無法計數則稱集合元素個數無限。

集合元素個數的有限或無限會影響很多操作的可行性, 例如最大元素 (maximum element) 與最小元素 (minimum element) 的存在性就是一個很大的差異。給定一個非空集合 E 以及 $x_0\in E$, 若對所有 $x\in E$ 都有 $x\le x_0$, 則稱 x_0 是集合 E 中的最大元素。若一個集合的元素個數有限, 則最大元素必存在; 若一個集合的元素個數無限, 則無法確定是否有最大元素。很多數學理論必須建立在個數有限的情形下才能繼續推論。又如緊緻性 (compactness) 也是一種將無限化爲有限的概念, 所以在具有緊緻性的集合中討論數學常常會有較好的結果。

這裡不妨做個註記, 緊緻性這個詞初看之下怪可怕的, 它是一個經過數學抽象化之後的產物, 先不論這麼抽象的詞, 在實數 $\mathbb{R}$ 上的緊緻集等價於有界閉區間, 於是你會看到很多高等微積分的定理都是以有界閉區間當作定理的前提。

(D2) 無限大與等級的建立: 無限大是一個概念, 它並不是很大很大的數, 而是比想像中還要大的過程。數學上有很多量都趨近於無限大, 但是只知道這樣是不夠的, 我們還要花時間仔細觀察趨近於無限大的行爲, 這時必須透過等級 (order) 的方式理解; 換句話說, 等級是一種在無限大的意義下再細分這些量重要程度的方法。在高等微積分課程中必須仔細辨思以等級的方式預判各種數學上的推論。

等級的研究在高等數學上是非常重要的理論, 應用面也非常廣, 像是瑕積分的收斂性、級數的收斂發散討論還有泰勒級數的理論都是奠基於等級的確實理解。而無限大與無窮小其實是一體的兩面, 所以無窮小的討論也算是這類問題的探討。

(E) 極限這個操作進入數學之後, 所有事情都變成有條件的成立。

微積分的研究主體是極限, 極限是一個很複雜的概念, 若把極限這個概念融入數學系統中, 那麼數學上所有大小事都必須重新討論。我們光是在微積分課程中就花了一年的時間討論如何操作極限並認識由極限建立起的微分與積分理論, 現在到了高等微積分課程, 我們又要再花一年的時間好好解釋極限的原理, 由此可見理解極限是需要長時間的消化與吸收。

這裡舉兩個例子說明帶有極限的世界中數學的複雜度。

定理. 絕對收斂 (absolutely convergent) 的級數才有加法交換律。

兩個數字 $a+b=b+a$ 的加法交換律想必各位會覺得這件事非常自然, 但是無限多個數字相加 (這裡需要用極限的方式定義) 是否有交換律就不是顯而易見的事了。此定理是告知: 無窮級數不見得有加法交換律, 必須要求它是絕對收斂的級數才有加法交換律。

定理. 若函數數列 $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 皆連續, 而且 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 區間上均勻收斂 (uniformly convergent) 到函數 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, 則函數 $f(x)$ 是連續函數。

這個定理是在研究函數的連續性是否可以透過極限移轉到取極限後的函數 $f(x)$ 上, 而定理欲說明: 普通的逐點收斂 (pointwise convergent) 情況下是不夠的, 必須要有更強的收斂條件 — 均勻收斂 — 才會成立。

這些定理的特色, 在下結論之前都會列出一些條件, 這表示漂亮的數學結果並非總是發生, 而高等微積分課程就是在仔細研究什麼情況下才會有好結果。未來你將看到更多定理, 條件可能更多, 那時必須再逐一審視每個條件的意義, 以及爲什麼需要這些條件。

0.4 學高等微積分時需要注意哪些事情?

前一單元介紹的是高等微積分的數學屬性, 在著手學習高等微積分的主題時, 除了跟著教材逐字逐句理解之外, 我們還要注意哪些事情呢? 或是說, 我們還可以用什麼不同的角度再次領略數學的內容呢? 這裡提出五種面向供各位參考。

(A) 每個邏輯論述中的存在、唯一、所有、指定等關係必須弄得一清二楚。

前一單元提到, 因爲極限與無窮的概念放到數學中, 幾乎所有的結論都是有條件的成立, 所以命題中和「有」與「無」相關字詞的描述顯得非常關鍵, 甚至要分辨清楚所在位置。

比較以下兩個定理, 觀察這兩個定理語句上有什麼差異。

定理. 考慮無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 若極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 則極限值唯一。

定理. 若函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 滿足對所有 $x', x'' \in \mathbb{R}$ 都有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{2}|x' - x''|$, 則存在唯一 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $f(\xi) = \xi$。

第一個定理是說明: 先接受數列極限存在的情況下, 則可推得極限值只有一個。至於數列什麼時候極限存在? 什麼時候極限不存在? 這個定理並沒有說明, 需要藉助別的定理或判別法才能得到極限的存在性。而第二個定理的特色是: 函數在某個條件下, 不動點 (fixed point) 具有存在性與唯一性。這個條件除了告知存在性以外, 也可以確定不動點只有一個。

各位是否發現這兩個定理有關「存在」與「唯一」的位置是下在不太一樣的地方, 這些關鍵字的所在位置之微妙差異是需要細細體會的, 高等微積分中有很多觀念也是看起來很像, 實際上是有不同的意義, 所以學習的時候必須花時間澄清其中的差異。

(B) 數學是經過長時間累積淬鍊出抽象化的產物, 初學時期應盡可能透過實際例子體會數學。

數學的特色在於一個概念可用在很多事物上。舉例而言, 線性代數課程中提到向量空間這個抽象的概念, 經過課程中詳細討論向量空間的結構(包括向量空間與基底之間的關聯、兩個向量空間當中的線性變換等關係) 之下, 它可以用在非常廣泛的層面, 甚至在微分、積分、數列的收斂、函數空間理論都可以見到向量空間的影子, 這就是數學可以舉一反三的代表。

在數學的進程中, 曾經有一個時期, 數學家極力把各種概念盡可能抽象化, 試圖將每件事情取出最核心的概念, 然後以高觀點的角度看問題, 認爲這麼做可以把事情看得一淸二楚。但是過度抽象化卻也帶來了一些反效果, 比方說多數人無法很快從抽象的符號與邏輯體會這些概念, 於是抽象化導致人們與數學感生疏離感, 逐漸對數學不感興趣, 對於那些提出數學無用論的人也多了一個拒絕學習數學的藉口。

有些同學對上段文字感同身受, 因爲他們的大一生活正遭受了數學抽象化帶來的衝擊, 總覺得高中數學與大學數學是兩回事, 彼此沒有任何關聯。其實數學上每個概念都是循序漸進的, 只是各位沒有花工夫努力串聯大學課程和高中課程, 大學教師也可能礙於時間限制只能不斷地講述大學課程, 卻輕忽了課程的銜接。到了此時此刻, 從微積分到高等微積分之間又會再次遇到難以適應抽象化的問題。學習進階課程應把舊有知識複習, 再將舊觀念與新觀念搭起橋樑。高等微積分的實例都可以在微積分中找到, 所以各位若在高等微積分的學習過程中一直有不適應的現象, 應從微積分所學的內容找尋實例以體會抽象概念。

(C) 數理邏輯的複雜度不僅只於表面上的陳述, 需要反覆思考各種邏輯的關係。

講義或書上所寫的定理向來是以直述的方式呈現, 然而一個定理隱藏著更多的事情, 最常見的關係是「若 P 則 Q」與「非 Q 則非 P」的等價性, 所以一個很經典的例子是:「若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$」, 它是一個無窮級數收斂的必要條件之正面陳述, 然而實際應用上更常使用其否逆命題:「若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在, 或是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。」, 它提供了一個檢驗法以確定無窮級數發散。

