微分幾何 (一) 課程學習單 活動 9

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 本單元將探討隱函數與正則曲面之間的關係。

2 由隱函數決定出的正則曲面

在活動 7 中, 我們從 $\mathbb{R}^3$ 中的坐標 (x, y, z) 之間滿足一個二次方程式來討論常見的二次曲面 (quadric surfaces)。現在我們將探討更一般的問題:

> 若 x, y, z 之間滿足一個隱函數 (implicit function) $F(x, y, z) = C$ 的關係, 那它在 $\mathbb{R}^3$ 中表現出的形狀會是一個正則參數曲面 (regular parametric surface) 嗎?

例題 **1.** 討論 $x^2 + y^2 + z^2 = C$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中的圖形。

解.

由上述的例子得知, 當我們隨便寫下一個隱函數時, 它在 $\mathbb{R}^3$ 中不見得會表現出一個「曲面」的樣子。而上述的討論, 只是基於我們對於這個方程式有足夠的理解而下的結論。對於一個很任意的隱函數 $F(x, y, z) = C$, 它是否爲曲面的機制是什麼? 而我們的野心更大, 目標是希望找到一個檢驗條件以快速判定隱函數實際上是一個正則參數曲面。

爲了回答這個問題, 我們給予以下定義:

定義 **2 (第 60 頁).** 給定光滑映射 $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 以及 $p \in U$,

(A) 若微分映射 $\mathrm{d}F_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *不是映成映射* (not surjective mapping, not onto mapping), 則稱 p 爲 F 的 *臨界點* (critical point)。

(B) 若 p 爲 F 的臨界點, 則稱 $F(p) \in \mathbb{R}$ 爲 F 的 *臨界值* (critical value)。

(C) 在 $\mathbb{R}$ 中所有不是 F 的臨界值的點稱爲 F 的 *正則值* (regular value)。

爲了要了解微分映射 $\mathrm{d}F_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, 現取 $\mathbb{R}^3$ 的基底 $\{\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\}$, 則微分映射矩陣 $[\mathrm{d}F_p]_{1\times 3}$ 對於基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 之下的表示法爲

$$[\mathrm{d}F_p]_{1\times 3} = [\, \mathrm{d}F_p(\mathbf{e}_1) \,|\, \mathrm{d}F_p(\mathbf{e}_2) \,|\, \mathrm{d}F_p(\mathbf{e}_3) \,] = [\, F_x(p) \;\, F_y(p) \;\, F_z(p) \,]。$$

因爲「$\mathrm{d}F_p$ 不是映成的」等價於 $F_x(p) = F_y(p) = F_z(p) = 0$。所以 $C \in F(U)$ 是 $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 的正則值等價於對所有 *逆映射* (inverse image) 的點 $F^{-1}(C) = \{(x,y,z) \in U : F(x,y,z) = C\}$ 而言 F_x, F_y, F_z 不能同時爲零。

以下定理將回答主要問題:

定理 3 (第 61 頁). 若 $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是一個光滑函數, 並且 $C \in F(U)$ 是 F 的正則值, 則 $F^{-1}(C)$ 是一個在 $\mathbb{R}^3$ 中的正則曲面。

現在我們利用定理來驗證一些隱函數表達式爲正則曲面, 而定理證明我們放到附錄補充。

例題 4 (第 63 頁). 驗證橢球 (ellipsoid) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 是一個正則曲面。

解.

例題 5 (第 64 頁). 考慮 *輪胎面* (torus) T^2, 它是由一個半徑爲 r 的圓 $\mathbb{S}^1$ 對著一條不與圓相交的直線旋轉而得的旋轉曲面。

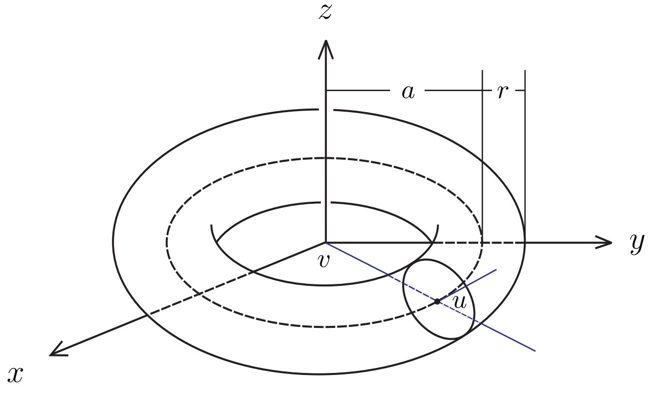

圖 1: 輪胎面 (Torus)。

假設圓與直線在 yz-平面上, 記 a 爲圓心到直線的距離。圓心位於 $(y,z)=(a,0)$, 而直線爲 z-軸。則在 yz-平面上圓的方程式爲 $\underline{\hspace{4cm}}$, 所以輪胎面 T^2 可以用隱函數表達:

$$\underline{\hspace{6cm}}$$

現在要證明輪胎面 T^2 爲正則曲面, 考慮函數 $F(x,y,z)=\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2$, 這個函數對所有 $(x,y)\neq(0,0)$ 的地方都是可微分的。計算

