微分幾何 (二) 課程學習單 活動 2

學號: ____________ 姓名: ____________ 你的伙伴: ____________

1 單元介紹與學習目標

☐ 認識高斯映射及其微分映射之幾何意義。

2 預備知識

例題 1 (第 133 頁). 考慮 $F(x,y)=(\mathrm{e}^x\cos y,\mathrm{e}^x\sin y)$, 問 微分映射 (differential map) $\mathrm{d}F_{(x_0,y_0)}$ 爲何?

解.

3 高斯映射 (第 138 頁)

定義 **2 (第 138 頁).** 給定一個可定向的正則曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$, 將曲面上每一點的單位法向量收集起來, 把這些向量的起點都放到單位球的球心, 這樣而形成 $\mathbf{N} : S \to \mathbb{S}^2$, 此映射稱爲 *高斯映射* (Gauss map)。

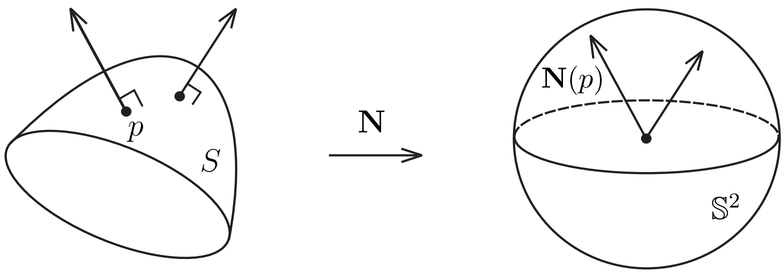

圖 1: 高斯映射。

回想當初研究平面曲線的彎曲現象, 我們是透過觀察曲線上每一點的單位切向量 $\mathbf{t}$ 的改變定義曲率, 把單位切向量收集起來會得到一個映射 $\mathbf{t} : I \to \mathbb{S}^1$, 由此觀察轉角的改變。現在則是試圖把此概念對於維度推廣。

例題 **3.** 考慮平面中的直線, 則映射 $\mathbf{t} : I \to \mathbb{S}^1$ 的映像 $\mathbf{t}(I)$ 是 ________。現在對維度平行類比, 考慮空間中的平面, 那麼映射 $\mathbf{N} : S \to \mathbb{S}^2$ 的映像 $\mathbf{N}(S)$ 是 ________。

現考慮 $\mathbf{N} : S \to \mathbb{S}^2$ 在 $p \in S$ 的微分映射 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p : T_pS \to T_{\mathbf{N}(p)}\mathbb{S}^2$, 在探討論這個微分映射之前, 首先注意到: 因爲切平面 $T_{\mathbf{N}(p)}\mathbb{S}^2$ 平行於 T_pS, 所以我們可以看成 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p : T_pS \to T_pS$。

這個微分映射的定義方式如下: 在曲面 S 上取一條參數曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}(0) = p$, 則

$$\mathbf{N}(t) \overset{\text{定義}}{=\!=} (\mathbf{N} \circ \boldsymbol{\alpha})(t) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\alpha}(t)),$$

它形成在 $\mathbb{S}^2$ 上的曲線。則切向量 $\mathbf{N}'(0) = \mathrm{d}\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\alpha}'(0))$ 即爲向量的對應關係。注意到 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p$ 是一個線性變換。

在平面曲線的情況, 單位切向量的變化只要用一個數字 (曲率) 就可以描述; 在曲面的情形, 單位法向量的變化要用一個線性映射描述 (因爲法向量沿著曲面的變化可做兩個維度的改變)。

例題 **4 (第 139 頁).** 考慮空間中的平面 $P : ax + by + cz = d$, 則單位法向量爲 $\mathbf{N} =$ ________________, 得到 $\mathrm{d}\mathbf{N} \equiv \mathbf{0}$。

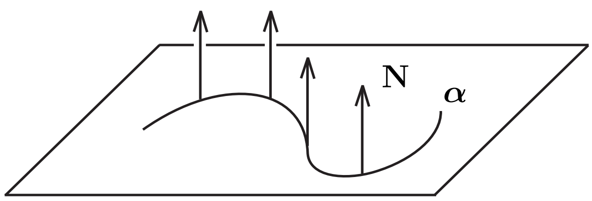

圖 2: 平面 $\mathrm{d}\mathbf{N} \equiv \mathbf{0}$。

問題. 映射 $\mathrm{d}\mathbf{N} \equiv \mathbf{0}$ 當中的 $\mathbf{0}$ 是什麼意思?