一個定理可能會有很多的前提組成, 比方說:「有界閉區間上的連續函數之值域有界。」, 若將這句話仔細解讀, 便會發現有三個前提: 區間有界 (bounded)、區間封閉 (closed)、函數連續 (continuous), 而結論是值域有界。除了原定理的認識外, 你需要再花時間思考的是: 無界閉區間上

的連續函數是否值域有界? 有界開區間上的連續函數值域有界嗎? 有界閉區間上的不連續函數值域是否有界? 將每個條件逐一否定並設法找到反例的方法可以把一個定理看地更清楚, 也可以體會爲什麼這個定理的每個前提都缺一不可。

(D) 定理的重點掌握與數學寫作的養成必須兼顧。

高等數學的定理與證明經常是長篇大論而非一行文的樣貌, 所以各位必須養成大量閱讀的能力與習慣。若是你可以把第 0 章的所有內容都仔細地看過並想過一次, 那麼這就是一個很好的開始。對於那些習慣看懶人包掌握平時資訊的人, 建議不要再看別人製作的懶人包了, 而是試著自己從頭分析事情的始末, 然後學會自己製作懶人包。透過自己的力量製作懶人包, 是在訓練如何快速找到事情的關鍵, 並以簡單明瞭又有條理的方式述說事情的原委, 這是一種未來面對新事物時能夠產生獨到見解之根基。

以上述的精神用於高等微積分的學習中, 則可以透過兩階段的學習法: 在看每個定理證明時, 第一次就好好地仔細思考整個論述在邏輯上的正確性; 然後第二次再看定理時, 採用重點整理的方式, 試著用一、兩句精簡的話指出整個論述的關鍵步驟, 把它寫在證明的旁邊相互對照, 日後複習便能快速掌握要領。

另一方面, 數學寫作 (mathematical writing) 對於數學系的學生來說是必須養成的能力, 也就是應鞭策自己要逐步做到嚴謹有條理而且完整的論述能力, 至於如何加強數學寫作能力? 在這門課當中, 因爲我會把課程中提到的數學內容力求完整地呈現在講義當中, 所以你自然可以利用講義內容學習各種數學寫作的技巧。此外, 每次繳交平時作業後, 我會幫各位批改, 告知你在寫作上的各式優缺點, 更可以指出一些不易被察覺的事。最後, 我也會提供自己編寫作業的解答, 讓大家多一個樣版學習如何好好論述。

(E) 體認到數學是帶有缺陷美的學問。

在上大學以前, 我覺得數學是一個完美無瑕的學問, 除了那些縝密的數學推理外, 更令我讚嘆的是數學可以描繪各種自然界的現象。但是上大學後我逐漸對數學之美產生幻滅, 倒不是那些一層又一層複雜論述讓我喪失對數學的好感, 像極限的互動之美一直深植我心。而美感的幻滅是來自於我逐漸體會到數學與現實面真的存在一個落差。

第一個令我產生很大的衝擊是連續函數的意義, 以前一直覺得連續函數的圖形就是一個不斷的線條, 但是自從黎曼函數 (Riemann function) 的現身, 在圖形上 (其實它無法畫出明確的函數圖形) 看起來就是到處都有間斷的感覺, 但是利用數學上關於「連續」的定義可證明黎曼函數在無理點連續而有理點不連續, 這件事讓我們必須重新思考平時口語所說的連續和數學上的連續之一致性, 它們到底差別在哪? 又如泰勒級數的理論中, 存在著光滑函數卻非解析函數的例子也是一個很不可思議的現象。若各位有機會唸數學系碩士班的話, 在實分析或測度論的課程中, 關於「測度」一詞, 原先是希望它能具有所謂「量尺」最自然的四個條件, 但經過數學的推演下發現: 不存在一種測度同時滿足這四個性質, 所以勢必退而求其次地把某一個條件放掉 (放弱) 以繼續鋪陳理論。

所以各位在學數學時, 可以多觀察數學面和真實面之間的落差, 有些事情你可能很直覺地會認爲如此, 但是用數學的定義討論下可能會有一些意想不到的情況發生。上述所提的幾個例子是想說明: 這種帶有缺陷的美才是數學的本質。

綜合而言, 數學的學習並非拘泥於表面上的文字與邏輯, 而是要透過一些方式了解更多背後的意義, 經常跳脫既有的框架思考會有許多額外的收穫。

0.5 如何學好學高等微積分?

前兩個單元共介紹了十個觀點指出高等微積分的屬性以及不同層面的數學思維可重新看待它。這一個單元試著從學習的角度出發, 提供幾個學高等微積分的大原則, 甚至我覺得這些原則也適用於一般的數學學科, 各位應該試一試。

(A) 事先準備絕對有助於學習。

前面已跟各位說明大學課程困難之所在, 其實是在於準備的時間不足, 那麼將學習時間拉長一定是把數學學好的一個方法, 所以我才會一直鼓勵大家在寒暑假就應該準備課程。

學問無止境, 而且學習的時間軸不應切得一刀兩斷, 學期間狂念書而不玩樂而寒暑假狂玩樂而不念書是非常怪的做法; 把一個科目的學習目標只放在學期成績是否及格或是要衝到很高分是有些短視, 也並非求學的真締, 多想想數學的各式美妙及學問的強大。將學習目標設定在體會該學科的精髓, 成績的高低、學分的取得只不過是學制下的階段性評量指標, 心中一直抱持著深入了解學問的夢想, 那些制度面的問題我不認爲有什麼阻礙。

此外, 既然這些數學內容是遲早都要會的東西, 早些時間學習當然是有好處的, 而且在寒暑假比較閒暇的時間看數學會有不同的體會。你甚至可以在寒暑假的時候多跟我聊數學, 我會有更多時間與你分享各種經驗。若你錯過了寒暑假的學習時間, 那就是回到以往頗具壓力的學習情境中, 這真的很可惜, 而且這對整體的學習其實是比較不利的, 時間緊迫的學習多半只是短暫的記憶, 學期一結束就什麼都忘光, 那麼這段時間的投資也都白費。

(B) 改變讀書習慣: 每天花一點時間對付它; 平均分散學習時間。

回想你習得一項技能的過程, 比方說打籃球、游泳、騎腳踏車或是學會某種樂器, 便會知道學習事物並且學到一個地步並非一朝一夕的事。某個數學觀念第一次看不懂很正常, 隔天再想一次, 若還是不清楚, 再給自己機會第三天再重新思考。數學上很多觀念其實只是熟悉度的問題, 當你學會一些操作方式, 或是知道它的某些原則, 經過幾次的練習就會逐漸上手, 事後想想數學好像也只不過是如此而已。不妨給自己三次機會好了, 針對不會的東西, 每天看一次, 連續三天都想一次, 若還是有問題, 就要開始找其它方式解決。

另一方面, 想一想你喜歡的運動當中, 有哪一個是你透過體育課當中學到精熟的? 結論應該是沒有。你喜歡打籃球而且變得很強, 是因爲你每天放學後和三、五好友在球場上切磋球技之下才日漸成熟, 或是在你加入系隊或校隊後經過長時間的特訓才有成效。換言之, 頻率的提升遠比時

