微分幾何 (一) 課程學習單 活動 6

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 介紹平面曲線理論 — 有向曲率 (signed curvature)。

☐ 介紹平面曲線的整體性質 (global geometry)。

2 預備知識

討論 **1.** 複習微積分課程中所學的積分與面積的關係:

(A) 理解連續函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的定積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 對應的幾何意義。

(B) 給定封閉平面曲線的參數式 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, 如何用積分式描述曲線所圍出的區域面積?

解.

3 平面曲線與有向曲率 (第 22 頁)

對於空間曲線, 我們必須假設曲率是處處非零, 也就是 $\kappa(s) > 0$ 時才有一套較爲完整的理論。然而在平面曲線的情況, 我們可以採用不同於空間曲線的理論去處理曲線有“反曲點”的情況。

記 $\{\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一組有序基底 (ordered basis), 然後對於 *平面曲線* (plane curve) $\boldsymbol{\alpha}(s) : I \to \mathbb{R}^2$, 其中 s 爲弧長參數, 首先定義單位切向量 $\mathbf{t}(s) = \boldsymbol{\alpha}'(s)$, 然後定義單位法向量 $\mathbf{n}(s)$ 使得 $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ 與 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 具有 *同樣的定向* (the same orientation), 也就是去看基底依序寫下時行列式的正負號是否一致。然後定義 *有向曲率* (signed curvature) 爲:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} \overset{\text{定義}}{=\!=} \kappa(s)\mathbf{n}(s)。$$

這麼一來, 平面曲線的曲率 $\kappa(s)$ 可正可負。

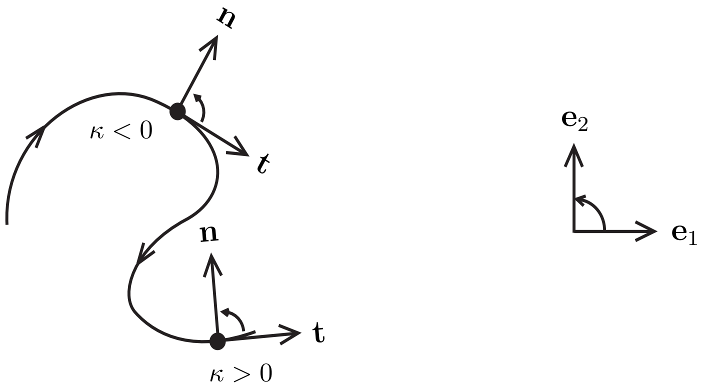

圖 1: 平面曲線論與空間曲線論稍微不同, 可以定義有向曲率以描述更多現象。

☐ 平面曲線可利用 $\mathbf{t}(s)$ 逆時針轉 $\frac{\pi}{2}$ 先定義 $\mathbf{n}(s)$, 再定義有符號的曲率。

平面曲線論與空間曲線論之間在以下意義下是 *相容的* (compatible): 平面曲線論所定義出的有向曲率, 加上絕對值 $|\kappa(s)|$ 之後與利用空間曲線的理論定義出的曲率一致。

例題 **2.** 試討論平面曲線, 因爲定向不同時所有幾何量 (單位切向量、單位法向量、有向曲率、曲線長度) 的異同。

解.

☐ 對於封閉曲線, 我們通常會選取曲線的定向使得法向量指向內部, 稱爲「正的定向」。

4 平面曲線的整體性質

定義 3 (第 **32–33** 頁)**.**

(A) 一條正則的光滑參數曲線 $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 若在端點 $\boldsymbol{\alpha}(a)$ 與 $\boldsymbol{\alpha}(b)$ 的各階求導 (向量) 都一致;也就是說, 對所有 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 都有 $\boldsymbol{\alpha}_+^{(n)}(a) = \boldsymbol{\alpha}_-^{(n)}(b)$, 則稱它爲 封閉的光滑曲線 (closed)。

