# 微分幾何 (二) 課程學習單 活動 6

學號: _______________ 姓名: _______________ 你的伙伴: _______________

## 1 單元介紹與學習目標

☐ 認識保距映射 (isometry) 與保角映射 (conformal map)。

## 2 預備知識

**討論 1 (第 228–229 頁).** 試討論以下問題:

(A) 考慮線性變換 $T : V \to V$, 何謂 保距映射 (orthogonal transformation)?

(B) 考慮線性變換 $T : V \to V$, 何謂 保角映射 (conformal map)?

解.

**討論 2.** 何謂懸鏈線 (catenary)? 這條曲線可以用什麼函數表示? 生活中有哪些地方可以看到?

解.

## 3 曲面之間的保距變換

*定義* **3 (第 221 頁).** 考慮兩個正則曲面之間的 *可微同胚* (diffeomorphism) $\varphi : S \to \overline{S}$, 如果對所有 $p \in S$ 以及所有 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_pS$ 都滿足

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_p = \langle \mathrm{d}\varphi_p(\mathbf{v}_1), \mathrm{d}\varphi_p(\mathbf{v}_2) \rangle_{\varphi(p)},$$

則稱 $\varphi$ 是 *保距映射* (isometry), 也稱曲面 $S$ 與 $\overline{S}$ 彼此是 *保距的* (isometric)。

將保距這個條件轉成換對於第一基本式的形式, 則它等價於: ____________________, 因爲

*定義* **4 (第 221 頁).**

(a) 給定 $p \in S$ 與包含 $p$ 的一個鄰域 $V$ 以及映射 $\varphi : V \to \overline{S}$, 如果存在 $\overline{V}$ 爲 $\varphi(p) \in \overline{S}$ 的鄰域使得 $\varphi : V \to \overline{V}$ 是保距映射, 我們稱 $\varphi$ 在 $p$ 點是一個 *局部保距映射* (local isometry)。

(b) 若在 $S$ 上的每一點 $p$ 都存在 $S$ 到 $\overline{S}$ 的局部保距映射, 則稱曲面 $S$ 局部保距於 $\overline{S}$。兩曲面 $S$ 與 $\overline{S}$ 稱爲 *局部保距* (local isometry) 的意思是 $S$ 局部保距於 $\overline{S}$ 而且 $\overline{S}$ 局部保距於 $S$。

*命題* **5 (第 223 頁).** 若存在兩個參數化 $\mathbf{x} : U \to S$ 與 $\mathbf{x} : U \to \overline{S}$ 使得在 $U$ 上的每一點都有 $E = \overline{E}, F = \overline{F}, G = \overline{G}$, 那麼映射 $\varphi : \overline{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \to \overline{S}$ 是局部保距映射。

*證明*: 令 $p \in \mathbf{x}(U), \mathbf{w} \in T_pS$ 並且由 $\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ 在 $t = 0$ 處表達, 即 $\mathbf{w} = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$, 則 $\mathrm{d}\varphi_p(\mathbf{w})$ 代表曲線 $\overline{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ 在 $t = 0$ 的切向量, 也就是說, $\mathrm{d}\varphi_p(\mathbf{w}) = \overline{\mathbf{x}}_u u' + \overline{\mathbf{x}}_v v'$, 因爲

$$\begin{aligned} I_p(\mathbf{w}) &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \\ I_{\varphi(p)}(\mathrm{d}\varphi_p(\mathbf{w})) &= \overline{E}(u')^2 + 2\overline{F}u'v' + \overline{G}(v')^2, \end{aligned}$$

所以對所有 $p \in \mathbf{x}(U)$ 與所有 $\mathbf{w} \in T_p(S)$ 都滿足 $I_p(\mathbf{w}) = I_{\varphi(p)}(\mathrm{d}\varphi_p(\mathbf{w}))$, 因此映射 $\varphi$ 是局部保距。 □