例題 5 (第 139 頁). 考慮單位球 $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\}$, 在 $\mathbb{S}^2$ 上取一條參數曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 因爲 $\boldsymbol{\alpha}(t)\cdot\boldsymbol{\alpha}(t) = 1$, 所以

所以 $\mathbf{N} =$ __________ 與 $\overline{\mathbf{N}} =$ ______________ 爲 $\mathbb{S}^2$ 的單位法向量。若考慮朝內的單位法向量 $\mathbf{N}$, 欲研究 $\mathrm{d}\mathbf{N}$, 因爲 $\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\alpha}(t)) =$ ____________________, 所以

$$\mathrm{d}\mathbf{N}(\boldsymbol{\alpha}'(t)) = \mathrm{d}\mathbf{N}(x'(t), y'(t), z'(t)) = \mathbf{N}'(t) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad};$$

換言之, 對所有 $p \in \mathbb{S}^2$ 與所有 $\mathbf{v} \in T_p(\mathbb{S}^2)$, 則 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$。

討論 6 (第 140–141 頁).

(A1) 在單位球上若考慮朝內的單位法向量 $\mathbf{N}$, 則 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{v})$ 的幾何意義是什麼? 在教具上確實感受其概念。

(A2) 在單位球上若考慮朝外的單位法向量 $\overline{\mathbf{N}}$, 則 $\mathrm{d}\overline{\mathbf{N}}_p(\mathbf{v})$ 的結果爲何?

(B) 考慮圓柱 (circular cylinder) $x^2+y^2=1$, 則朝內的單位法向量 $\mathbf{N}$ 如何表示? 若選取子午線 (meridians) 的切向量 $\mathbf{v}$ 時, $\mathrm{d}\mathbf{N}(\mathbf{v})$ 爲何? 若選取平行線 (parallels) 的切向量 $\mathbf{w}$ 時, $\mathrm{d}\mathbf{N}(\mathbf{w})$ 爲何? 這兩個向量在線性代數的意義爲何?

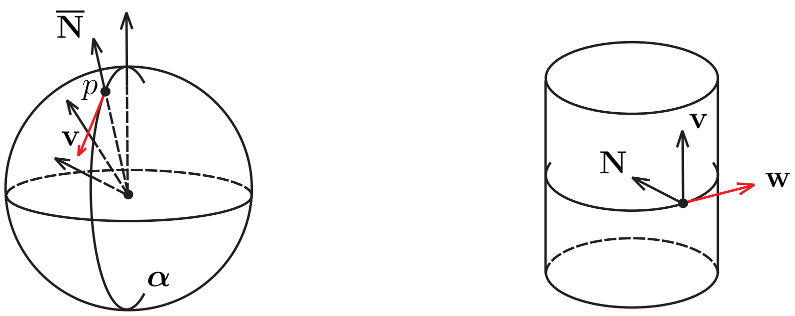

圖 3: 單位球: $\mathrm{d}\overline{\mathbf{N}}(\mathbf{v}) =$ ____; 圓柱: $\mathrm{d}\mathbf{N}(\mathbf{v}) =$ ____, $\mathrm{d}\mathbf{N}(\mathbf{w}) =$ ____。

解.

例題 **7 (第 141 頁).** 考慮 雙曲拋物面 (hyperbolic paraboloid) $z = y^2 - x^2$, 記 $p = (0,0,0)$。

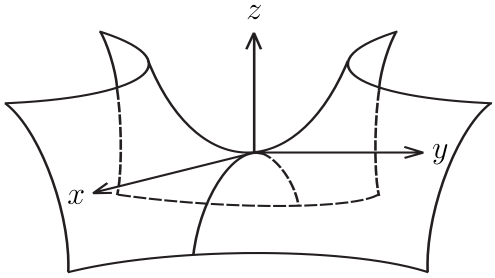

圖 4: 雙曲拋物面 $z = y^2 - x^2$。

首先, 寫出關於雙曲拋物面的一個參數式 $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, v^2 - u^2)$。因爲 $\mathbf{x}_u =$ ____________ 以及 $\mathbf{x}_v =$ ____________, 由此可得朝上的單位法向量 (如何確定下面的符號 $\mathbf{N}$ 會對應到的是朝上的法向量?)

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} =$$

現考慮在 S 上通過點 $p = (0,0,0)$ 的曲線參數式 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (u(t), v(t), v^2(t) - u^2(t)), \boldsymbol{\alpha}(0) = (0,0,0) = p$, 且 $\boldsymbol{\alpha}'(0) =$ ________________, 則

$$\mathbf{N}'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{N}(t)\bigg|_{t=0} =$$

所以 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p((u'(0), v'(0), 0)) =$ ________________。特別地, $\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_u) =$ ________, $\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_v) =$ ________。

例題 **8 (第 142 頁).** 考慮 橢圓拋物面 (elliptic paraboloid) $z = x^2 + ky^2$, 其中 $k > 0$, 它的一個參數式爲 $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^2 + kv^2)$, 若取朝上方向爲單位法向量 $\mathbf{N}$, 可得在 $p = (0,0,0)$, $\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_u) =$ ________, $\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_v) =$ ________。

解.

註. 一般來說, 我們約定封閉 (緊緻無邊) 曲面會選擇朝內的單位法向量, 非封閉曲面會選擇朝上單位法向量。