微分幾何(二) 課程學習單 活動 **12**

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 大域版本的高斯-伯內定理 (Gauss-Bonnet Theorem, global version)。

☐ 曲面上向量場的奇異點指標與高斯-伯內定理的關係。

2 預備知識

討論 1.

(A) 平面上的多邊形有什麼不變量?

(B) 世界上的正多面體有幾種? 而它們的 歐拉示性數 (Euler characteristic number) 是多少?

(C) 球面 (sphere) 與輪胎面 (torus) 的歐拉示性數分別爲何?

解.

3 三角劃分

定義 2 (第 275 頁)**.**

(a) 一個簡單區域若只有三個頂點並且其外角 $\theta_i \neq 0, i = 1, 2, 3$, 稱此區域爲 *三角形* (triangle)。

(b) 一個正則區域 $R \subset S$ 的 *三角劃分* (triangulation) 指的是一族三角形 $\{T_i\}_{i=1}^n$ (有限個) 使得

(b1) $\cup_{i=1}^n T_i = R$。

(b2) 若 $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, 則 $T_i \cap T_j$ 只能是 T_i 與 T_j 的公共邊或公共頂點。

命題 3 (第 275 頁)**.** 每一個正則曲面上的正則區域必有一個三角劃分。

4 大域版本的高斯-伯內定理

定理 4 (高斯-伯內定理, 大域版本, 第 277 頁)**.** 令 $R \subset S$ 是一個可定向曲線的一個正則區域, 將 R 的邊界 ∂R 用 $C_1, \ldots, C_n$ 表示, 其中每個 C_i 都是簡單、封閉、正則曲線, 並且都給予正的定向。記 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ 爲所有曲線 $C_1, \ldots, C_n$ 的外角, 則

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R K\,\mathrm{d}A + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi\chi(R),$$

其中 s 是弧長參數, k_g 表示曲線 C_i 的測地曲率, K 是曲面的高斯曲率。

證明: 考慮 R 的一個三角劃分, 並要求每個三角形 T_j 包含於一個與 S 定向相容的等溫參數式之坐標鄰域內。如此設定在相鄰的兩個三角形之公共邊, 其定向相反。

對於每個小角形, 利用局部版本的高斯-伯內定理, 並將所有式子相加, 得到

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R K\,\mathrm{d}A + \sum_{j=1}^{F}\sum_{k=1}^{3} \theta_{jk} = 2\pi F, \tag{1}$$

其中 F 表示三角形的個數, 而 $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$ 是三角形 T_j 的三個外角。

若將外角的資訊轉變成內角的形式, 則有 $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$, 所以

$$\sum_{j=1}^{F}\sum_{k=1}^{3} \theta_{jk} = \sum_{j=1}^{F}\sum_{k=1}^{3} (\pi - \varphi_{jk}) = 3\pi F - \sum_{j=1}^{F}\sum_{k=1}^{3} \varphi_{jk}。$$

接下來引進以下記號:

- 用 E_{ext} 表示三角劃分時在區域邊界上邊的總數。
- 用 E_{int} 表示三角劃分時在區域內部邊的總數。
- 用 V_{ext} 表示三角劃分時在區域邊界上頂點的總數。
- 用 V_{int} 表示三角劃分時在區域內部頂點的總數。

因爲曲線 $\cup_{i=1}^{n} C_i$ 形成封閉曲線, 所以 $E_{\text{ext}} = V_{\text{ext}}$。此外, 邊的個數滿足 $3F = 2E_{\text{int}} + E_{\text{ext}}$。所以

$$\sum_{j=1}^{F}\sum_{k=1}^{3}\theta_{jk} = 2\pi E_{\text{int}} + \pi E_{\text{ext}} - \sum_{j=1}^{F}\sum_{k=1}^{3}\varphi_{jk}$$

現將區域邊界上頂點的總數再分成兩類, 寫成 $V_{\text{ext}} = V_{\text{ext;cur}} + V_{\text{ext;tri}}$, 其中 $V_{\text{ext;cur}}$ 是曲線 C_i 的頂點之個數, 而 $V_{\text{ext;tri}}$ 是區域邊界上的頂點但不是曲線 C_i 的頂點(來自於三角劃分) 之個數。因爲 $\sum\limits_{j=1}^{F}\sum\limits_{k=1}^{3}\varphi_{jk}$ 代表所有三角形的內角總和, 而內部頂點的內角和爲 2π, 所以

$$\sum_{j=1}^{F}\sum_{k=1}^{3}\varphi_{jk} = 2\pi V_{\text{int}} + \sum_{i=1}^{n}(\pi - \theta_i) + \pi V_{\text{ext;tri}},$$

於是

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{F}\sum_{k=1}^{3}\theta_{jk} &= 2\pi E_{\text{int}} + \pi E_{\text{ext}} - \left(2\pi V_{\text{int}} + \sum_{i=1}^{n}(\pi - \theta_i) + \pi V_{\text{ext;tri}}\right) \\
&= 2\pi E_{\text{int}} + 2\pi E_{\text{ext}} - \pi E_{\text{ext}} - 2\pi V_{\text{int}} - \pi V_{\text{ext;cur}} + \sum_{i=1}^{n}\theta_i - \pi V_{\text{ext;tri}} \\
&= 2\pi E_{\text{int}} + 2\pi E_{\text{ext}} - \pi V_{\text{ext}} - 2\pi V_{\text{int}} - \pi V_{\text{ext;cur}} + \sum_{i=1}^{n}\theta_i - \pi V_{\text{ext;tri}} \\
&= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{i=1}^{n}\theta_i,
\end{aligned}$$

將上式代入 (1) 得到

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R K\,\mathrm{d}A + 2\pi E - 2\pi V + \sum_{i=1}^{n}\theta_i = 2\pi F,$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R K\,\mathrm{d}A + \sum_{i=1}^{n}\theta_i = 2\pi(V - E + F) = 2\pi\chi(R)。$$

推論 5. 記 S 是可定向的 封閉 (closed=compact without boundary) 曲面。則

$$\iint_S K\,\mathrm{d}A = 2\pi\chi(S)。$$

(A1) 如果封閉曲面同胚於球, 則 $\underline{\iint_S K\,\mathrm{d}A = \qquad\qquad}$。

(A2) 如果封閉曲面同胚於輪胎面, 則 $\underline{\iint_S K\,\mathrm{d}A = \qquad\qquad}$。

定義 6. 對於一個封閉可定向曲面來說, $\iint_S K\,\mathrm{d}A$ 稱爲 全曲率 (total curvature)。

例題 7 (第 280 頁)**.** 想一想以下敘述是否正確?

(A1) 一個封閉曲面 S, 若它同胚於球 (sphere), 則 S 上的每一點之高斯曲率都大於零。________

(A2) 一個封閉曲面 S, 若高斯曲率處處爲正, 那麼它一定同胚於球 (sphere)。________

(A3) 一個封閉曲面 S, 若高斯曲率處處都小於等於零, 那麼它不可能同胚於球 (sphere)。________

(A4) 標準球上 (standard sphere) 的任兩條封閉測地線必相交。________

(A5) 一個可定向曲面 S, 若高斯曲率處處小於等於零, 則從 $p \in S$ 出發的任兩條測地線若在另一處 $q \in S$ 相交, 則這兩條測地線無法圍出一個簡單區域。________

(A6) 一個可定向曲面 S, 若高斯曲率處處小於等於零, 則不存在以簡單區域爲邊界的簡單封閉的測地線。________

(A7) 正曲率曲面上的測地三角形內角和 ________; 負曲率曲面上的測地三角形內角和 ________。

5 向量場奇異點的討論

定義 **8** (第 283 頁)**.** 令 $\mathbf{v}$ 是可定向曲面 S 上的可微分向量場。若 $\mathbf{v}(p) = \mathbf{0}$, 我們稱 p 是向量場 $\mathbf{v}$ 的 奇異點 (singular point)。對於奇異點 p, 若存在 p 的一鄰域 $V \subset S$ 使得在 V 當中沒有其它的奇異點, 則稱 p 爲 孤立的 (isolated) 奇異點。定義奇異點的 指標 (index) I 爲滿足 $2\pi I = \int_0^l \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \varphi(l) - \varphi(0)$ 的整數, 其中 $\boldsymbol{\alpha} : [0, l] \to S$ 是內部僅包含 p 這個奇異點的簡單、封閉、片段正則、與 S 定向一致的曲線, 而 $\varphi(t)$ 是 $\mathbf{x}_u$ 到 $\mathbf{v}(t)$ 的夾角。

例題 **9** (第 285 頁)**.** 畫出指標爲 $I = 1, -1, -3$ 的向量場(軌線)。

解**.**

定理 **10** (第 286 頁, 龐加萊定理 Poincaré Theorem)**.** 在封閉可定向曲面 S 上的可微分向量場之奇異點指標總和等於 S 的歐拉示性數。

例題 **11.** 髮漩存在性的數學解釋。

6 課程總結

這門課程的最後, 想要用當初第一節課給各位填寫的問卷的題目再次回顧課程內容, 有些內容各位以爲會和微分幾何有關, 但實際上無關; 而有些內容是高度相關, 但礙於時間因素就沒有多做解釋。後面的數字只是當初填寫問卷時認爲該敘述與微分幾何課程有關的人數, 並非實際與課程的相關度。

你覺得以下哪些內容可能會在微分幾何課程中提到? (12 人填寫問卷)

(A)	古希臘三大幾何問題 — 無法用尺規作圖三等分角、倍立方、化圓爲方。	8
(B)	平面中的凸多邊形外角和必爲 2π。	3
(C)	平面中的三角形外心、重心、垂心共線。	4
(D)	球面三角學與非歐幾何學。	11
(E)	不需要到外太空, 就可以知道所處的地球是圓的。	8
(F)	無法畫出一幅不失真的地圖(地球上任兩城市都可直接在地圖上以直線測量)。	8
(G)	飛機航線的理解。(感覺每一條航線好像都在繞遠路?)	10
(H)	肥皂泡泡的幾何形狀。	11
(I)	張量分析 (tensor analysis)。	4
(J)	愛因斯坦方程式 (Einstein equation) $\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg = T$。	5
(K)	橢圓的弧長無法表示成初等函數的形式。	9
(L)	等周不等式 — 平面上固定長度的簡單封閉曲線以圓所包圍出的面積最大。	10
(M)	二維封閉曲面的分類。	10
(N)	每個人的頭髮至少有一個髮漩。	9
(O)	如何正確吃披薩(如何拿披薩使披薩不爛掉)。	9