微分幾何 (一) 課程學習單 活動 10

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 學習一些曲面的參數化表示。

☐ 理解曲面的第一基本式 (first fundamental form)。

2 活動與觀察

討論 **1.** 與伙伴討論以下的問題:

(A1) 在氣球表面上先畫彼此等寬的平行線;再畫另一組平行線與原平行線互相垂直。在吹氣之後, 任兩交點之間的間距還會一樣嗎? ________。兩曲線之間的角度仍爲垂直嗎? ________。曲面上的四邊形大小會一樣嗎? ________。

(A2) 觀察手上的兩張地圖, 在你還沒有到達目的地之前, 你可以從地圖上知道哪些事情?

3 曲面參數化

例題 **2** (第 58 頁)**.** 利用 球極坐標 (spherical coordinates) 將球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 參數化。其中參數 ϕ 稱爲 餘緯 (colatitude, the complement of the latitude);而參數 θ 稱爲 經度 (longitude)。

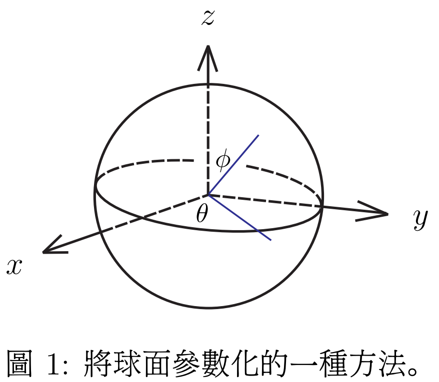

圖 1: 將球面參數化的一種方法。

解**.**

例題 **3 (旋轉曲面, 第 78 頁).** 給定正則光滑平面曲線 C 以及不與曲線相交的直線作爲轉軸, 曲線對著軸作空間的旋轉所成之曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 稱爲 *旋轉曲面* (surfaces of revolution)。例如, 考慮在 xz 平面上的曲線 C, 將 z-軸作爲旋轉軸。將 C 參數化得到

$$x = f(v), \quad z = g(v), \quad a < v < b, \quad f(v) > 0,$$

其中 $f(v) > 0$ 確保曲線與旋轉軸不相交。用參數 u 代表曲線 C 對 z-軸的 *旋轉角* (rotation angle), 這麼一來, 就可以得到旋轉曲面的一個映射

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

其中 $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$。

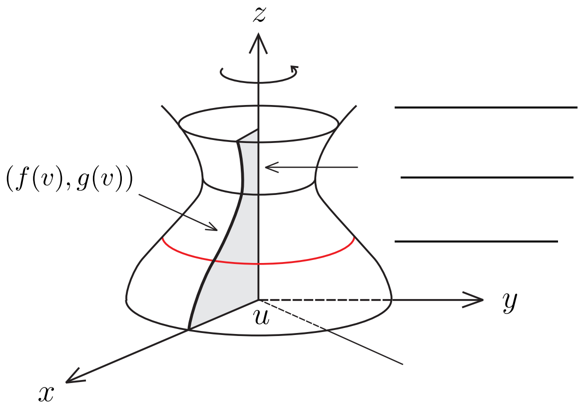

圖 2: 旋轉曲面 (surfaces of revolution)。

現在欲說明微分映射 (differential map) d$\mathbf{x}$ 是一對一。直接計算得到

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= \\ \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= \\ \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| &= \end{aligned}$$

所以 d$\mathbf{x}$ 是一對一映射。因此旋轉曲面是一個正則參數曲面。

關於旋轉曲面, 有幾個數學專有名詞一併介紹, 將它們註記在圖形上。

(A) 曲線 C 稱爲旋轉曲面 S 的 *生成曲線* (generating curve)。

(B) z-軸稱爲旋轉曲面 S 的 *旋轉軸* (rotation axis)。

(C) 曲線 C 上的任一點對著旋轉軸轉出的圓稱爲 S 的 *平行線* (parallels)。

(D) 曲線 C 對 z-軸旋轉時, 不同階段所在的位置稱爲 S 的 *子午線* (meridians)。

例題 **4 (螺旋面, 第 96 頁).** 給定螺旋線 (helix) 的一個參數式 $\boldsymbol{\alpha}(u) = (\cos u, \sin u, au)$, 在螺旋線上每一點, 畫一條與 xy-平面平行並與 z-軸相交的直線, 這些直線生成出的曲面稱爲 *螺旋面* (helicoid)。將螺旋面給予一個參數化方式:

$$\mathbf{x}(u, v) =$$

4 曲面第一基本式 (第 94 頁)

