微分幾何 (一) 課程學習單 活動 **7**

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 認識二次曲面 (quadric surface)。

2 預備知識

例題 **1.** 試討論以下問題:

(A1) 配方法在二次函數或二次方程式的效應是什麼? 而它對應到的幾何意義又是什麼?

(A2) 矩陣正交對角化在二次函數或二次方程式的效應是什麼? 而它對應到的幾何意義又是什麼?

解.

3 二次曲面的認識與分類

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 二次曲面 (quadric surface) 是由以下方程式決定出的圖形:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0,$$

其中 $A,B,C,\ldots,J$ 皆爲常數, 並且 A,B,C,D,E,F 不同時爲零。此時, 我們可用矩陣表達方程式:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} G & H & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} J \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}。$$

爲了以下的討論方便起見, 我們把上式簡記成 $\mathbf{x}^TM\mathbf{x}+N^T\mathbf{x}+J=0$。
<u>若 $D=E=F=0$</u>, 我們可以對 x,y,z 各別進行配方法得到帶有平移的標準式 (詳見附錄討論)。
<u>若 D,E,F 至少一項非零</u>, 則可以透過坐標的旋轉, 將所有交叉項去除, 再進行配方法整理及分類。
具體作法如下: 記 M 爲二次式所形成的 3×3 對稱矩陣, 則它可以正交對角化, 即存在可逆矩陣 P 與對稱矩陣 D 使得 $D=P^{-1}MP$ 以及 $P^TP=PP^T=I$。所以 $M=PDP^T$, 並且

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}M\mathbf{x}^T+N^T\mathbf{x}^T+J=\mathbf{x}(PDP^T)\mathbf{x}^T+N^T(PP^T)\mathbf{x}^T+J \\ =&(\mathbf{x}P)D(\mathbf{x}P)^T+N^TP(\mathbf{x}P)^T+J=\mathbf{y}D\mathbf{y}^T+\tilde{N}\mathbf{y}^T+J=0, \end{aligned}$$

還原之後就得到

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \tilde{G} & \tilde{H} & \tilde{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} J \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}。$$

也就是說:

$$\lambda_1(\tilde{x})^2+\lambda_2(\tilde{y})^2+\lambda_3(\tilde{z})^2+\tilde{G}\tilde{x}+\tilde{H}\tilde{y}+\tilde{I}\tilde{z}+J=0,$$

然後再用配方法處理它。

於是二次方程式都可以透過 $\mathbb{R}^3$ 之間的旋轉與平移, 歸結到標準型:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \qquad \text{或} \qquad Ax^2 + By^2 + Iz = 0。$$

一旦表示成標準型後, 再來要如何了解二次曲面的圖形長相? 我們可以利用觀察每個截面的曲線形狀刻畫曲面的長相。這裡我們將探討六種非退化 (三個變數都出現) 的二次曲面。

(B1) 橢球面 (ellipsoid): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$。

(1) 將曲面與平面 $z = k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$, 當 $k^2 < c^2$ 時爲 ______, 當 $k^2 = c^2$ 爲 ________, 當 $k^2 > c^2$ 時是 ________。

(2) 同理可以考慮曲面與平面 $y = k$ 或 $x = k$ 相交, 會得到類似的結果。

(B2) 錐面 (cone): $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$。

(1) 將曲面與平面 $z = k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$, 當 $k \neq 0$ 時爲 ______, 當 $k = 0$ 爲 ________。

(2) 將曲面與平面 $y = k$ 相交, 得到 $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{k^2}{b^2}$, 當 $k \neq 0$ 時爲 ________, 當 $k = 0$ 時爲 ________; 曲面與平面 $x = k$ 相交的情形亦同。