間的長短來的重要。一個星期花七個小時在讀高等微積分, 結果是每個星期日早上十點唸到下午五點而其它時間一概不理, 這樣的學習效益是遠低於每天晚上七點唸到八點也是一週讀七小時的學習效果。若你想把高等微積分學好, 試著採取高頻率的方式進行, 每天特別空出一段時間專屬於你和高等微積分的甜蜜約會。

(C) 淸楚知道自己的困難是什麼, 才有可能解決困難。

各位 (或者更多對數學不感興趣的人) 常常會把數學很困難掛在嘴邊, 但是整天想著數學很難其實也無濟於事, 反而經常這麼想會讓自己陷入更困惑的情境中。

現在我們把問題聚焦在更細部的困難: 當你在學高等微積分課程時某個觀念或某個習題寫不出來所遇到的困難又該如何解決。困難其實分成兩個階段, 在你尚未解決問題前, 必須靠自己的力量淸楚知道你的困難在哪裡。

第一個階段是: 我不知道要解決什麼問題, 也就是看到題目就傻眼的情形; 雖然每個字都認識, 但是串起來的一句話就完全不曉得在說什麼。這個情況通常表示你對課程內容不熟悉。當你確定你的困難是這類型時, 就可以開始問同學、問助教或問老師以求觀念上的解決, 也可以翻閱其它教科書或上網查資料, 會有很多幫助你澄淸疑問的資源, 只是若用網路查資料時, 通常需要更多的辨思能力, 因爲網路資源是對是錯有時候不容易辨識, 但是這些資料也都可以和其他人進一步討論以解惑。至於書本上的內容會有較高的可信度。

第二個階段是: 我知道這個問題在問什麼, 但我不知道要怎麼解決這個問題; 也就是說, 你知道什麼東西需要證明, 但是要證明它卻難以下手。這時是牽涉到數學方法論的問題。數學證明的手法千變萬化, 有些是比較標準的, 比方說數學歸納法, 但有更多情況是所謂的神來一筆。何不把神來一筆當成是一個學習上的樂趣呢? 針對這種靈光一現的想法, 試著用一句話在旁邊註解, 甚至把當中的讚嘆寫下。我的書本常常會寫著「這太強大了!」或是「太扯了, 這怎麼可能會想到。」之類的話, 記錄自己當時看到的心情, 日後再翻閱的時候, 必能有一番新的體會。

簡單說來, 當你遇到了困難無法解決, 其實你必須先知道你的困難在哪裡, 不知道自己的困難在哪才是最困難的事; 當你曉得你的困難在哪, 那麼一切都好辦事。

(D) 學會把遇到的困難描述淸楚。

若要解決數學上實際遇到的困難, 我認爲有一件事情很重要, 那就是務必要把你遇到的困難描述淸楚。若一個人生病了, 進到診所跟醫生說:「我頭痛、拉肚子。」當醫生只聽到這六個字你覺得他會有什麼反應或想法呢? 進到診所的病人, 多半都具有頭痛拉肚子的症狀, 所以你只跟醫生講這些其實沒有什麼意義。若病人能夠把這兩天所發生的事情說淸楚, 比方說:「我昨天晚上吃完飯後就覺得很不舒服, 所以很早就去休息, 結果半夜開始一直拉肚子, 害得我一早起來根本不敢吃東西; 回想頭痛前發生的事, 我是去某一間餐廳與朋友聚餐, 我吃了不少生魚片, 不太確定是不是吃到不新鮮的生魚片所致。和我一起聚餐的朋友好像都沒吃生魚片, 他們並沒有不舒服的情況。」

當病人把事情發生的情況述說清楚, 醫生會對你的病情多一層了解, 醫生有可能就會想到一個小時前有另一位曾經在餐廳吃了不新鮮的食物而拉肚子的病人也上門求診, 進而判斷你的狀況是食物中毒的機會很大, 然後就可以給予適當的藥物治療並給予建議。

同理, 當你遇到數學上的困難, 若告訴我:「高等微積分很難」、「極限不太會」、「單元 2.1 看不懂」, 我也只能笑笑地告訴你:「喔, 那你加油!」當然有一種可能是你只是需要一些精神上的鼓勵, 或者你說的這些話只是情緒上的抒發, 不然我提供的一種泛泛的建議大概不會是什麼好的解藥, 因爲它並沒有對症下藥。若是你說:「我在認識極限的定義當中關於 N 的選取有困難。就這個例題來說, 爲什麼給了 $\varepsilon > 0$ 之後, N 要取 $\max(3, \llbracket\frac{1}{\varepsilon}\rrbracket + 1)$ 呢? 我只寫 $\llbracket\frac{1}{\varepsilon}\rrbracket + 1$ 不行嗎? 或是我寫 $\max(3, \llbracket\frac{2}{\varepsilon}\rrbracket + 1)$ 可不可以呢?」在這種明確的問題下進行討論, 我就可以給予較爲實際的幫助。

有時你會對數學產生困惑是來自於你不清楚學這個東西的目的, 這也是可以提出來討論的。有同學曾經問我:「連續函數的概念我可以接受, 可是之後突然多了一個均勻連續 (uniformly continuous) 的概念, 你雖然試著用三歲小孩的玩具詮釋均勻連續的意義, 但數學上均勻連續這個概念對後續高等微積分理論的影響是什麼呢?」這樣的問題是非常好的問題, 我們學數學時常需要知道背後的動機或目的, 必須先說服自己學這個東西的重要性, 然後才有往下學習的慾望。學習數學其實還蠻怕照單全收且漫無目的, 你必須時時問自己學這個觀念之後要做什麼? 是要解決什麼問題? 若你無法想出一番道理, 這就是一個與老師交流的好時機。

有些同學過於害羞, 覺得問問題是一件很丟臉的事, 這個觀念我覺得應立即改正。學問並非生來就會, 若是這些學問你都會的話其實你現在也不會待在這邊。換言之, 身爲一個學生其實是有不會的權利, 遲遲不敢發問是會逐漸影響學習成效。我認爲大學期間必須要培養出提問的能力與習慣, 因爲現在是資訊爆炸的時代, 也是分工合作的社會, 每個人不可能也不需要當萬事通, 培養一項自己專精的技能, 遇到自己非擅長的問題, 找對專家詢問並尋求合作, 這是順應當今趨勢的一個模式。

(E) 養成個人辨思能力; 勇於提出質疑與挑戰。

連續兩年我在系上小畢典的時候向畢業生提到大家都太乖, 說各位「太乖」並不是一個很好的稱讚, 而是想要勉勵大家日後面對各種事物不要人云亦云, 必須要有自己的見解, 並且要勇於提出質疑與挑戰。

會有如此感觸是因爲我在一次上課時介紹了某個數學觀念, 那次的課堂上學生並未提出任何疑問, 但是當天晚上我回想上課的過程時竟發現有一個地方講錯了, 以致在下次的課堂又花了很多時間改正並重新解釋。我事後問了幾位同學, 他們跟我說:「那次上課當下覺得我講得有一點怪, 但又認爲我應該不會出錯, 所以就沒有提出質疑。」

我曾經有一陣子想要在教學上當個完美無缺的老師, 也就是要求自己在講課時不允許有任何錯誤出現, 雖然這是一種教學上高標準的要求, 但是在經過幾次類似像上述的事件發生後, 我頓時意識到我在做一件沒什麼必要的堅持, 甚至這種堅持有害學生的學習, 因爲我發現此舉長久下

來將造成一言堂的現象, 當學生把老師所說的話都當成聖旨不敢違抗, 就算有疑慮也不願與老師交流, 這種師長的言論過於強勢的現象與數學的精神有所牴觸, 也有礙數學的發展。