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\underline{\hspace{4cm}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\underline{\hspace{4cm}}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial F}{\partial z}=\underline{\hspace{1cm}}.$$

(A1) 函數 F 的所有臨界點爲 $\underline{\hspace{5cm}}$。

(A2) 函數 F 的所有臨界值爲 $\underline{\hspace{2cm}}$。

(A3) 因爲 $\underline{\hspace{6cm}}$, 所以輪胎面 T^2 爲正則曲面。

(A4) 輪胎面 T^2 的一個參數化表示法爲: $\underline{\hspace{9cm}}$。

例題 **6.** 試討論以下問題:

(B1) 驗證雙曲拋物面 (hyperbolic paraboloid) $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 是一個正則曲面。

(B2) 單葉雙曲面 (hyperboloid of one sheet) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 是一個正則曲面嗎?

解.

3 附錄: 定理 3 的證明 (第 61 頁)

證明 首先我們說明: 任何光滑函數的圖形 $\mathbf{x}(x,y)=(x,y,z(x,y)),(x,y)\in U$ 是一個正則參數曲面。這是因爲 $\mathbf{x}_x=(1,0,z_x),\mathbf{x}_y=(0,1,z_y)$, 而 $\mathbf{x}_x\wedge\mathbf{x}_y=(-z_x,-z_y,1)\neq\mathbf{0}$, 得知 $\mathbf{x}_x$ 與 $\mathbf{x}_y$ 線性獨立, 故得證。

令 $p=(x_0,y_0,z_0)\in F^{-1}(C)$, 因爲 C 是函數 F 的正則值, 不失一般性, 可假設在 p 點的 $F_z\neq 0$。現在要證明: 可在 p 點找到一個鄰域可以表示爲二變數函數的圖形。考慮以下映射:

$$\begin{aligned}\overline{F}:U\subset\mathbb{R}^3&\longrightarrow\mathbb{R}^3\\(x,y,z)&\longmapsto(u,v,t)=(x,y,F(x,y,z)),\end{aligned}$$

則映射 $\overline{F}$ 在 p 點的微分映射爲

$$\mathrm{d}\overline{F}_p=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\F_x&F_y&F_z\end{pmatrix},$$

我們得到 $\det(\mathrm{d}\overline{F}_p)=F_z\neq 0$。

由 反函數定理 (Inverse Function Theorem) 得知: 存在 p 的一個鄰域 V 與 $\overline{F}(p)$ 的一個鄰域 W 使得 $\overline{F}:V\to W$ 是可逆的 (invertible), 並且 $\overline{F}^{-1}:W\to V$ 是可微分映射; 也就是說, 關於 $\overline{F}^{-1}$ 的 坐標函數 (coordinate function)

$$x=u,\quad y=v,\quad z=g(u,v,t),\quad (u,v,t)\in W,$$

是可微分的。特別地, $z=g(u,v,C)=h(x,y)$ 是一個由 V 的投影映至 xy-平面的可微分函數。因爲

$$\overline{F}(F^{-1}(C)\cap V)=W\cap\{(u,v,t)|t=C\},$$

所以 $F^{-1}(C)\cap V$ 是函數 h 的圖形, 於是 $F^{-1}(C)$ 是正則曲面。 □

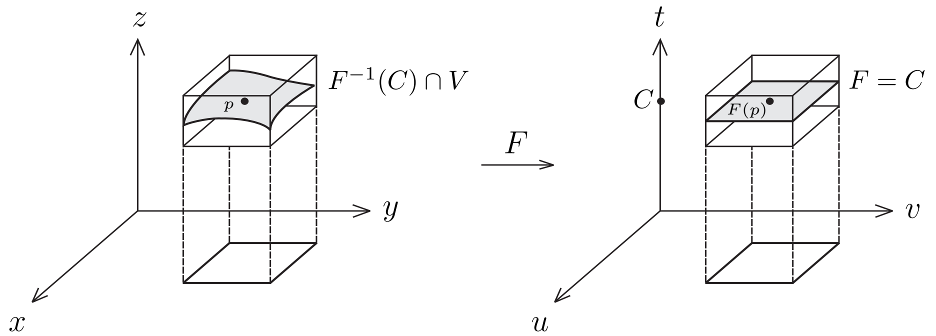

圖 2: 光滑映射 F 的正則值爲正則曲面。