(B) 若一條曲線不自交, 換言之, 對所有 $t_1, t_2 \in [a, b), t_1 \neq t_2$ 都滿足 $\boldsymbol{\alpha}(t_1) \neq \boldsymbol{\alpha}(t_2)$, 則稱曲線是簡單的 (simple)。

(C) 對於簡單封閉曲線, 若選取的參數化 $\boldsymbol{\alpha}$ 所定義出的法向量完全指向曲線的內部, 稱這條曲線賦予 正的定向 (positively oriented)。

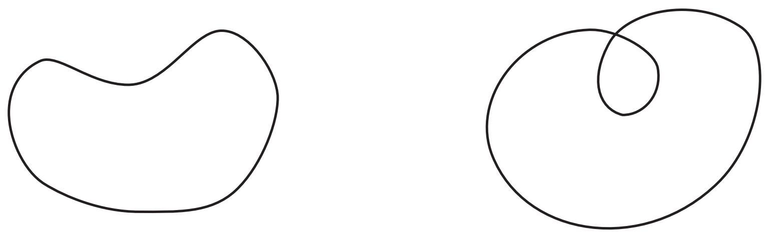

圖 2: 左圖: 簡單封閉曲線;右圖: 不是簡單的封閉曲線。

4.1 等周不等式 (The Isoperimetric Inequality), 第 33 頁

問題. 給定一條長度爲 l 的繩子, 如何圍出一個單簡封閉的區域使得面積最大?

定理 4 (等周不等式)**.** 令 C 是一條長度爲 l 的簡單封閉曲線, 記 A 爲由 C 包圍住的區域面積, 則

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi},$$

等式成立時若且唯若 C 是一個圓。

證明. 如圖 3 所示, 首先找兩條與曲線 C 相切的平行線 L 與 L' 使得曲線 C 完全落在 L 與 L' 之間。另取一圓 $\mathbb{S}^1$ 與 L 和 L' 相切, 並且不與曲線 C 相交。記 O 爲圓心, 並取坐標系使坐標原點爲 O 並且 x-軸與 L 和 L' 垂直。

將曲線 C 以弧長參數表示, 記成 $\boldsymbol{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$, 此處要求曲線 C 所選的參數化爲正的定向, 並且當 $s = 0$ 時對應於曲線 C 與 L 的切點。由此, 我們可以得到對於 $\mathbb{S}^1$ 的一種參數化方式爲:

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}(s) = (\overline{x}(s), \overline{y}(s)) \overset{\text{定義}}{=\!=} (x(s), \overline{y}(s)), \quad s \in [0, l],$$

注意到這個 s 對於 $\mathbb{S}^1$ 來說不是弧長參數。

記 A 與 $\overline{A}$ 分別表示曲線 C 與 $\mathbb{S}^1$ 所圍之面積, 則

$$A = \int_0^l x(s) y'(s) \mathrm{d}s \quad \text{與} \quad \overline{A} = -\int_0^l \overline{y}(s) x'(s)\, \mathrm{d}s = \frac{\overline{l}^2}{4\pi},$$

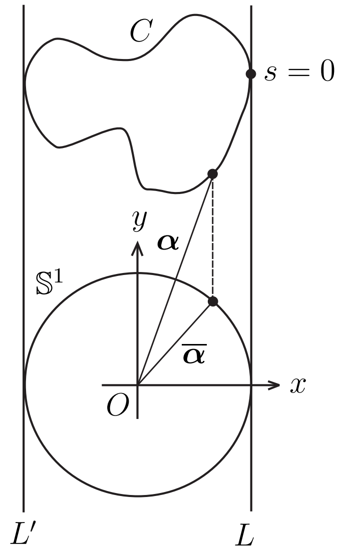

圖 3: 證明等周不等式。

其中 $\bar{l}$ 是 $\mathbb{S}^1$ 的周長, 所以 $\mathbb{S}^1$ 的半徑爲 $\frac{\bar{l}}{2\pi}$. 利用 柯西不等式 (Cauchy inequality), 得到