若要解決上課一言堂的現象, 可能有另一個更嚴重的問題是: 學生上大學後對處理數學的信心愈來愈不足。想當初你可能在中學時期被冠上數學神童或數學天才之名, 怎麼一進大學之後就完全崩盤了呢? 我想有幾個原因是必須體認到的。中學階段的數學, 通常題目本身或是解題的策略是直截了當的; 也就是說, 這些學習的內容多半是單一且固定式的描述以及不斷地檢測學到的東西是否有充分的認識, 所以有些人常常會有一些小撇步, 或是不知道從哪裡看來或聽來的速算公式, 因爲每次套用都萬無一失, 所以當大家的焦點放在速算或是秒殺的氛圍時, 就容易被塑造成數學神童之美譽。

到了大學, 學習的重點有所改變, 你將面臨到一個很大關卡, 那就是對「數學」的重新認識, 因爲數學不再是以往算一算或是有個什麼題型讓你歸納整理, 再加上抽象化的概念突然爆增, 原文書的閱讀也帶來挑戰; 實際上數學分成很多領域, 每個領域都是一門頗具特色的學科, 在你對此屬性不了解之前, 若看待的方式錯誤, 也會影響你對數學的正確認識。這些事情綜合起來也難怪學生會對自己愈來愈沒信心。

這兩個問題其實棘手又難解決, 台灣的教育環境一直欠缺給學生發表意見的機會, 也沒有什麼方法培養這種表達能力。而我發現教師在課堂上的一些失誤反而是解決上述問題的一個管道, 這是一件意想不到的收穫; 它可以激發學生在課堂上反覆思考, 產生辨思能力, 而在提出質疑的時候, 若是學生自己的想法不周慮, 他能從討論中得到澄清; 若是能夠確實指出錯誤, 學生也能從提問的過程中大大地增加自信心。然而這件事有勞各位應更加積極行動才可能改善。

或許與這件事類似地實踐是: 修課同學在學期間若指出講義的錯誤則可以得到學期分數的加分。這一年編寫的教材, 雖然花了很多時間準備並再三檢查, 但時間有時緊迫, 思慮百密總有一疏, 我也會有盲點, 所以實在需要大家的幫忙與協助。當學生指出講義上的錯誤, 我會感到非常開心, 因爲我看到學生最實質的成長, 我也唯有透過這種見到自己錯誤的方式成長。

(F) 建立一套專屬自己解決問題的能力。

一門課程的主體除了相關知識的傳遞, 也提供從該學科的觀點看待問題的工具與方法, 但這並不代表未來你只能用課堂上提到的方法解決問題。

建議各位培養出一套獨特看待問題的方式。我們分成兩個層面再繼續說明:

(F1) 善用電腦與網路: 我們生於科技發達的年代, 電腦與網路的便利性不只在生活上帶來很多好處, 用電腦與網路輔助專業領域的學習絕對是一個優勢。比方說連上網路, 輸入關鍵字上網查資料, 看看網路文章的說法是什麼, 常常就會看到不同的見解, 所以我們可以把網路當作是終生學習的老師。此外, 學會使用數學軟體, 例如我推薦 `Desmos Calculator` 還有 `Wolfram Alpha` 這兩個免費線上數學軟體, 若能熟悉它們, 也會是解決問題的利器, 縱使它們可能無法直接解決問題, 但也將提供很好的觀察。

(F2) 解題思路應更多元: 各位都曉得, 很多數學的解題方法常常不只一種, 它可以是千變萬化的。有些同學面對一個問題, 只想學固定一種解題方法, 我認爲這麼做長久下來是不理想的。當思考模式過於單一, 那麼這種直線式的思考下, 只要有某一個地方卡住或行不通, 問題就無法解決。我覺得學數學是一種蜘蛛網狀的學習模式, 每個觀念有如分佈在平面上的點, 然後要設法建立每個觀念之間的聯繫, 將平面上任兩點都用直線相連, 當這些線連接則產生網狀的分佈, 那麼數學思維的組織就會非常嚴密, 當遇到問題時, 這些網狀思路處理就算有一條線斷掉也不至於崩解, 還是可以透過其它線路串接以解決問題。

以上我用了讓人眼睛爲之一亮的標題, 是想誘導各位可以想一想如何調整自己的學習步調或方法。每個人何嘗不想把高等微積分學好, 卻時常力不從心, 在看完前面幾個諫言之後, 能不能身體力行就各憑本事與毅力了。

0.6　課堂上該如何學習?

不曉得大家有沒有想過一個問題: 學生在課堂上是要學些什麼呢? 我想多數人一定會說:「這有什麼好問的? 當然就是學習這個科目的學問啊!」這個回答當然沒有錯, 但是我更想了解的是:「在課堂中各位是透過什麼方法或做了哪些事然後學到東西呢?」

這裡不妨說一下我的學習經驗好了。我在學微積分的時候, 記得有兩節課是星期三的第七、八節, 而我第五、六節是空堂, 所以我就待在圖書館預習等一下上課的東西, 書本翻一翻其實就把多數的內容理解過一次, 甚至有許多計算就跟著書本所寫逐一檢查之後也驗證無誤, 然而有幾個不太懂的觀念, 或是有些覺得很怪的地方, 就在書本上做記號。到了上課的時候, 其實我並不是從頭到尾全神貫注地在上課, 對於兩個小時前看過或檢查過的東西, 那些是已經會的內容, 在上課過程中我就以輕鬆的心情再看一次; 那兩節課其實我在等著老師什麼時候要解釋我在書上做記號的那些不太會的地方, 在那個時候我就非常專心, 聽著老師的講解, 看他是不是有一些對於這件事新的見解; 另一方面, 我看著黑板上老師所寫的內容, 其實我並不是拘泥於黑板上的一字一句, 而是在觀察老師的手勢或是哪個突如其來的動作, 想著他是怎麼樣把我不會或不懂的東西透過這些稍縱即逝的動作或話術把問題變得很自然。所以我在課堂上的學習, 是在研究老師說的話還有舉手投足以及眉宇間的各種表情。通常這兩節課我就可以把當初的疑惑解決。

有的同學過於保守, 老師在黑板上寫的一字一句都毫不保留地抄寫下來, 雖然這是一個做筆記的習慣, 但實際上這個方式是不理想的, 過於把上課筆記寫得完整其實無形中失去了許多從聽的過程中學到東西。總之, 如何善用課堂時間關係著你的學習成效, 整節課若只是盲目地抄寫其實是浪費時間的事, 也完全沒有意義, 寫筆記是一種輔助學習的方式, 但是它可能妨礙你在視聽上的學習。

那麼要怎麼解決這個問題呢? 老話一句, 事前預習, 你就可以掌握課堂內容, 如此就能妥善運用上課時間, 完全知道什麼是重要的東西需要記錄下來, 而什麼東西根本不需要抄, 把時間留做視聽上的觀察。透過預習, 先用自己的能力把大部份要學習的內容消化, 這是在培養自學的能力, 而自學能力的養成可以說是未來你想要更上一層樓的重要關鍵。對於那些在自學的過程中無法澄清的問題, 那麼就把問題帶到教室來, 當你心中帶著目的 (把心中問題解決) 而來教室上課時, 則會讓上課這件事變得更有意義, 就不致迷失在各種邏輯、符號當中而跳脫不出來。

0.7 關於寫作業的默契

說到我開設的高等微積分課程, 除了自編教材希望各位學習順利外, 另一個很大的課程特色是平時作業的設計。這裡我想要寫一些關於平時作業的想法, 希望修課同學知道這門課的平時作業之設計原理與願景。以下從老師端 (作業設計原理) 與學生端 (如何看待作業) 這兩個層面討論之。