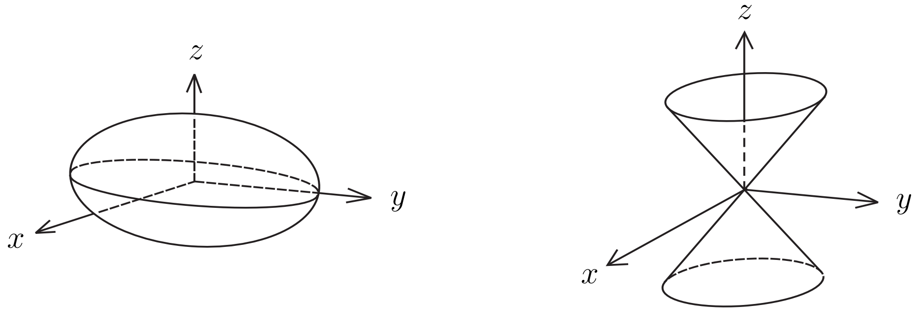

圖 1: 橢球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 與錐面 $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$。

(C1) 橢圓拋物面 (elliptic paraboloid): $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$。

(1) 將曲面與平面 $z = k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$, 當 $\frac{k}{c} > 0$ 爲 ______, 當 $k = 0$ 爲 ________, 當 $\frac{k}{c} < 0$ 時是 ________。

(2) 將曲面與平面 $y = k$ 相交, 得到 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}$, 對所有實數 k 都是 ________; 曲面與平面 $x = k$ 相交的情形亦同。

(C2) 雙曲拋物面、馬鞍面 (hyperbolic paraboloid): $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$。

(1) 將曲面與平面 $z = k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$, 當 $k \neq 0$ 爲 ________, 當 $k = 0$ 爲 ________。

(2) 將曲面與平面 $y = k$ 相交, 得到 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}$, 對所有實數 k 都是 ________;曲面與平面 $x = k$ 相交的情形亦同。

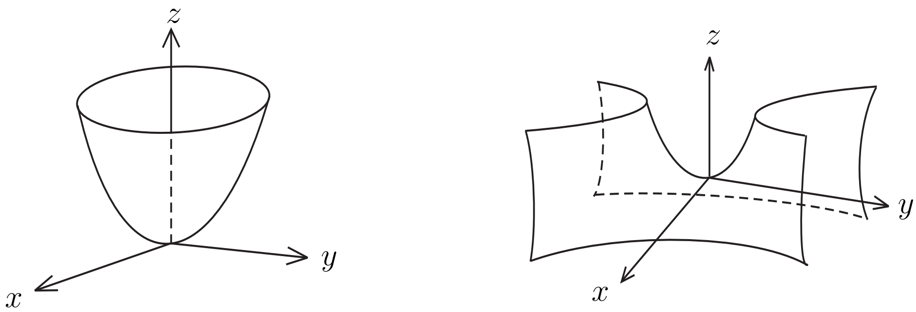

圖 2: 橢圓拋物面 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, ______ 與雙曲拋物面 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, ______。

(D1) 單葉雙曲面 (hyperboloid of one sheet): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$。

(1) 將曲面與平面 $z = k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$, 對所有實數 k 都是 ______。

(2) 將曲面與平面 $y = k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$, 當 $k^2 \neq b^2$ 爲 ______, 當 $k^2 = b^2$ 爲 ______; 曲面與平面 $x = k$ 相交的情形亦同。

(D2) 雙葉雙曲面 (hyperboloid of two sheets): $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$。

(1) 將曲面與平面 $z = k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$, 當 $k^2 > c^2$ 爲 ______, 當 $k^2 = c^2$ 爲 ______, 當 $k^2 < c^2$ 時是 ______。

(2) 將曲面與平面 $y = k$ 相交, 得到 $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}$, 對所有實數 k 都是 ______; 曲面與平面 $x = k$ 相交的情形亦同。