我們從觀察地圖的活動中知道, 在到達目的地之前, 我們可以從地圖上的資訊告知許多該地區的現象。微分幾何的曲面論也是在做同樣的事情, 我們利用映射 $\mathbf{x}(u, v)$ 將平面區域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 對應到曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$, 其中區域 U 就是手上的地圖, 而映射 $\mathbf{x}(u, v)$ 就是呈現地圖與實際位置之間的關係。在地圖上我們可以研究地圖上的平面曲線的長度, 再透過比例尺換算得到實際長度, 或是若要研究兩點之相對的方位或區域的面積 (在之後的活動才會深入探討), 數學上是透過第一基本式來理解它。

給定正則曲面 S, 首先我們利用 $\mathbb{R}^3$ 中的內積可以賦予正則曲面 S 在 *切平面* $T_p(S)$ 的一個內積運算 $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, 也就是說, 若 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$, 則 $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p$ 是計算兩向量在 $\mathbb{R}^3$ 中的內積。

定義 **5 (第 92 頁).** 給定正則曲面 S 與一點 p, 則 *二次型* (quadratic form) $I_p : T_p(S) \to \mathbb{R}$

$$I_p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{w}\|^2 \geq 0,$$

稱爲曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 在 p 點的 *第一基本式* (first fundamental form), 該映射在定義上來看是想要呈現切向量長度的平方。

現在想將第一基本式進行改寫。首先將 S 在 p 的一個鄰域參數化得到 $\mathbf{x}(u, v)$, 其中 $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, 在 U 中任取一條平面曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (u(t), v(t)), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}(0) = (u(0), v(0)) = q, \boldsymbol{\alpha}'(0) = (u'(0), v'(0))$。考慮空間曲線 $\boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, 並且 $\boldsymbol{\beta}(0) = \mathbf{x}(q) = p$。因爲 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ 會形成曲面 S 在 p 點的切平面的一組基底, 計算

$$\begin{aligned}
I_p(\boldsymbol{\beta}'(0)) &= \langle \boldsymbol{\beta}'(0), \boldsymbol{\beta}'(0) \rangle_p \\
&= \langle \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0), \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0) \rangle_p \\
&= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u'(0))^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u'(0)v'(0) + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v'(0))^2 \\
&= E(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2F(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + G(u_0, v_0)(v'(0))^2,
\end{aligned}$$

換言之, 若要了解在 $p \in S$ 的某個切向量的長度平方, 只要知道 $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ 的值, 還有當原始坐標平面下的曲線的切向量就可求得。在幾何上, 我們會把第一基本式寫成 *微分形式* (differential form) 的樣子:

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2$$

例題 **6 (**第 95–97 頁**).** 試寫出求以下曲面之一種參數表示法及其第一基本式:

(B1) 在 $\mathbb{R}^3$ 中通過 $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 且包含單位正交向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 的平面。

(B2) 圓柱 (circular cylinder) $x^2 + y^2 = 1$。

(C1) 球面 (sphere) $\mathbf{x}(\theta, \phi) = (R \sin\phi \cos\theta, R \sin\phi \sin\theta, R \cos\phi), \theta \in (0, 2\pi), \phi \in (0, \pi)$。

(C2) 螺旋面 (helicoid) $\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), u, v \in \mathbb{R}$。

(D1) 輪胎面 (torus) $\mathbf{x}(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u), u, v \in (0, 2\pi)$。

(D2) 旋轉曲面 (surfaces of revolution) $\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), u \in (0, 2\pi), v \in (a, b)$。

(E) 想一想 (B1) (B2) (C1) (C2) (D1) 中哪些可以套用 (D2) 的結果?

解**.**