0.7.1 作業設計原理

一個課程的平時成績若用作業分數決定或用小考分數決定, 你會比較喜歡何者? 有同學反應我出的作業題目難度很高又是怎麼一回事? 如何從作業將學習成效極大化? 這些問題將在這個單元一一回答。

(A) 本課程的平時成績是以作業爲主而非小考組成。

一般的數學課程設計, 在平時成績的部份, 最簡單的設計就是繳交作業或是舉行小考兩種的搭配。這門課將以平時作業爲主而不採用數學小考。將考試次數降到最低是牽涉到我的教學理念, 因爲我認爲學習的核心必須以確實了解學問爲主, 而學習的動機應出自學問本身, 因爲學問很有趣、很重要、很有用等理由作爲學習的出發點。至於考試只是一個檢視自己這陣子對於該學科掌握度的方法與過程, 不應拿來當作學習的唯一或是終極目標。換言之, 以考試導向的學習甚至爲了考試而改變所有的教學策略與相關配套是我不認同的事。

前一個單元曾經鼓勵同學提問, 若問題聚焦在數學的本質, 那麼我一定會樂意並盡可能地回覆。但是若你突然問我:「這個會不會考?」我一定會大暴走。問會不會考的言下之意是: 若這個內容會考才要學, 若它不考就不學。以會不會考而選擇性地學習過於功利主義而且有違求學宗旨。所以如果你問我會不會考這類的問題, 我一定會反問你:「你什麼時候要考吃飯, 像是如何咀嚼、呑嚥? 如果沒有要舉行吃飯考試的話, 那你爲什麼要吃飯?」把學習的每一個過程都和吃飯類比, 從「吃飯理論」重新檢視你的學習意義與目的, 很多事情必能豁然開朗。

另一方面, 根據一項研究指出[1]: 分析每日作息與腦部神經刺激的關係中, 寫作業會讓波峰處於極大的狀態。爲了解決作業的問題, 你必須從原有的課程內容以及過往的經驗建立新的想法, 還要將新觀念與舊觀念重新組織, 甚至需要很多反覆修正的過程才能完成, 它是讓自己對認識學問的一個很好的方法。

總體來說, 在這門課對於作業的部份若好好投資將會學到很多事情, 以下我還會說明關於作業的幾個配套措施。

(B) 作業的題型將著重於複合式的進階問題。

有同學在教學意見中反應:「老師, 你上課都講那麼簡單的題目, 然後作業超難都想不出來。」我設計的作業有難度這件事我並不否認, 但是背後有幾個原因必須了解。首先, 在課堂上介紹簡單的範例而不講解困難的題目, 這是課堂教學中經常陷入的兩難情境, 一般說來同學在初學時期對觀念都還不太熟悉, 所以勢必要從最簡單的例題解釋起, 不宜過於複雜, 避免失焦。另一方

[1] `https://affect.media.mit.edu/pdfs/10.Poh-etal-TBME-EDA-tests.pdf`

面, 各位在寫作業前就會先把上課講過的東西先弄懂, 在學會課程內容後卻又看到不會寫的作業, 自然會有上課內容簡單而作業困難的想法。

同學指出作業題目偏難, 也如實地說明我在作業題目類型選擇上的一些想法。打開任何一本原文教科書, 它之所以又厚又重的原因是每一章節後面放了大量的習題, 但那些習題當中有一大部份是操作類的題目或是與章節內容相似度很高的題目。關於這類型的題目, 我認爲學生可以透過自己的力量加強練習並提升能力, 若是你在這類型的問題中一直產生困難, 應主動尋求協助, 別忘了助教和我都是樂於和你討論並且將問題澄清的伙伴。

在每週作業題目必須精選的情況下, 那些比較標準的操作問題就會偏少, 於是作業會著重在複合式的問題 (要使用多個觀念解題、跨單元或跨章節的問題等), 這也是學生認爲作業偏難的主因。數學的發展很長久, 就高等微積分的課程內容來說也已經是一百多年的事了, 這當中不乏有趣且重要的題目, 礙於課堂時間不夠的關係無法一一分享, 所以有時我會把這些內容放在習題當中讓各位思考並體會。

在寫作業的期間, 各位當然可以問我寫作業時遇到的困難, 不過我並不會馬上告訴你答案, 而是會從你提問的過程中協助你找到問題所在, 是哪一個觀念錯誤? 或是你少用了哪個條件? 還是重點完全放錯? 在確定真正的盲點後, 我才會給予一些提示, 但最終仍然需要你獨力完成。

有些同學在初期會興致高昂地來問我作業問題, 但是一次兩次之後就不來問了。我在猜測他們應該是覺得每次找我問作業問題的時候, 我都不是直接說出解法, 而是不斷地反問同學對於每一個觀念是否有清楚的認識。我是採用這種方法來了解同學到底是在哪個地方卡關, 最後才會總結同學的問題。這樣的討論過程是花時間的, 快則十分鐘慢則要半小時或更久, 所以沒有耐性的同學最終就會選擇不再問問題。而我的看法是: 這件事牽涉到的是認同感, 相信這種討論方式有助於學習的人, 之後就會繼續向我請教作業上遇到的困難。

(C) 每次繳交作業後會提供作業解答。

本課程原則上每個星期會有指定的作業必須準時繳交, 而在繳交的時程過後我會公佈該次作業的解答。每次作業的答案都是親自完成的文件, 公佈作業答案是從我開始教學以來到目前爲止都會完成的事。

公佈作業答案的主要目的是要解決學生在寫習題時遇到的困難。前面我曾提及有些同學在高等微積分中付出相當的努力但是以悲劇收場。若再仔細研究其原因, 便會發現到: 學生時常不知道也不清楚自己寫出來的東西是有問題的。若這些問題沒有在期中、期末測驗前獲得解決, 當這些有問題的論述又出現在卷子上, 自然又會被打叉而得不到任何分數。

在我提供自己所寫的作業解答後, 學生對於每個問題至少有一個參考的依據, 透過自學的方式對照這些答案和自己曾經所寫的內容之差異, 以此修正自己的缺失, 將問題澄清。

此外, 自己寫作業解答, 我可以清楚知道這個習題是不是過於困難 (超出課程範圍) 以確實掌握該課程, 而且講義與作業答案都出於個人之手, 兩資源的數學思路較有一致性, 學生在看這些文件時比較不會突兀。另外, 曾有同學抱怨作業題目太多, 至少我自己寫解答這個做法, 你們寫一題我也必須寫一題, 這麼一來也算是一種以身作則之態度。

0.7.2 學生如何看待作業?