*例題* **6.** 圓柱 $x^2 + y^2 = 1$ 與平面 $z = 0$ 是局部保距的, 但兩者並非保距的。

*解.*

**例題 7 (第 224 頁).** 懸鏈曲面 (catenoid) 指的是以 懸鏈線 (catenary) 做爲生成曲線的旋轉曲面, 該曲面的一種參數表示如下:

$$\mathbf{x}(u,v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, av), \quad 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R},$$

若與旋轉曲面一般式 $(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$ 對照, 則 $f(v) =$ ________, $g(v) =$ ________, 但是注意到這裡的生成曲線 $(f(v), g(v))$ 對 $v$ 而言並非弧長參數。在此先計算懸鏈曲面的第一基本式:

另一方面, 螺旋面 (helicoid) 的參數式爲:

$$\overline{\mathbf{x}}(\overline{u},\overline{v}) = (\overline{v}\cos\overline{u}, \overline{v}\sin\overline{u}, a\overline{u}), \quad 0 < \overline{u} < 2\pi, \overline{v} \in \mathbb{R},$$

考慮以下參數變換: $\overline{u} = u, \overline{v} = a\sinh v$, 其中 $0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$, 因爲 $\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)} =$ _____, 所以它是一對一 (one-to-one) 的變換。於是我們得到對於螺旋面的另一種參數表示法:

$$\overline{\mathbf{x}}(u,v) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R},$$

這時的第一基本式如下:

故由 命題 5 得知兩者局部保距。

**例題 8 (第 226 頁).** 寫出 去尖點的半錐 (one-sheeted cone minus the vertex) $z = k\sqrt{x^2+y^2}$, 其中 $(x,y) \neq (0,0)$ 與平面上的一扇形之間的映射。

**解.** 記 $\alpha$ 爲 $z$-軸到錐面之間的夾角, 得到 $k = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cot\alpha$, 如此可將扇形區域 $\{(\rho,\theta) | \rho \in \mathbb{R}, 0 < \theta < 2\pi\sin\alpha\}$ 對應到去尖點的半錐, 映射關係爲

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(\rho,\theta) &= \left(\rho\sin\alpha\cos\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right), \rho\sin\alpha\sin\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right), \rho\cos\alpha\right) \\
\mathbf{x}_\rho(\rho,\theta) &= \left(\sin\alpha\cos\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right), \sin\alpha\sin\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right), \cos\alpha\right) \\
\mathbf{x}_\theta(\rho,\theta) &= \left(-\rho\sin\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right), \rho\cos\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right), 0\right)
\end{aligned}$$

所以 $E = \langle \mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_\rho \rangle = 1, F = \langle \mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_\theta \rangle = 0, G = \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta \rangle = \rho^2$。

例題 **9** (第 **226** 頁). 證明 去尖點的半錐 $z=k\sqrt{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)$ 扣除一條 生成線 (generator) 與平面上的一扇形之間爲局部保距。

解. 將扇形區域以極坐標方式表達:

$$\overline{\mathbf{x}}(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,0),\quad 0<\rho<\infty,0<\theta<2\pi\sin\alpha$$

則 $\overline{\mathbf{x}}_\rho(\rho,\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,0)$ 與 $\overline{\mathbf{x}}_\theta(\rho,\theta)=(-\rho\sin\theta,\rho\cos\theta,0)$, 所以 $\overline{E}=\langle\overline{\mathbf{x}}_\rho,\overline{\mathbf{x}}_\rho\rangle=1,\overline{F}=\langle\overline{\mathbf{x}}_\rho,\overline{\mathbf{x}}_\theta\rangle=0,G=\langle\overline{\mathbf{x}}_\theta,\overline{\mathbf{x}}_\theta\rangle=\rho^2$。因此去尖點的半錐扣除一條生成線與平面上的一扇形之間爲局部保距。

