微分幾何 (一) 課程學習單 活動 5

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 以泰勒級數的觀點重新研究空間曲線的局部現象。

☐ 研究曲線定向改變與各式幾何量之間的關係。

2 預備知識

討論 1. 討論以下問題:

(A) 何謂 $f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 的 泰勒級數 (Taylor series) 或 馬克勞林級數 (Maclaurin series)?

(B) 將函數用泰勒級數表示的目的爲何?

(C) 畫出 $f(x) = x^2, g(x) = x^3$ 與 $h(x) = \pm x^{\frac{3}{2}}$ 的函數圖形。

(D) 複習曲線 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 在 s 處的密切平面、法平面、從切面之意義。

解.

3 曲線的局部自然表示式

記 $\boldsymbol{\alpha}(s): I \to \mathbb{R}^3$ 是以弧長 s 爲參數的正則光滑參數表示法。在 $s=0$ 處, 有一組專屬於曲線的活動標架 $\{\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)\}$, 現在想研究 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 在 $s=0$ 附近的行爲, 利用 *泰勒級數* (Taylor series) 將曲線 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 對變數 s 展開到三階:

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \boldsymbol{\alpha}(0) + \frac{\boldsymbol{\alpha}'(0)}{1!}s + \frac{\boldsymbol{\alpha}''(0)}{2!}s^2 + \frac{\boldsymbol{\alpha}'''(0)}{3!}s^3 + \boldsymbol{R}(s), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{R}(s)$ 是泰勒級數的 *餘項* (remainder), 它滿足 $\lim\limits_{s\to 0}\frac{\boldsymbol{R}(s)}{s^3} = \mathbf{0}$。現在要將上述泰勒展式的每一階係數重新表達 (注意到這裡的係數都是<u>向量</u>):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}'(s) &= \mathbf{t}(s) \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{t}(0)\\
\boldsymbol{\alpha}''(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}''(0) = \kappa(0)\mathbf{n}(0)\\
\boldsymbol{\alpha}'''(0) &= \kappa'(s)\mathbf{n}(s) + \kappa(s)\mathbf{n}'(s)\big|_{s=0} = \kappa'(s)\mathbf{n}(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s))\big|_{s=0}\\
&= -\kappa^2(0)\mathbf{t} + \kappa'(0)\mathbf{n}(0) - \kappa(0)\tau(0)\mathbf{b}(0),
\end{aligned}$$

所以 (1) 式可改寫成

$$\boldsymbol{\alpha}(s) - \boldsymbol{\alpha}(0) = \left(s - \frac{\kappa^2(0)}{3!}s^3\right)\mathbf{t}(0) + \left(\frac{\kappa(0)}{2!}s^2 + \frac{\kappa'(0)}{3!}s^3\right)\mathbf{n}(0) - \frac{\kappa(0)\tau(0)}{3!}s^3\mathbf{b}(0) + \boldsymbol{R}(s)。$$

現將 $\mathbb{R}^3$ 賦予坐標系 $Oxyz$ 使得坐標中心 O 與 $\boldsymbol{\alpha}(0)$ 一致, 並且 $\mathbf{t}(0) = (1,0,0)$, $\mathbf{n}(0) = (0,1,0)$, $\mathbf{b}(0) = (0,0,1)$。這麼一來, 曲線參數式便可表示爲 $\boldsymbol{\alpha}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, 其中

$$\begin{cases}
x(s) = s - \dfrac{\kappa^2(0)}{3!}s^3 + R_x(s)\\
y(s) = \dfrac{\kappa(0)}{2!}s^2 + \dfrac{\kappa'(0)}{3!}s^3 + R_y(s)\\
z(s) = -\dfrac{\kappa(0)\tau(0)}{3!}s^3 + R_z(s),
\end{cases} \tag{2}$$

並且 $\lim\limits_{s\to 0}\frac{R_x(s)}{s^3} = \lim\limits_{s\to 0}\frac{R_y(s)}{s^3} = \lim\limits_{s\to 0}\frac{R_z(s)}{s^3} = 0$。我們稱 (2) 式爲曲線 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 在 $s=0$ 附近的 *局部自然表示式* (local canonical form)。

從上述的局部自然表示式, 我們可以進行以下的觀察:

例題 **2 (第 29 頁, 由 $z(s)$ 解釋扭率正、負號的幾何意義).** 由 (2) 式當中的 $z(s)$ 表達, 若 $\tau(0) < 0$, 則只要 s 夠小, $z(s)$ 對 s 而言是遞增函數。注意到此時 $z=0$ 是曲線在 $\boldsymbol{\alpha}(0)$ 的密切平面, 而 z-軸的正向爲 $\mathbf{b}(0)$ 的指向, 並且 $z(0)=0$。當 s 由負變零再變正的變化時, 對應到的 $z(s)$ 也是由負變零再變正, 所以曲線在 $s=0$ 處穿出密切平面的情況與 $\mathbf{b}(0)$ 的指向一致。