就學生端的部份, 除了準時完成每週習題之外, 還需要注意哪些事情才會提升學習成效呢? 這裡分享兩個你可能不曾注意過的事情供各位省思。

(A) 正視自己的錯誤並即時解決。

作業發還時, 當你看到作業成績 90 分時有何感想? 有些同學很樂觀, 得到 90 分覺得非常開心 (可能上大學後就再也沒看到過這麼高的分數了?) 接著就把作業收起來從此不再理會。

在我的課程中, 作業分數拿 90 分應該要抱著一則以喜一則以憂的態度面對, 喜的部份或許就由各位自行補充說明, 現在要解釋憂的部份, 像是作業發還後就置之不理的舉動其實是令人憂心的。想一想數學的特色, 一個論述必須從頭到尾都要嚴謹且無誤, 正因爲如此, 這也是學數學的難點: 一段論述當中只要有一個環節不通, 則整段論述都是無效的。在體認到數學的嚴謹性之下, 我們在學習數學時也應更加謹慎。

作業 90 分, 意味著你在這個單元存在著不會或是弄錯的地方, 這些部份若不即時解決, 預想未來在處理綜合型問題時, 就會產生每個環節都有不會或錯誤之處, 以致沒有一個問題得以順利解決。

在我的課程中, 作業分數基本上是一種鼓勵的性質, 每星期認真寫作業應該給予適當的回饋。但是另一方面理應再思考爲什麼沒有給你滿分, 少給的分數是一種警惕, 提醒你裡面還有不會或是沒有弄清楚的地方, 這個既存的風險若沒有即時處理則會愈來愈大洞。

(B) 從錯誤中學習, 不要毀屍滅跡。

經過一些時間的觀察, 我發現有些同學有一個共同的現象, 他們每個星期的作業都寫得很完美, 幾乎每次都拿到滿分, 但是期中測驗與期末測驗卻總是不太理想。這件事讓我感到十分困惑, 因爲我向來都認爲學生只要平時按部就班地把作業認真完成, 基本上大型測驗都不成問題。後來才了解到他們的平時作業之所以完美, 是因爲這份作業經過很多次修改後才得以完善。換言之, 在前幾次的解題過程我是完全看不到的。

作業經常塗塗改改, 其實是來自於有些不太正確的思維已被定型, 當新的問題一來, 腦中浮現的頭一個想法仍然是那個被定型的思路, 然後寫下去之後發現不太對, 就急著塗掉重寫。那些曾經寫過的東西塗掉了, 你就看不到當初所犯的錯誤, 也無法從錯誤中學習, 這種急於毀屍滅跡的做法是一種隱性的危機, 長久下來是不利於整體的學習。

我們做事情不可能第一次就做得非常完美, 正視自己的缺點是很重要的, 毀屍滅跡是一種無法察覺自己缺點的做法。那又該怎麼辦呢? 當然就是保留全屍 — 完整留下你曾經寫過的東西。比方說一個題目你改到第三個版本才總算寫到完全正確, 那麼你就應該保留前面兩個版本, 針對前面兩個版本錯誤的地方, 用不同顏色的筆註記出錯的地方並寫下相應的心得。用不同顏色的筆註記可以讓你日後複習時可以快速回憶當初的錯誤避免再犯。

有同學覺得他被冤枉了, 因爲我發給同學的作業, 作答空間並不大, 而同學會認爲答案必須要寫在那麼小的區塊才行, 也因此就得塗塗改改把最後的成果呈現繳交。在我的課程中, 你的作業是

可以很隨興的, 不需要總是寫在框格中, 只要註明清楚你最終的版本在哪邊即可, 對於那些前幾次寫錯的屍體, 你可以用鉛筆把它框起來, 打一個淡淡的叉, 旁邊註記一下「這是錯誤的, 詳見後面所寫」。另外準備 A4 紙張 (這大概是我比較龜毛一點的要求, 請用 A4 紙張重寫, 我比較方便整理所有同學的作業), 把後面幾次作答的內容寫在新的紙張, 我如果有空的話 (或者你希望我幫忙看前幾個版本哪裡有誤, 也請在作業上註明) 就會幫忙找出問題的源頭, 那些地方通常是進步的主要來源。

作業是一個你我之間的一個對話框, 目的是在解決課業上各種疑問。有些同學會寫下關於這個題目的感想或疑問, 像是「我想了三天才想出來」、「這個題目也太猛」、「我這樣寫可以嗎」等話語, 這樣也很好, 我也會跟你有另一層次的對話。

0.8 從修課學生的觀點看高等微積分

這一單元相較於其它節單元來說是新的內容。經過 108 學年度順利帶完一個班級的高等微積分課程, 對這些修過課的同學而言, 他們又是怎麼認識並看待這門課程, 這是我感到好奇的地方。於是我找了幾位同學, 他們很願意分享這一年的學習心得, 當中有第一次學就學得很好的, 也有高年級的同學重新回顧這門課的看法, 此外也有外系同學的修課心得。看看他們的現身說法是否可以與各位產生一些共鳴, 進而知道接下來要如何準備高等微積分。

0.8.1 數學系二年級學生修完高等微積分課的心得

經過這一年修高等微積分下來, 我認爲高等微積分並不難, 不過它的確是一門需要花時間去弄懂的學問。至少在修課前不要帶著一些偏見, 認爲高等微積分很難、我根本沒辦法、哪個老師好過哪個老師難過等等的, 要回到學習的初心, 只要肯下功夫, 一年下來保證你的證明能力還有高等數學的感覺都會大大的提升, 而這正是數學系的精神不是嗎?

高等微積分就是把大一微積分所學的每件事都再澄清一次, 以往是用已知的結果去計算得到答案, 而現在則是反過來, 證明爲什麼這些事會對, 是基於什麼樣的「假設」— 這是重點, 如果沒去注意這樣的細節, 往後學更多, 這些來龍去脈會搞混。所以在修課前要有這樣的認知, 就是微積分和高等微積分的屬性是截然不同, 但是內容和微積分相似, 只是變成證明而已, 所以有空的話也可以複習微積分, 也會對於學高等微積分有幫助。

至於高等微積分的學習重點有以下:

(1) ε-δ 語言一定要會使用, 一整年下來都在玩這個東西, 特別是任意性, 存在性, 哪個先哪個後。

(2) 不等式的操作, 對於你的「目標式子」與「現有的式子」之間要如何達成, 這當中會用到很多技巧, 而這些技巧就是建立於你的觀察, 所以在寫一個證明之前, 在腦袋或是在旁邊就要先有個雛形, 設法達到目標。

(3) 預判的能力, 這就是建立於等級 (order) 和一些經驗, 證明是一回事, 重點在於要先知道這個東西是收斂或是發散之後你也才能去證明, 否則也無從下手。所以各個變量之間的依存關係, 到底誰比較強, 誰比較弱, 甚至還要再抓它的下一個等級出來會是重點。

對於準備要修高等微積分的同學, 我的建議有以下:

(1) 每天花一點時間複習今天所講過的內容, 有些東西真的不是馬上聽馬上懂, 而你基礎沒打好, 後面也會跟著越來越糟。其實高等微積分的「套路」都差不多是那樣, 你只要一開始先學好, 後面都是類似的, 學起來會很快, 所以不懂的地方一定要馬上澄清。

(2) 如前面所提, 遇到一個定理的時候, 一定要知道他是基於什麼樣的「假設」, 所以你可以試試把某個條件拿掉, 那它又會出現哪些問題呢? 這樣反向思考很快就能掌握到這個定理的核心。

(3) 要習慣問自己「爲什麼」, 爲什麼這個條件是這樣, 結論是那樣; 爲什麼這個等式會成立; 爲什麼不是這樣而是那樣, 一來是可以知道自己的問題所在, 二來是從中了解數學分析到底在幹嘛。

(4) 一年下來你會學到非常多的東西, 所以要學會自己做「分類」。例如證明級數收斂有幾種方法、每個判別法的差別、使用的時機、要怎麼用等等的都要一清二楚。就是每一個事情還會再分成很多細項, 要去分類、統整才不會學了一堆都是零散的東西。切記不要誤用定理、判別法之類的, 會顯得好像什麼都不懂亂用一樣。

其實高等微積分這門學問就像是拿顯微鏡在看事情一樣, 進入「微觀」的世界, 這就是極限 (limit) 的概念, 也是和以往中學數學最大的不同, 有限情況成立的東西取極限之後就不見得會成立了。高等微積分的正確名字叫「數學分析」, 心裡可以把它改成這個名字, 或許就會對這門學科有不一樣的看法, 總之要好好掌握所謂「分析」的精神, 加油!

