微分幾何 (一) 課程學習單　　　　活動 4

學號: ______________　　姓名: ______________　　你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 確實理解曲率與扭率的幾何意義以及曲率與扭率的一般公式。

2 預備知識

例題 **1.** 討論以下兩個外積公式的意義:

(A) $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$　　(B) $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$。

解**.**

3 曲率與扭率的刻劃

例題 **2.** 試求半徑爲 R 的圓之曲率。

解**.** 將圓置於 xy 平面上, 並圓心爲坐標中心, 則圓可用參數化 $\boldsymbol{\alpha}(s)=$ ________________ 表示, 其中 s 爲弧長參數。則

$$\boldsymbol{\alpha}'(s)=\underline{\hspace{4cm}},\quad \boldsymbol{\alpha}''(s)=\underline{\hspace{4cm}}\quad\Rightarrow\quad\kappa=\underline{\hspace{1cm}}。$$

例題 **3 (**第 **19** 頁**).** 若 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 是 平面曲線 (plane curve), 也就是曲線的軌跡包含於空間中的某個平面, 則該平面與其密切平面一致, 因此 $\tau(s)\equiv 0$。反之, 若一個曲線滿足 $\tau(s)\equiv 0$ 與 $\kappa(s)\neq 0$, 則 $\mathbf{b}(s)=\mathbf{b}$ 是一個處處有定義並且與 s 無關的向量。因爲 $\mathbf{t}\perp\mathbf{b}$, 所以 $(\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot\mathbf{b})'=\boldsymbol{\alpha}'(s)\cdot\mathbf{b}=0$, 得知 $\boldsymbol{\alpha}(s)\cdot\mathbf{b}$ 爲常數。所以位置向量 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 是包含於某一個以 $\mathbf{b}$ 爲法向量的平面。

上面兩個例子的結論: ____。

4 曲率與扭率的公式

前面的活動, 利用弧長參數 s 定義曲線的曲率與扭率。這個活動將回答另一個問題, 若用其他的參數 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 表示時, 如何直接得到曲率與扭率?

定理 4 (第 26 頁). 給定正則的光滑參數曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t)$,

(A) $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 的曲率公式爲 $\kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|} = \dfrac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3}$。

(B) $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 的扭率公式爲 $\tau(t) = -\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'''(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2} = -\dfrac{\det(\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t), \boldsymbol{\alpha}'''(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2}$。

注意到上述公式的微分都是對於變數 t 而言求導。

證明.

(A) 由鏈鎖律 (chain rule) 得知

$$\kappa \overset{\text{定義}}{=} \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}(s)}{\mathrm{d}s}\right\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}(t(s))}{\mathrm{d}s}\right\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}t}\right\| \left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right| = \|\mathbf{t}'(t)\| \frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|} = \|\mathbf{t}'(t)\| \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|},$$

因爲 $\boldsymbol{\alpha}'(t) = \mathbf{t}(t)\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}''(t) = \mathbf{t}'(t)\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| + \mathbf{t}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$, 並且

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t) = \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^2 \ \mathbf{t}(t) \wedge \mathbf{t}'(t)。$$

注意到因爲 $\|\mathbf{t}(t)\| = 1$, 所以 $\mathbf{t}(t)$ 與 $\mathbf{t}'(t)$ 互相垂直, 故

$$\frac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3} = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^2\|\mathbf{t}(t)\|\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3} = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|} = \kappa(t)。$$

(B) 因爲 $\mathbf{t}(t) = \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}$ 與 $\mathbf{b}(t) = \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)\wedge\boldsymbol{\alpha}''(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\wedge\boldsymbol{\alpha}''(t)\|}$, 由外積關係 $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$ 得

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t) = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}\boldsymbol{\alpha}''(t) - \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}''(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}\boldsymbol{\alpha}'(t),$$

由鏈鎖律 (chain rule) 知道 $\mathbf{b}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, 所以

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}'''(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}\right)(\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)) = \tau(t)\,\mathbf{n}(t)\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

上面等式兩邊與 $\mathbf{n}(t)$ 內積後得到

$$\begin{aligned}\tau(t)\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \frac{(\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}'''(t)) \cdot \mathbf{n}(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}\right)(\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)) \cdot \mathbf{n}(t) \\ &= -\frac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|(\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'''(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2}\end{aligned}$$

因爲 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$, 所以

$$\tau(t) = -\frac{(\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'''(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2} = -\frac{\det(\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t), \boldsymbol{\alpha}'''(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2}。$$

□

5 曲率公式的重新理解

討論 **5.** 討論以下公式為什麼不可能會是曲率公式。

(1) $\left\|\dfrac{\boldsymbol{\alpha}'(t)\wedge\boldsymbol{\alpha}''(t)}{\boldsymbol{\alpha}'(t)^3}\right\|$

(2) $\dfrac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot\boldsymbol{\alpha}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3}$

(3) $\dfrac{\|\boldsymbol{\alpha}(t)\wedge\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3}$

(4) $\dfrac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\wedge\boldsymbol{\alpha}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}(t)\|^3}$

(5) $\dfrac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\wedge\boldsymbol{\alpha}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}$

討論 **6.** 討論以下公式爲什麼不可能會是扭率公式。

(A) $-\dfrac{\det(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2}$

(B) $-\dfrac{\det(\boldsymbol{\alpha}''(t), \boldsymbol{\alpha}''(t), \boldsymbol{\alpha}'''(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2}$

(C) $\dfrac{\det(\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t), \boldsymbol{\alpha}'''(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2}$ (加負號的意義)

(D) $-\dfrac{\det(\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t), \boldsymbol{\alpha}'''(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}$