微分幾何 (一) 課程學習單　　活動 3

學號: ______________　　姓名: ______________　　你的伙伴: ______________

1　單元介紹與學習目標

☐ 介紹曲線局部論基本定理; 藉此回答判斷兩條空間曲線是否全等的方法。

2　預備知識

問題 **1.** 給定兩個非零向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$,

(A) 兩向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 的外積 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ 之分量表示法爲何?

(B) 兩向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 的外積 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 之間有什麼幾何的性質?

(C) 向量 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ 的長度與 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 各自的長度之間有什麼關係?

(D) 向量 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ 與 $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ 之間的差別是什麼?

(E) 若向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 平行, 那麼 $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ 會是什麼?

解.

3 活動標架

給定一條空間曲線, 若我們能賦予它一種正則的光滑參數式 $\boldsymbol{\alpha}(t) : I \to \mathbb{R}^3$, 則可以對它重新參數化, 讓空間曲線改以弧長爲參數的正則光滑參數曲線 $\boldsymbol{\alpha}(s) = \boldsymbol{\alpha}(t(s)) : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ 表示。現在想從弧長爲參數的曲線 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 定義曲線「彎曲」現象的幾何量。

接下來我們必須對於 $\boldsymbol{\alpha}''(s)$ 是否處處都是非零向量這件事分情況討論。

定義 2 (第 17, 18 頁).

(A) 我們特別用記號 $\mathbf{t}(s) \overset{\text{定義}}{=\!=} \boldsymbol{\alpha}'(s)$ 代表曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 s 處的 單位切向量 (unit tangent vector)。

(B) 定義 $\kappa(s) = \|\boldsymbol{\alpha}''(s)\|$ 爲曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 s 處的 曲率 (curvature)。

因爲 $\mathbf{t}(s) = \boldsymbol{\alpha}'(s)$ 是單位長, 所以 $\|\boldsymbol{\alpha}''(s)\|$ 想表現的是單位切向量對於 s 的變化率的大小; 換言之, $\kappa(s)$ 想描述曲線在欲研究的點附近觀察曲線脫離切線的程度。

例題 3 (第 17 頁). (A1) 驗證直線的曲率處處爲零; (A2) 反之, 曲率處處爲零的空間曲線爲直線。

解.

現在假設對所有 $s \in I$, $\boldsymbol{\alpha}''(s) \neq \mathbf{0}$, 也就是假設曲線的曲率處處非零。這時, 將單位切向量微分, 並改寫成 $\mathbf{t}'(s) = \boldsymbol{\alpha}''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, 其中 $\mathbf{n}(s)$ 是空間中的單位向量。因爲 $\boldsymbol{\alpha}'(s) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(s) = 1$, 得到 $\boldsymbol{\alpha}''(s) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(s) = 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}''(s)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}'(s)$ 互相垂直; 換言之, $\mathbf{n}(s)$ 與 $\mathbf{t}(s)$ 互相垂直。

定義 4 (第 18 頁).

(A) 單位向量 $\mathbf{n}(s)$ 稱爲曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 s 處的 *法向量* (normal vector)。

(B) 單位向量 $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ 稱爲 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 在 s 處的 *次法向量* (binormal vector)。

給定弧長參數化曲線 $\boldsymbol{\alpha}(s)$, 依上述方法得到有序的向量 $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$, 它是一組 *單位長並且互相垂直的向量* (orthonormal vectors) , 稱爲 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 的 *活動標架* (Frenet trihedron; moving frame)。

這一組向量 $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ 任取兩個向量所張出來的平面都給予一個名稱如下:

定義 5 (第 19 頁). 給定 $s \in [0, L]$,

(A) 由單位切向量 $\mathbf{t}$ 與單位法向量 $\mathbf{n}$ 所張出的平面稱爲 *密切平面* (osculating plane)。

(B) 由單位法向量 $\mathbf{n}$ 與單位次法向量 $\mathbf{b}$ 所張出的平面稱爲 *法平面* (normal plane)。

(C) 由單位次法向量 $\mathbf{b}$ 與單位切向量 $\mathbf{t}$ 所張出的平面稱爲 *從切面* (rectifying plane)。

現在我們要把剛才對於單位切向量 $\mathbf{t}(s) = \boldsymbol{\alpha}'(s)$ 所做的事情再對單位次法向量 $\mathbf{b}(s)$ 重做一次。因爲 $\mathbf{b}(s)$ 是單位向量, 所以 $\mathbf{b}'(s)$ 是測量曲線在 s 附近脫離密切平面的變化率。由於

$$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s),$$

所以 $\mathbf{b}'(s)$ 垂直於 $\mathbf{t}(s)$, 因此 $\mathbf{b}'(s)$ 與 $\mathbf{n}(s)$ 平行。故有以下定義