0.8.2 數學系二年級學生從寫作業的過程體會高等微積分

其實開始學高等微積分這門課之前都不太知道是要學些什麼, 不像其它科目, 例如微分方程或是代數, 都可以大概知道會探討些什麼, 而高等微積分這門課, 從直覺上來看會想說是要教比較難的微積分嗎? 那假如大一的時候微積分沒學好該怎麼辦?

直到瑋哥給我們數學分析這本書後, 這才解決了心中的疑問, 慢慢了解到微積分沒學好還是可以有重新開始的機會, 原來高等微積分就是一門分析的課程, 試著用各種方式去討論微積分內我們認爲理所當然的事情, 這些計算過程爲什麼會成立, 爲何我們可以很直接就能得到這樣的結果。

還記得課程一開始是在介紹實數的完備性, 從戴德金切割與確界原理開始探討, 讓我們知道要如何確立實數完備性。猶記第一週的作業我可以說寫得非常辛苦, 因爲之前的習慣都是在最後一天才開始寫作業, 沒有時間可以好好統整上課的內容, 也沒有什麼思考的時間, 所以完全不知道該從何開始寫起, 一下要確定找的那個數是集合的上界, 然後又要說比它小的數都不會是集合的上界, 我根本沒有任何頭緒, 要怎麼憑空找出一個數來符合那些條件。那時候我還特別問別校數學系的同學, 但他那時也還沒學過高等微積分, 所以也沒有任何想法, 於是我只好照著講義依樣畫葫蘆, 勉強在期限內完成了作業。

但自從那次之後我就學乖了, 每週一只要一拿到作業, 當天晚上就開始想該如何下手, 一方面是維持白天剛上完課的熱度, 趁著印象正深刻的時候, 看看能否拼湊出一些東西出來, 如果一、兩天都還沒想出來, 這樣也才有時間可以去和教授討論, 看看哪一個部份是我沒想到的、有什麼盲點或是這個問題有什麼特殊的技巧。

其實我覺得寫作業到後來就覺得蠻有趣的, 都會在猜這次作業又藏了什麼梗, 用了哪個方法可以三、兩下就解決, 不需要傻傻地繞一大圈, 而且看出這個題目的關鍵是哪一個部分, 只要抓到那關鍵的點, 不論如何變化都可以輕易解答。雖然說這一切的過程十分燒腦, 而且也會花非常多的時間, 但我想這一切投資都是值得的。等到熟練之後, 那種能一眼看穿的感覺真的很爽, 尤其是看其他同學都還在苦惱的時候, 你早就看透這一切了, 並且若是一開始願意花時間慢慢累積能力的話, 寫作業所花的時間也會降低。剛開始我都需要花兩、三天才能完成作業, 但到下學期的中後期我都是星期一當天就可以將作業解決掉。

或許有人會覺得讀高等微積分根本不需要那認真, 作業平常就找個班上的學霸抄一抄交差了事就好, 然後考前再將這兩個月學到的定理背一背, 測驗的時候再將那些寫出來就可以了。但我想說的是: 那樣做真的好嗎? 就算這次好不容易讓你僥倖通過了這門課, 那你又學到了些什麼? 用這種方式去學習很容易忘本, 到最後可能連最基本的東西都還是不知道, 像是連續的定義都寫不出來。我覺得高等微積分對數學系的學生來說是蠻重要的一門課, 可以培養對一件事情分析的能力, 有點像是代數, 但是又沒有那麼的抽象, 高等微積分所學的很多東西是可以用幾何的方式去呈現, 也可以與生活的部分有些連結。

總之在學高等微積分之前, 先想想自己想要學的是什麼, 該用何種方式去學習。每個人都有不同的學習方式, 在選擇那個方式之後, 是否可以變成你想要的樣子, 這個問題必須先給自己一個答案。

0.8.3 外系同學對於高等微積分的看法

這裡我用問答的方式表達我對高等微積分的心得。

問題 **1.** 為什麼我會修高等微積分這門課? 這門課有符合自己的期待嗎?

在下是工學院資訊領域的學生, 我在修課之前期許自己在學完高等數學之後可以從純數學的角度出發解決問題, 對我來說這將是解決問題的新方法或是新觀點; 由於我自認為數學不好, 甚至高中的基礎都很不足, 所以當初在修微積分課程時是比較認真的, 但是在準備修高等微積分前仍一度感到害怕, 擔心若是跟不上進度的話將會產生許多挫折感。在經過每週充實的作業訓練之下, 到後期在操作數學時腦中已建立一小部分會試著檢查自己寫下的每一個東西合不合理的想法。而課程探討的內容涵蓋所有基本函數、實數...... 等, 都給了我全新的視野去看待數學, 這也超出當初設想的期待。

問題 **2.** 關於高等微積分課程, 我的學習態度是什麼?

在時間分配上, 在有上課的那三天我每天大約花 30–50 分鐘面對高微, 分配在上課前 20 分鐘 (走路到教室的過程中回想上一次進度有哪些, 進行腦部暖機。) 以及下課離開教室後就立刻統整剛才上課學了哪些東西 (約 30 分鐘); 除此以外, 我會在寫作業時一併複習講義相關內容, 而這個複習時間並不固定。整體來說, 在下課後趕緊回憶上課內容的這個策略對我來說是相當有幫助的。由於週二下午 1–3 點上課對我來說是最容易打瞌睡的時間點, 所以星期二中午我會盡量選擇吃生菜沙拉類的食物, 讓血糖上升得比較慢, 這樣就不會想睡, 而且這也當作是吃健康的一吃兩補。

關於作業, 因為修課初期還沒有適應, 所以每個星期都用 2–4 天寫作業, 有時候甚至花了一整天的時間才把題目要問的問題看懂, 也曾經花了一整天的時間才想出某個習題的解決方案, 直到適應這

門課之後 (這個時間點大約是第一次期中測驗後), 寫作業的時間才逐漸變短而且有效率。這之間轉變的關鍵就在我於經常找老師或是助教討論, 不斷地反思自己所想和老師或助教的想法之間的差異。透過每週作業, 一開始先自己想過一次, 然後找老師或助教討論後, 最後又再好好地把每一個觀念想過一遍, 才了解課堂上學過的定理可以玩弄到什麼誇張的境界。這些作業中的確有很多數學技術層面的操作 (tricky), 然而透過學習這些操作可以帶給自己新的觀點, 內化成自己求得解決方法的工具。

我從一開始就沒有很在意我是否會通過課程考核 (因爲這不是我的必修課, 所以沒有必須取得學分的壓力), 我認爲最重要的是有沒有好好學到新觀點, 使我比以前的想法更來得不一樣, 我認爲這件事比取得學分更重要。

問題 **3.** 高等微積分課程哪些部分對我來說很有感?