同理, 若 $\tau(0) > 0$, 曲線在 $s=0$ 處穿出密切平面的情況會與 $-\mathbf{b}(0)$ 的指向一致。可見圖 1 之輔助說明。

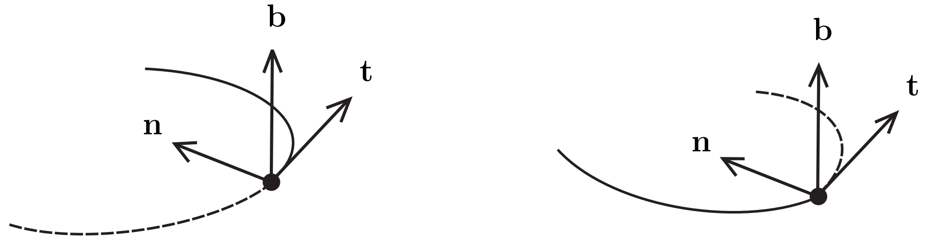

圖 1: 左圖: 扭率爲負;右圖: 扭率爲正。曲線局部而言會完全落在從切面對於法向量爲正的一側。

例題 **3 (**第 **30** 頁**,** 由 $y(s)$ 證明曲線局部會落在從切面的一側**).** 由 (2) 式當中的 $y(s)$ 表達, 由函數的連續性, 存在包含 $s=0$ 的一個開區間 $J \subset I$ 使得軌跡 $\boldsymbol{\alpha}(J)$ 完全落在從切面對於法向量 $\mathbf{n}(0)$ 爲正的一側。可見圖 1 之輔助說明。

例題 **4 (**第 **30** 頁**,** 密切平面的位置**).** 我們可用局部自然表示式可以重新刻畫密切平面的所在位置:

> 考慮由曲線 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 在 s 處的切線以及點 $\boldsymbol{\alpha}(s+h)$ 所張出的平面, 這個平面對於 $h \to 0$ 之下的極限會是曲線 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 在 s 處的密切平面。

爲證明這個現象, 不失一般性 (without loss of generality), 假設欲觀察的點爲 $s=0$。利用前述的坐標系, 若要研究包含曲線在 $s=0$ 處的切線與點 $\boldsymbol{\alpha}(0+h)$ 的平面, 首先把平面的法向量求出, 它會平行於

$$(1,0,0) \wedge \left(h, \frac{\kappa(0)}{2!}h^2, -\frac{\kappa(0)\tau(0)}{3!}h^3\right) /\!/ \left(0, \frac{\kappa(0)\tau(0)}{3!}h^3, \frac{\kappa(0)}{2!}h^2\right) /\!/ \left(0, \frac{\tau(0)}{3}h, 1\right),$$

所以通過 $\boldsymbol{\alpha}(0)=(0,0,0)$ 且法向量平行於 $\left(0, \frac{\tau(0)}{3}h, 1\right)$ 的平面方程式爲 $\left(\frac{\tau(0)}{3}h\right)y+z=0$。當 $h \to 0$, 這一族平面會收斂至 $z=0$, 也就是 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 在 $s=0$ 處的密切平面。

討論 **5.** 先將手上的道具彎曲成空間曲線, 和伙伴互相研究從哪個方向看曲線, 局部來說長得像 $f(x)=x^2, g(x)=x^3$ 與 $h(x)=\pm x^{\frac{3}{2}}$ 的函數圖形。將其結果照相後上傳。

4 曲線改變定向與幾何量的關係 (第 12,18 頁)

給定一條空間曲線 C, 首先給予一種以弧長爲參數的表示法 $\boldsymbol{\alpha}(s)$, 其中 $s \in [a, b]$, 我們可以由此造出另一個以弧長爲參數的表示法 $\boldsymbol{\beta}(s) \overset{\text{定義}}{=\!=} \boldsymbol{\alpha}(-s)$, 其中 $s \in [-b, -a]$。兩種參數表示法的軌跡都是 C, 但是行走的方向不同, 我們將說這兩個參數化曲線之間相差一個 *改變定向* (change of orientation) 的關係。

現在要觀察的是: 若兩個以弧長爲參數化的曲線之間相差一個改變定向的關係時, 先前定義過的一些幾何量的異同。

(A) 由 $\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\alpha}(-s)$, 兩邊對 s 求導後得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}(-s)}{\mathrm{d}s} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(s)}{\mathrm{d}(s)} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}(-s)}{\mathrm{d}(-s)}\frac{\mathrm{d}(-s)}{\mathrm{d}s} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(s)}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}(-s)}{\mathrm{d}(-s)},$$

所以兩者定義出的單位切向量之間 ____________________。

(B) 由上式再對 s 求導之後得到兩者的單位法向量之間 ____________________。

(C) 由定義 $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ 得知兩者的單位次法向量之間 ____________________。

(D) 對同樣的曲線, 若參數化之間差一個改變定向的關係時, 曲率 κ ____________________。

(E) 對同樣的曲線, 若參數化之間差一個改變定向的關係時, 扭率 τ ____________________。

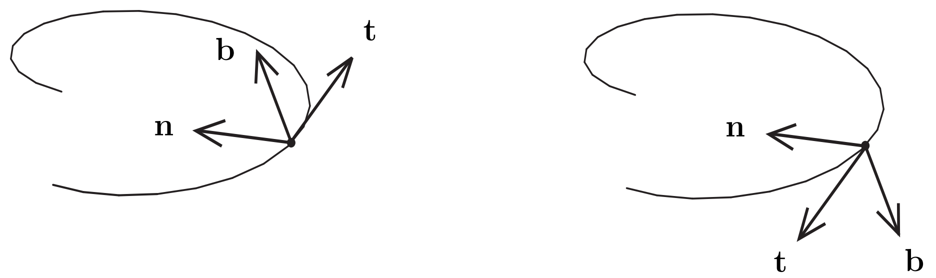

圖 2: 改變定向時活動標架的方向關係。