# 4 曲面之間的保角變換

定義 **10** (第 **229** 頁). 考慮兩個正則曲面之間的 可微同胚 (diffeomorphism) $\varphi:S\to\overline{S}$, 如果對所有 $p\in S$ 以及所有 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in T_pS$ 都滿足

$$\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle_p=\lambda^2(p)\langle\mathrm{d}\varphi_p(\mathbf{v}_1),\mathrm{d}\varphi_p(\mathbf{v}_2)\rangle_{\varphi(p)},\tag{1}$$

其中 $\lambda^2$ 是在 $S$ 上的一個處處非零的可微分函數。則稱 $\varphi$ 是 保角映射 (conformal map), 也稱曲面 $S$ 與 $\overline{S}$ 彼此 保角的 (conformal)。

討論 **11.** 爲何滿足關係式 (1) 的映射會稱爲保角映射?

解. 對於 $T_pS$ 上的兩個切向量 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$, 分別用曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t),\boldsymbol{\beta}(t)$ 實現它, 即 $\boldsymbol{\alpha}(0)=p,\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}_1$ 與 $\boldsymbol{\beta}(0)=p,\boldsymbol{\beta}'(0)=\mathbf{v}_2$, 將曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t),\boldsymbol{\beta}(t)$ 透過 $\varphi$ 送到 $\overline{S}$ 上的兩曲線 $\varphi\circ\boldsymbol{\alpha}(t),\varphi\circ\boldsymbol{\beta}(t)$, 則 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi\circ\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathrm{d}\varphi_p(\boldsymbol{\alpha}'(0))$ 與 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi\circ\boldsymbol{\beta}(0)=\mathrm{d}\varphi_p(\boldsymbol{\beta}'(0))$, 並且

$$\cos\tilde{\theta}=\frac{\langle\mathrm{d}\varphi_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)),\mathrm{d}\varphi_p(\boldsymbol{\beta}'(0))\rangle}{\|\mathrm{d}\varphi_p(\boldsymbol{\alpha}'(0))\|\|\mathrm{d}\varphi_p(\boldsymbol{\beta}'(0))\|}=\frac{\lambda^2\langle\boldsymbol{\alpha}'(0),\boldsymbol{\beta}'(0)\rangle}{\lambda^2\|\boldsymbol{\alpha}'(0)\|\|\boldsymbol{\beta}'(0)\|}=\cos\theta$$

定義 **12** (第 **229** 頁).

(A) 給定 $p\in S$ 與包含 $p$ 的一個鄰域 $V$ 以及映射 $\varphi:V\to\overline{S}$, 如果存在 $\overline{V}$ 爲 $\varphi(p)\in\overline{S}$ 的鄰域使得 $\varphi:V\to\overline{V}$ 是保角映射, 我們稱 $\varphi$ 在 $p$ 點爲 局部保角映射 (local conformal map)。

(B) 若在 $S$ 上的每一點 $p$ 都存在 $S$ 到 $\overline{S}$ 的局部保角映射, 則稱曲面 $S$ 局部保角於 $\overline{S}$。兩曲面 $S$ 與 $\overline{S}$ 稱爲 局部保角 (locally conformal) 的意思是 $S$ 局部角距於 $\overline{S}$ 而且 $\overline{S}$ 局部角距於 $S$。

命題 **13** (第 **223** 頁). 若存在兩個參數化 $\mathbf{x}:U\to S$ 與 $\mathbf{x}:U\to\overline{S}$ 使得在 $U$ 上的每一點都有 $E=\lambda^2\overline{E},F=\lambda^2\overline{F},G=\lambda^2\overline{G}$, 其中 $\lambda^2$ 是在 $U$ 上的一個處處非零的可微分函數。那麼映射 $\varphi:\overline{\mathbf{x}}\circ\mathbf{x}^{-1}:\mathbf{x}(U)\to\overline{S}$ 是局部保角映射。

定理 **14** (第 **230** 頁). 任兩個正則曲面必局部保角。(等溫曲面 (isothermal coordinates) 的存在性。)