這門課最重要的就是學習如何用不等式建立等式, 分子放大、分母變小, 分母變大、分子變小的原則, 幾乎通用了一整年, 而且這種不等式的估計, 越玩越開心, 越玩越有成就感, 當心上癮。

再來就是我終於搞清楚極限的精確定義 (ε-δ language), 這是我以前曾經用兩年左右的時間都沒有弄懂的東西。如今, 每次寫出極限精確定義都有一種「我當初怎麼學那麼久才會用啊」的感覺。

第二學期我另外選修了數學系四年級的偏微分方程 (partial differential equations) 的課, 而高等微積分在第 8 章與第 9 章討論函數項級數均勻收斂相關定理, 剛好與偏微分方程課程中也在討論利用逐點收斂、均勻收斂相關定理以了解傅立葉級數的收斂, 所以對我來說這兩門課在內容上無縫接軌, 感覺蠻不錯的。

老師有用多種數學觀點 (像是代數與圖形) 來理解定義與定理, 其中最有趣的就是用眼睛看數學, 利用等級的原理對數學做出預判, 幾乎培養了一種數學素養, 節省許多時間在那邊慢慢驗證, 回想大一修微積分時, 我常常跑去問助教「某某級數應該收斂吧?」結果助教都秒回:「不是喔, 它發散。」那時候我就覺得很神奇, 爲什麼我還要在那邊慢慢看, 可是大家都有好眼力一眼就看出來, 如今掛了那麼多次高微眼科, 似乎也有一點這種「視力」了 (人稱: 高微瞳鈴眼)。

其實數學每一個定理、定義或許都可以跟生活結合成迷因或朗朗上口的調調, 吃個千層蛋糕也不禁在想定積分的分割 (partition), 如果你能接受這種趣味學習法, 對數學或許也可以有新的看法產生。

總而言之, 建立一個對高等微積分修課的目的與期待, 以及如何把看似生硬的課變得好玩也是一種緩解讀書壓力的方法吧。

0.8.4 高年級同學對於高等微積分課採取的讀書策略

高等微積分需要花相當的時間研讀, 務必確實做到課前預習、上課認真聽、課後複習的動作。寫作業時遇到不會的題目一定先自己想過, 例如題目在問什麼? 目前有哪些工具可以用? 也可以參考講義上的定義或定理, 但不要馬上就上網找解答或參考其他人的答案。此外, 我覺得在課程中碰到任何不懂的內容時, 一定要盡快請教身旁的同學或老師, 並把握「今日事、今日畢」原則, 如果今天沒弄清楚, 過了一個禮拜, 就會累積更多內容需要弄懂, 絕對會更辛苦。如果長期下來累積太多內容, 大考前再來讀, 基本上因爲內容過多, 想要惡補就已經爲時已晚了。最後, 不要對於本課程有先入爲主的想法: 覺得它很困難。只要養成好的讀書習慣, 就真的不會很難。寧可每天花時間碰一點高等微積分, 也不要等期中期末再來看高等微積分。如果你不理它(高等微積分), 它也不會給你好臉色(指有好成績), 祝福各位未來有良好的學習!

0.9 結語

自 108 學年度開設高等微積分課程, 一個二十年前在台下學過的科目如今角色互換下我要爲此訴說故事, 至今仍抱持著教學熱忱與夢想勇闖所有老師都認爲是系上最重要而又最難教的課。你問我在開課前所有東西都準備好了嗎? 我會跟你說沒有, 而且教學這件事是不會有準備好的一天, 若想要好還要更好, 就會不斷地調整, 就連第 0 章的內容, 原本是打算在第一次開課前就完成, 但是那時候寫得很零散, 也寫得言不及意, 後來突然在寒假因爲疫情的關係而延後開學, 多了一些時間的關係故而決定把第 0 章寫好, 但這前前後後竟花了我兩個多星期的時間, 不斷在字句上修改還有文章段落的調整, 至此才寫了一些比較貼近心中想說的話。

到了 109 學年度我繼續接下高等微積分課的重責大任, 這其實也是我心中的預想, 第一年幾乎所有心思都是在編寫講義, 至今已有一個大致的雛形, 而接下來的一年, 除了將講義再做細部的修改, 另一方面我想要著重在上課用學習單與作業的設計與補充。於是像第 0 章的部份, 我也增加了一些段落, 甚至找了幾位同學提供他們對於高等微積分課的學習心得, 希望第 0 章有關高等微積分在數學方面的認識還有如何學習高等微積分這件事並不都是我在自言自語, 而是融入一些其他過來人的想法。

這陣子, 我的腦中又突然浮現一個新的想法, 關於第 0 章的內容, 前前後後已經寫了二十幾頁, 每次我在看自己寫的文章時, 都有一種字字珠璣以及發自內心的肺腑之言, 但是在閱讀者的眼中, 或許平時並沒有大量閱讀的習慣, 所以可能讀個幾頁就選擇放棄不看, 那真的是很可惜的事。如果我把這些內容錄成有聲書的樣子, 就像廣播一樣用聲音的方式呈現內容, 讓各位多了一種選擇, 可以看文章, 也可以聽聲音, 甚至用邊聽邊看的方式, 好像效果會更好。於是當下我就迫不及待地錄了第 0 章, 這個新嘗試我覺得很有趣, 也呼應一開始所說, 教學這種事是不會有準備好的一天, 當你想要再把一件事做得更好, 就會試圖引發出新的點子或想法, 付諸行動後又會長出漂亮的花朵。

五年前曾經花了一整年的時間錄製微積分影片, 剛把微積分影片拍攝完畢的那一陣子覺得自己很偉大, 竟然毅力大到可以把一整年的微積分課程將近六百部影片都錄製完畢, 但是在那次的大功告成之後有好一陣子自己變得懶洋洋的, 一點也不想再碰錄影。沒想到一年半前開始流行的新冠肺炎疫情不得不讓我重新架起攝影機與腳架, 一開始擔心著可能要實施遠距教學所以錄了第 8 章的影片, 後來疫情好像沒有變糟所以我也就沒有繼續錄影。

結果今年五月疫情大爆發被迫改成遠距教學的關係, 雖說去年有一些第 8 章的影片可以湊合使用, 但是那些影片一下子就用完了, 我從五月中之後的一整個月幾乎每天都跟時間賽跑, 在時限之內把課程進度的部份都錄製課程影片。到了暑假一開始, 結果我整天都想著: 110 學年度的高等微積分課到底是會實體上課還是遠距教學呢? 整天猶豫到底要錄還是不錄兩者之間一直掙扎, 突然有一天就想說: 我好像也不用管遠距還是不遠距的事, 既然高等微積分的影片都已經完成了一半, 那不如就把它弄完整吧! 所以我在暑假又花了一些時間錄製第 1 章到第 4 章的前半, 到目前爲止大概還有 25% 的內容沒有錄完, 但是我離目標(把所有的課程影片錄製完畢) 愈來愈近了。

課程錄影就像是一場馬拉松賽跑, 前段因爲體力很好所以會衝得很快, 但是到了中間階段就會有一個撞牆期, 心浮氣躁然後阻礙前進, 此時也感謝身旁的朋友與學生的鼓勵, 幫我加油打氣, 才讓我每天都有新進度前進。

另一方面, 110 學年度因爲申請了教育部的「教學實踐研究計畫」, 研究主題是:「數學魂」形成之探究—以高等微積分課程爲例, 所以接下來的一年我必須做一些學生在課程學習上的成效研究。我在

網路上看到許多大師在講授高等微積分的內容時描述得很傳神, 但以我目前的能力來說好像還不到那個層次, 似乎只能在技術層面上給學生較多的幫助, 所以接下來我想要藉著這個研究計畫將這門課再一次昇華, 希望學生學習到的數學不是一直陷在那些瑣碎的技術層面, 而是要跳脫出這個面向, 看到數學分析的特色與精髓。

對我來說, 這份講義的內容也可以說是我在教學上的總體檢, 每次藉由寒、暑假記錄對課程的各種反思, 未來也將試著透過一些調整看看能不能做得更好, 而各位也好好加油努力向學!