微分幾何 (一) 課程學習單 活動 2

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 認識正則曲線與弧長以及以弧長爲參數化的曲線。

2 預備知識

問題 **1.** 試與伙伴討論並歸結出以下結果:

(A) 何謂微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus, part I)?

(B) 若曲線以參數式 $(x(t), y(t))$ 表示時, 曲線弧長 (arc length) 如何用積分式表達?

(C) 一個可微分的函數 $f(x)$, 如何判定它是嚴遞增或嚴格遞減 (strictly increasing, decreasing)?

(D) 若 $y = f(x)$ 是一個嚴格遞增函數, 則 x 和 y 之間有什麼關聯? x 有可能表示成 y 的函數嗎?

(E) 函數的導函數 (derivative) 與其反函數 (inverse function) 的導函數之間的關聯爲何?

答.

3　正則曲線與弧長

回顧活動 1 的討論, 當我們想要用數學研究生活中所見形形色色的曲線, 一個可行的方式是對於空間曲線 (點集) 設法用映射 $\boldsymbol{\alpha}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ 去詮釋它。然而, 對於同一條曲線可能會有很多種方法表達 (活動 1 例題 **5**), 這將造成幾個必須解決的問題:

(A) 每個人可能會用不同的方法呈現同一條空間曲線, 那誰的表達式比較好? 誰的寫法比較不優? 也就是說, 這麼多種的參數表示法中, 有沒有一種 *最好的* 或是 *最自然* 的參數表示?

(B) 數學上會想要將每一個空間曲線賦予一些 *幾何量* (geometric quantities), 但是依照這種情景, 就必須小心地定義數學量與幾何量以符合 *良適定義* (well-defined) 的原則: 不同的參數表示法經過計算後必須得到同樣的結果。

這次的活動標目是要試圖回答上述問題。在此之前, 我們必須對光滑參數曲線再做一個細分。

定義 **2 (**第 **6** 頁**).**

(A) 給定光滑參數曲線 $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$, 若對所有 $t \in I$ 都有 $\boldsymbol{\alpha}'(t) \neq \mathbf{0}$, 則稱它爲 *正則的* (regular)。

(B) 對於非正則的光滑參數曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t)$, 我們稱那些 $\boldsymbol{\alpha}'(t) = \mathbf{0}$ 的 t 爲 *奇異點* (singular point)。

問題 **3.** 當我們考慮正則的光滑參數曲線時, $\boldsymbol{\alpha}'(t) \neq \mathbf{0}$ 這件事情可引發出很多的概念:

(A0) 因爲 $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ 處處都不是零向量, 所以對所有 $t \in I$, __________。

(A1) $\boldsymbol{\alpha}'(t) \neq \mathbf{0}$ 和 *分量函數* (component functions) $(x'(t), y'(t), z'(t))$ 之間的關係爲何?

(A2) $\boldsymbol{\alpha}'(t) \neq \mathbf{0}$ 和曲線的 *切線* (tangent lines) 有什麼關係?

*解***.**

定義 4 (第 6 頁). 給定一條正則的光滑參數曲線 $\boldsymbol{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$, 給定 $t_0 \in I$ 與 $t \in I$, 定義曲線的 *弧長* (arc length) 爲

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{\alpha}'(u)\| \,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2 + (z'(u))^2} \,\mathrm{d}u。$$

觀察弧長函數, 由微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus) 得到

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \underline{\hspace{3cm}},$$

所以 $s(t)$ 是一個 ______________, 也因此它是一個 ______________。故反函數 $t(s)$ 存在, 並且

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \underline{\hspace{2.5cm}},$$

所以我們可把原先的正則光滑參數曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t)), a \leq t \leq b$ *重新以弧長函數參數化* (reparameterized by arc length function); 也就是說, 定義

$$\boldsymbol{\alpha}(s) \overset{\text{定義}}{=\!=} \boldsymbol{\alpha}(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))), \quad c \leq s \leq d,$$

其中 $t(c) = a$, $t(d) = b$。以下將重新證明 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 仍爲<u>正則的參數曲線</u>:

由上述的造法得到的弧長參數 s 在空間曲線論中是重要的。給定一條正則的光滑空間曲線 $\boldsymbol{\alpha}$, 我們都可以用上述方法改成 *以弧長爲參數* (parameterize a curve by arc length) $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 表示。

問題 5. 試著將上述討論的內容改用圖形的方式表達。

答.

例題 **6 (**第 **22** 頁**).** 試將螺旋線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ 重新改用以弧長爲參數法表示, 其中起點爲 $(a, 0, 0)$ 沿著 t 增加的方向。試求螺旋線從 $(a, 0, 0)$ 到 $(a, 0, 2\pi b)$ 的弧長。

解**.**

問題 **7.** 以弧長爲參數的參數化表示法, 爲什麼它是 最好的 或是 最自然 的參數表示?

答**.**