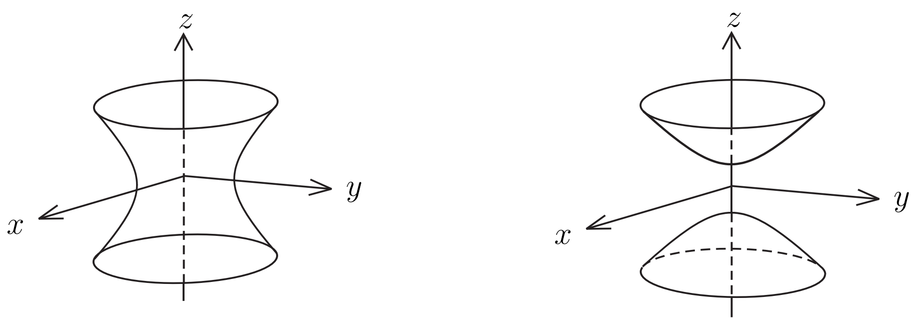

圖 3: 單葉雙曲面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 與雙葉雙曲面: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$。

例題 **2.** 如何由方程式確定單葉雙曲面或是雙葉雙曲面? ______________________________

例題 **3.** 試理解以下二次曲面:

(A) 橢圓柱面 (elliptic cylinder): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;圓柱面 (circular cylinder): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$。

(B) 雙曲柱面 (hyperbolic cylinder): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$。

(C) 拋物柱面 (parabolic cylinder): $x^2 + 2ay = 0$。

附錄

在 $\mathbb{R}^3$ 中,二次曲面 (quadric surface) 是由以下方程式決定出的圖形:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0,$$

其中 $A,B,C,\ldots,J$ 皆爲常數, 並且 A,B,C,D,E,F 不同時爲零。我們可用矩陣表達方程式:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} G & H & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} J \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}。$$

爲了以下的討論方便起見, 我們把上式簡記成 $\mathbf{x}^T M\mathbf{x}+N^T\mathbf{x}+J=0$

(1) 若 $D=E=F=0$, 得到 $Ax^2+By^2+Cz^2+Gx+Hy+Iz+J=0$。

(1A) <u>若 $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0$</u>, 則

令

$$\tilde{x}=x+\frac{G}{2A},\quad \tilde{y}=y+\frac{H}{2B},\quad \tilde{z}=z+\frac{I}{2C},\quad -\tilde{J}=-J+\frac{G^2}{4A}+\frac{H^2}{4B}+\frac{I^2}{4C},$$

則上式可以轉換成 $A\tilde{x}^2+B\tilde{y}^2+C\tilde{z}^2+\tilde{J}=0$ 即爲第一類標準式。

(1B) <u>若 A,B,C 有一個爲 0</u>, 不失一般性, 假設 $C=0$, 則

令

$$\tilde{x}=x+\frac{G}{2A},\quad \tilde{y}=y+\frac{H}{2B},\quad \tilde{z}=z+\frac{J}{I}-\frac{G^2}{4AI}-\frac{H^2}{4BI},$$

則上式可以轉換成 $A\tilde{x}^2+B\tilde{y}^2+I\tilde{z}=0$ 即爲第二類標準式。

(1C) <u>若 A,B,C 有兩個爲 0</u>, 不失一般性, 假設 $B=C=0$, 則

令

$$\tilde{x}=x+\frac{G}{2A},\quad \tilde{z}=Hy+Iz+J+\frac{G^2}{4A}$$

則上式可以轉換成 $A\tilde{x}^2+I\tilde{z}=0$ 即爲第二類標準式。

(2) 若 D, E, F 至少一項非零, 由 $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} + N^T\mathbf{x} + J = 0$ 出發, 因爲矩陣 M 爲實對稱矩陣, 所以可以正交對角化, 即存在對角矩陣 D 以及正交矩陣 P 滿足

$$\begin{cases} D = P^{-1}MP \\ P^T P = PP^T = \mathrm{Id} \end{cases}$$

因爲 ____________, 所以將 $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} + N^T\mathbf{x} + J = 0$ 改寫成

還原之後就得到

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{G} & \tilde{H} & \tilde{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}。$$

也就是說:

$$\lambda_1(\tilde{x})^2 + \lambda_2(\tilde{y})^2 + \lambda_3(\tilde{z})^2 + \tilde{G}\tilde{x} + \tilde{H}\tilde{y} + \tilde{I}\tilde{z} + J = 0,$$

然後再用 (1) 的過程進行配方法處理它。