$$\begin{aligned} A+\frac{\bar{l}^2}{4\pi} = A+\overline{A} &= \int_0^l (x(s)y'(s)-\overline{y}(s)x'(s))\,\mathrm{d}s \\ &\le \int_0^l \sqrt{((x(s))^2+(\overline{y}(s))^2)((x'(s))^2+(y'(s))^2)}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^l \sqrt{(\overline{x}(s))^2+(\overline{y}(s))^2}\,\mathrm{d}s = \frac{l\bar{l}}{2\pi}, \end{aligned}$$

因此

$$A \le -\frac{\bar{l}^2}{4\pi}+\frac{l\bar{l}}{2\pi} = -\frac{1}{4\pi}\left(\bar{l}^2-2l\bar{l}+l^2\right)+\frac{l^2}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\left(\bar{l}-l\right)^2+\frac{l^2}{4\pi} \le \frac{l^2}{4\pi}。$$

現證明等式成立的情況: 因爲上述的不等式都必須等號成立, 所以我們得到兩個條件: (1) $\bar{l}=l$ (2) 向量 $(x(s),-\overline{y}(s))$ 與 $(y'(s),x'(s))$ 平行, 於是

$$x(x)x'(s) = -\overline{y}(s)y'(s). \tag{1}$$

令 $r=\frac{\bar{l}}{2\pi}=\frac{l}{2\pi}$ 爲 $\mathbb{S}^1$ 的半徑, 因爲 $\mathbb{S}^1$ 的參數式爲 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}(s)=(x(s),\overline{y}(s))$, 所以 $(x(s))^2+(\overline{y}(s))^2=r^2$, 或寫成 $\overline{y}(s)=\pm\sqrt{r^2-(x(s))^2}$。於是 (1) 式可改寫成

$$y'(s) = \mp\frac{x(s)x'(s)}{\sqrt{r^2-(x(s))^2}}。$$

對此微分方程式積分後得到

$$\begin{aligned} y(s) &= \mp\int \frac{x(s)x'(s)}{\sqrt{r^2-(x(s))^2}}\,\mathrm{d}s = \pm\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{r^2-(x(s))^2}}\,\mathrm{d}(r^2-(x(s))^2) \\ &= \pm\sqrt{r^2-(x(s))^2}+C_0. \end{aligned}$$

因爲 $\boldsymbol{\alpha}(0)=(x(0),y(0))=(r,0)$, 所以 $C_0=0$, 於是 $(y(s))^2=r^2-(x(s))^2$, 或 $(x(s))^2+(y(s))^2=r^2$。如此一來, 證明曲線 C 爲圓。 $\square$

4.2 切向量旋轉定理 (The Theorem of Turning Tangents), 第 39 頁

記 $\boldsymbol{\alpha} : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ 爲封閉的平面曲線, 其中 $\boldsymbol{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$, 而 s 爲弧長參數。那麼切向量 $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ 是單位長。引進 *切向量指標* (tangent indicatrix) $\mathbf{t} : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ 爲 $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$。這個切量向指標的概念, 就是將切向量的起點全部聚在一起, 所以切向量指標是一個光滑的平面曲線, 而軌跡包含於單位圓中。

