微分幾何 (二) 課程學習單 活動 4

學號: _______________ 姓名: _______________ 你的伙伴: _______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 推導曲面的高斯曲率與均曲率公式的局部坐標表示法。

2 第二基本式的局部坐標表示 (第 155–158 頁)

前面的活動是以理論介紹曲面的第二基本式 $\mathrm{II}_p(\mathbf{v})$, 現在要用局部坐標的方式表達第二基本式。

給定曲面 S, 而 $p \in U \subset S$, 令 $\mathbf{x}(u,v)$ 爲曲面的一個參數化。取 $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)), \boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}(u(0), v(0)) = p$ 是在曲面 S 上通過 p 的一條曲線。則曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 在 p 點的切向量爲 $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{x}_u(u(0), v(0))u'(0) + \mathbf{x}_v(u(0), v(0))v'(0)$, 而

$$\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{N}(u(t), v(t))\Big|_{t=0} = \mathbf{N}_u(u(0), v(0))u'(0) + \mathbf{N}_v(u(0), v(0))v'(0) \tag{1}$$

於是 (以下在不引起混淆之情形下省略代點的記號)

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)) &= -\langle \mathrm{d}\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)), \boldsymbol{\alpha}'(0)\rangle = -\langle \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'\rangle \\
&= -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u\rangle (u')^2 - (\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v\rangle + \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u\rangle)u'v' - \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v\rangle (v')^2 \\
&= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2,
\end{aligned}$$

其中最後一式利用關係式 $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_u\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_v\rangle = 0$ 計算每一項, 並用符號註記:

$$\begin{aligned}
e &= -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uu}\rangle \\
f &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv}\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vu}\rangle = -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v\rangle \\
g &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vv}\rangle。
\end{aligned}$$

在幾何上, 我們會把曲面的第二基本式改寫成 *微分形式* (differential form) 的樣子:

$$\mathrm{II}_p = e\,\mathrm{d}u^2 + 2f\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + g\,\mathrm{d}v^2$$

討論 **1.** 試將曲面的第一基本式與第二基本式做一個對照。

解.

3 用局部坐標計算高斯曲率與均曲率

若想計算曲面在某一點的高斯曲率與均曲率, 我們試著把高斯映射的微分映射 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p$ 這個線性變換求出來: 沿用之前的記號, 由 (1) 式出發, 因爲 $\mathbf{N}_u$ 與 $\mathbf{N}_v$ 都是 T_pS 上的向量, 故用基底 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ 展開:

$$\begin{cases} \mathbf{N}_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \\ \mathbf{N}_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \end{cases} \tag{2}$$

於是 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)) = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v$, 或寫成矩陣的形式

$$\mathrm{d}\mathbf{N}\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}。$$

欲解矩陣 $[a_{ij}]$ 的每一個量, 透過以下方式求解:

(A) 兩邊對 $\mathbf{x}_u$ 內積:

兩邊對 $\mathbf{x}_v$ 內積:

(B) 兩邊對 $\mathbf{x}_u$ 內積:

兩邊對 $\mathbf{x}_v$ 內積:

所以

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = -\frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

(K) 計算高斯曲率: 因爲 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, 所以 $K =$ ____________________。

(H) 計算均曲率: 因爲 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, 所以 $H =$ ____________________。

討論 2. 試觀察 $fa_{21} - ea_{22}$ 這個量。

解.

例題 **3 (第 163–165 頁).** 計算 旋轉曲面 (surfaces of revolution) 的各式幾何量。

解. 考慮旋轉曲面的參數式

$$\mathbf{x}(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)) \quad \text{其中} \quad U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u < 2\pi, a < v < b\},$$

假設生成曲線 $(f(v), g(v))$ 是以弧長為參數, 即 ________________。計算

$$\mathbf{x}_u =$$

$$\mathbf{x}_v =$$

$$\mathbf{x}_{uu} =$$

$$\mathbf{x}_{uv} =$$

$$\mathbf{x}_{vv} =$$

$$\mathbf{N} =$$

所以

$$E = \qquad F = \qquad G =$$

$$e = \qquad f = \qquad g =$$

因此高斯曲率與均曲率分別為:

例題 **4 (第 165–166 頁).** 計算 函數圖形 (graph of a function) 的各式幾何量。

解. 考慮旋轉曲面的參數式

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad \text{其中} \quad (u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2,$$

直接計算

$$\mathbf{x}_u =$$

$$\mathbf{x}_v =$$

$$\mathbf{x}_{uu} =$$

$$\mathbf{x}_{uv} =$$

$$\mathbf{x}_{vv} =$$

$$\mathbf{N} =$$

所以

$$E = \qquad F = \qquad G =$$

$$e = \qquad f = \qquad g =$$

因此高斯曲率與均曲率分別爲: