微分幾何 (一) 課程學習單　　活動 1

學號: ______________　　姓名: ______________　　你的伙伴: ______________

1　單元介紹與學習目標

☐ 認識曲線 — 找尋生活中常見的空間曲線, 利用數學描述空間曲線。

☐ 了解數學上 (微分幾何領域) 感興趣的問題以及每個階段中將遇到的困難與解決的方法。

2　問題討論

問題 **1.** 與你的伙伴討論以下問題, 如果不知道答案, 除了憑經驗之猜測外, 也可以使用網路搜尋的方式尋找答案。將每一組得到的結果記錄下來。

(A) 爲什麼家用電話的話筒與話機之間要設計成捲捲的形狀? 這樣的設計可能的目的是什麼?

(B) 你是如何收納你的筆電延長線或是整理各式電線產生的雜亂感? 哪一種整理方式會是最好的?

(C) 兩個電線桿之間的電線形狀是什麼? 它有可能用數學語言 (比方說函數) 刻畫嗎?

(D) 猜想彩帶舞的彩帶形狀與手的律動之間的關係, 並加以實證。

(E) 觀察手上的兩個道具, 它們之間有什麼相同? 又有什麼不同?

答.

問題 **2.** 上述的這些問題中, 哪些是數學上感興趣的問題? ____________________

我們要如何利用數學研究各式各樣的曲線? 在微分幾何的課程中, 我們將以微積分和線性代數爲主要的數學工具來研究空間曲線。而在之後的課程中, 會進一步地研究空間中的曲面。

3 參數化曲線

當我們要討論 *空間曲線* (space curve) — 也就是前面所述在生活中看到的各式線條時, 對它的一個想法也許可以視它爲一些點所成的集合 $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$。但是如果我們只用集合的角度看待它的時候, 似乎無法描述曲線的一些性質, 比方說彎曲的概念, 這是因爲以集合的觀點看問題, 點與點之間好像很難給予一些比較或者是相對的關係。取而代之的一個想法, 我們想要把空間曲線賦予函數 (function)、映射 (mapping) 或者是方程式 (equation) 的意義, 比方說平面中的直線可以用 $3x + 2y = 5$ 這個方程式表示, 然後再從方程式的角度繼續看問題。現在我們要學習的是如何將空間曲線用 *參數曲線* (parameterized curves) 的方式表達。

例題 **3.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(A1) 寫出通過空間中兩點 $A(a_1, a_2, a_3)$ 與 $B(b_1, b_2, b_3)$ 的直線參數式。

(A2) 寫出圓柱 $x^2 + y^2 = 1$ 與平面 $y + z = 2$ 交集出的曲線之參數式。

解.

曲線參數式的起源與發展是從物理而來,因爲在物理上時常需要描述一個質點運行的軌跡,所以我們想要知道的是: 在 t 時刻, 這個質點的所在位置, 所以在空間中把 x 的位置、y 的位置與 z 的位置都用時間 t 的關係式 (函數) 寫出, 在直角坐標系上就會寫成 $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 的形式, 當 t 變動時, 質點的軌跡就會是一條曲線。經數學抽象化之後, t 不見得要和硬是要解釋成物理的「時間」, 它就只是一個 *參數* (parameter) 而已; 而我們稱影集合 (image) $\boldsymbol{\alpha}(I)$ 爲 *軌跡* (trace)。

例題 **4 (**第 **3** 頁**).** 試比較以下五組參數曲線。注意到若曲線記爲 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, 那麼可以計算 $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (x'(t), y'(t))$, 而表格中所謂的 *速度* (velocity) 則爲 $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$。

	曲線參數式	圈數	速度	起始點	方向
(B)	$\boldsymbol{\alpha}_1(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le 2\pi$				
(C1)	$\boldsymbol{\alpha}_2(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le 4\pi$				
(C2)	$\boldsymbol{\alpha}_3(t) = (\cos 2t, \sin 2t),\ 0 \le t \le \pi$				
(D1)	$\boldsymbol{\alpha}_4(t) = (\sin t, \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$				
(D2)	$\boldsymbol{\alpha}_5(t) = (\cos t, -\sin t),\ 0 \le t \le 2\pi$				

問題 **5.** 從上面的例題中, 你發現到什麼數學上的困難?(我們會在活動 2 試圖解決這個困難)

答.

例題 **6.** 考慮參數曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), t \in \mathbb{R}$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$。這個映射的軌跡稱為 螺旋線 (helix)。

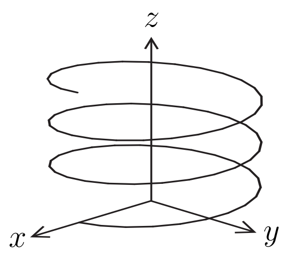

圖 1: 螺旋線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), t \in [0, 6\pi]$, 這個圖形對應的是 $a > 0, b > 0$。

請說明常數 a, b 的幾何意義 (在圖形上用什麼觀點可以快速理解 a, b 代表的意義)。

解.

例題 **7.** 上述的圖形, 有時我們會把它形容地得更清楚, 稱為 *右螺旋線* (right-handed helix), 也就是螺旋線旋轉的方式與右手定則一致。你們可以寫出 *左螺旋線* (left-handed helix) 的一個參數式嗎?

解.

4　記號的熟悉

關於參數化曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t): I \to \mathbb{R}^3$, 它的本質是一個 向量函數 (vector-valued function)。若我們把它搭配其它記號像是 $c \in \mathbb{R}$ 爲 實數 (real number), 還有 $f(t): I \to \mathbb{R}$ 是一個 實數函數 (real-valued function), 則下面命運列出常用的運算規則, 請在每個項目註記清楚等號的本質, 並附註這些運算規則的數學意義。

命題 **8.** 假設 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 與 $\boldsymbol{\beta}(t)$ 是 可微分的 (differentiable) 向量函數*;* 也就是說*,* 參數式的所有分量函數都是可微分函數*,* c 爲實數*,* $f(t)$ 是實數函數*,* 則

(A) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\alpha}(t)+\boldsymbol{\beta}(t)) = \boldsymbol{\alpha}'(t)+\boldsymbol{\beta}'(t)$　______________　______________

(B) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c\,\boldsymbol{\alpha}(t)) = c\,\boldsymbol{\alpha}'(t)$　______________　______________

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t)\boldsymbol{\alpha}(t)) = f'(t)\boldsymbol{\alpha}(t)+f(t)\boldsymbol{\alpha}'(t)$　______________　______________

(D) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\alpha}(t)\cdot\boldsymbol{\beta}(t)) = \boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\cdot\boldsymbol{\beta}'(t)$　______________　______________

(E) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\alpha}(t)\wedge\boldsymbol{\beta}(t)) = \boldsymbol{\alpha}'(t)\wedge\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\wedge\boldsymbol{\beta}'(t)$　______________　______________

(F) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\alpha}(f(t))) = \boldsymbol{\alpha}'(f(t))f'(t)$　______________　______________

以下例題將告知一個簡單並且在幾何上常用的概念, 但對初學者來說很容易忽略或忘記它的幾何意義。

例題 **9.** 若 $\|\boldsymbol{\alpha}(t)\| = c > 0$, 其中 c 爲常數 (與 t 無關), 則 $\boldsymbol{\alpha}(t)\cdot\boldsymbol{\alpha}(t) = c^2$, 並且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\alpha}(t)\cdot\boldsymbol{\alpha}(t)) = \underline{\hspace{6cm}},$$

得到 $\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot\boldsymbol{\alpha}(t) = 0$。將這個例題的所有訊息轉換成幾何意義。

答.

這個活動的最後想要介紹幾個簡單的 平面曲線 (plane curve), 它會引出一些幾何上感興趣而且必須澄清的問題。

例題 **10 (第 3 頁).** 考慮映射 $\boldsymbol{\alpha}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t^3, t^2), t \in \mathbb{R}$, 它是一個 光滑的平面參數曲線 (smooth parameterized plane curve)。這裡注意到兩件事, 這裡說 光滑 (smooth) 指的是參數式當中的每一個分量函數都是屬於無限次微分後仍連續的函數集 ($C^\infty(\mathbb{R})$); 另一個觀察的重點是 $\boldsymbol{\alpha}'(0) = (0, 0)$, 換言之, 若用物理的觀點來說, 質點的 速度向量 (velocity vector) 在 $t = 0$ 處是零向量。而這條曲線的軌跡似乎看起來不怎麼“光滑”(所以你必須小心用詞)。

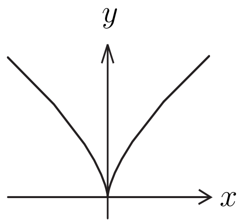

圖 2: 光滑的平面參數曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t^3, t^2), t \in (-1, 1)$。

例題 **11 (第 3 頁).** 考慮映射 $\boldsymbol{\alpha}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, 其中 $(t^3 - 4t, t^2 - 4), t \in \mathbb{R}$, 它是一條光滑的平面參數曲線。觀察這條曲線, 因爲 $\boldsymbol{\alpha}(2) = \boldsymbol{\alpha}(-2) = (0, 0)$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是一對一映射 (not one-to-one map)。

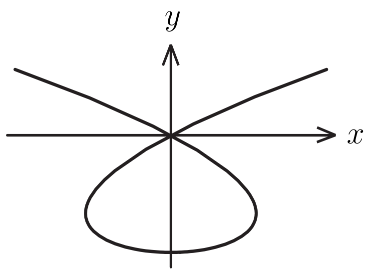

圖 3: 光滑的平面參數曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4), t \in (-2.5, 2.5)$ 會有自交的現象。

☐ 曲線能否“好好地”放到空間中 — 稱爲嵌入 (embedded) — 是幾何上是重要的課題。