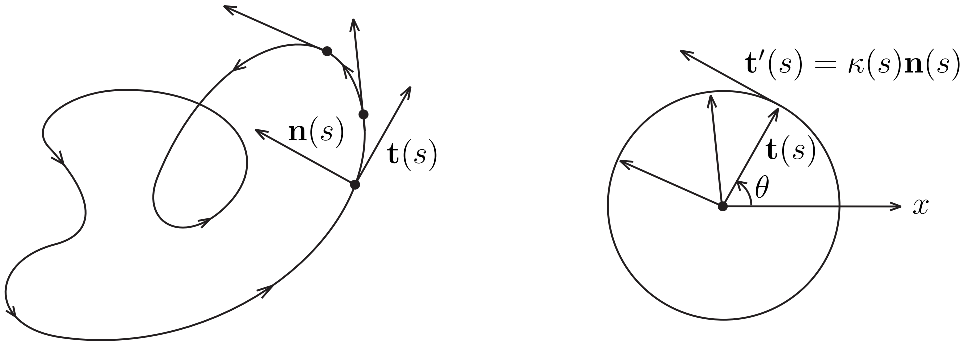

圖 4: 切向量指標 (tangent indicatrix)。

記 $\theta(s)$ 爲 $\mathbf{t}(s)$ 與 x-軸之間的逆時針夾角, 則可寫成 $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$, 利用鏈鎖律 (chain rule) 得到

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\cos\theta(s), \sin\theta(s)) = (-\sin\theta(s)\theta'(s), \cos\theta(s)\theta'(s)) = \theta'(s)\mathbf{n}(s)。$$

因爲 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, 所以 $\theta'(s) = \kappa(s)$, 於是可以將 $\theta(s) : [0, l] \to \mathbb{R}$ 改寫成 $\theta(s) = \int_0^s \kappa(s)\,\mathrm{d}s$。直觀而言, $\theta(s)$ 想要測量的是曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 從 0 到 s 之間切向量的總旋轉量, 因爲曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 是封閉的, 可得總旋轉量是 2π 的整數倍;換言之,

$$\int_0^l \kappa(s)\,\mathrm{d}s = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi I.$$

其中 $I \in \mathbb{Z}$ 稱爲曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 *旋轉指標* (rotation index)。注意到旋轉指標會隨著曲線定向不同而變號。

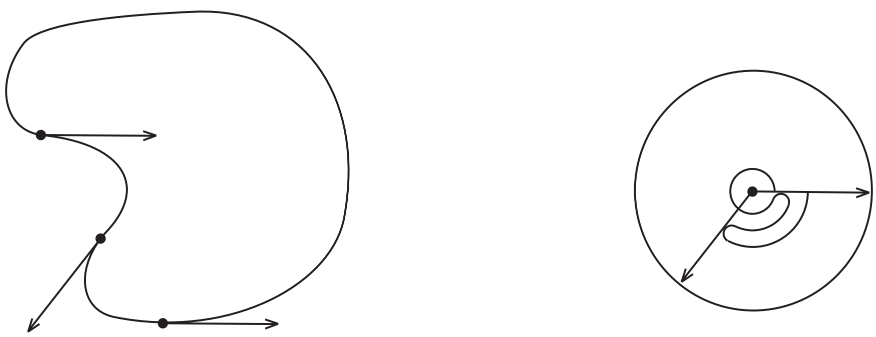

圖 5: 旋轉指標 $I = 1$ 的封閉曲線。

若將圖 5 的曲線給予相反的定向, 則可得到旋轉指標 $I = -1$ 的封閉曲線。

討論 5. 與伙伴討論以下問題。

(A1) 畫出一條旋轉指標 $I = 2$ 的封閉曲線, 請伙伴幫你確認你所畫的曲線是否符合要求。

(A2) 畫出一條旋轉指標 $I = 0$ 的封閉曲線, 請伙伴幫你確認你所畫的曲線是否符合要求。

解.

定理 6 (切向量旋轉定理, 第 37 頁). 簡單封閉曲線的旋轉指標爲 ± 1, 正負號與曲線的定向有關。

4.3 四頂點定理 (The Four-Vertex Theorem), 第 39 頁

定義 7 (第 39 頁). 一條正則平面曲線 $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 的 *頂點* (vertex) 是指滿足 $\kappa'(t) = 0$ 的點。

定理 8 (第 39 頁). 簡單封閉曲線至少有四個頂點。

討論 9. 與伙伴討論以下問題。

(B1) 畫出一條頂點正好爲四個的簡單封閉曲線。

(B2) 什麼樣的平面曲線頂點只會有兩個?

解.