定義 6 (第 18 頁). 記 $\tau(s)$ 爲曲線 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 在 s 處的 *扭率* (torsion), 定義方式爲 $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$。

註. 若你參閱其它教科書或文獻, 作者可能會用 $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$ 這個定義, 所以應注意前後文。

例題 7 (第 22 頁). 考慮螺旋線 (helix)

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\,\frac{s}{c}\right), s \in \mathbb{R},$$

其中 $c^2 = a^2 + b^2$。試將 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 的單位切向量、單位法向量、單位次法向量表示出, 並求出曲率 $\kappa(s)$ 與扭率 $\tau(s)$。

解.

4 曲線局部論基本定理

曲線的活動標架比起 $\mathbb{R}^3$ 中的直角坐標系來說更有助於理解曲線的性質。現在將之前所有的討論再重整一次。關於活動標架 $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$, 我們定義 $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ 與 $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$, 現在要推導 $\mathbf{n}'(s)$ 的公式: 因爲 $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$, 所以

$$\mathbf{n}'(s) =$$

因此, 我們可以把 $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ 對 s 的變化整理成以下矩陣的型式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}。 \tag{1}$$

若以物理的角度來看, 所謂的空間曲線, 可以想成是一條直線對它做兩種程度的變形: *彎曲* (bending — curvature) 與 *扭轉* (twisting — torsion)。在數學上, 以下定理將道出曲率與扭率的重要性, 這兩個量完全反應空間曲線的局部性質:

定理 8 (曲線局部論基本定理 Fundamental theorem of the local theory of curves, 第 **20** 頁)**.**

(A) *存在性* (Existence): 給定光滑函數 $\kappa(s) > 0$ 與 $\tau(s), s \in I$, 則存在正則的光滑參數曲線 $\boldsymbol{\alpha}(s) : I \to \mathbb{R}^3$ 使得 s 爲弧長參數, 並且 $\kappa(s)$ 與 $\tau(s)$ 分別爲曲線之曲率與扭率。

(B) *剛性* (Rigidity): 任何其它的正則光滑參數曲線 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$, 若與 $\boldsymbol{\alpha}$ 具有一樣的曲率與扭率函數, 則兩曲線之間只相差一個 *剛性運動* (rigid motion); 換言之, 存在一個 $\mathbb{R}^3$ 自身的 *正交線性映射* (orthogonal linear map) ρ, 並且此映射的 *行列式爲正* (positive determinant), 以及一個向量 $\mathbf{c}$ 使得 $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \rho \circ \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{c}$。

若對此 定理 **8** 之證明感興趣者, 可以參看 do Carmo 書本第 315–317 頁有存在性以及第 21–22 頁有剛性部分之完整證明。在此不詳細論述, 但是希望各位能抓到證明的主要思路:

(A) 首先, 從 (1) 式可先證明 $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ 處處互相垂直。再來, 將 (1) 式改用分量函數重新表達時, 則 (1) 式可視爲一階線性微分方程組 $I \times \mathbb{R}^9$ 的 *初始值問題* (initial value problem)。利用標準的常微分方程理論可得線性微分方程組初始值問題的存在唯一性。

(B) 對於剛性定理的論述, 給定 $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ 與 $\{\overline{\mathbf{t}}(s), \overline{\mathbf{n}}(s), \overline{\mathbf{b}}(s)\}$ 爲 $\boldsymbol{\alpha}$ 與 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ 各自的活動標架, 透過下面的式子

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\|\mathbf{t}(s) - \overline{\mathbf{t}}(s)\|^2 + \|\mathbf{n}(s) - \overline{\mathbf{n}}(s)\|^2 + \|\mathbf{b}(s) - \overline{\mathbf{b}}(s)\|^2\right) = 0,$$

搭配初始條件 $\mathbf{t}(s_0) = \overline{\mathbf{t}}(s_0), \mathbf{n}(s_0) = \overline{\mathbf{n}}(s_0)$ 與 $\mathbf{b}(s_0) = \overline{\mathbf{b}}(s_0)$ 可得 $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ 與 $\{\overline{\mathbf{t}}(s), \overline{\mathbf{n}}(s), \overline{\mathbf{b}}(s)\}$ 這兩組活動標架處處相同。