110 年 6 月 15 日高等微積分探究(二)課程說明：

今日課程學習重點：

☐ 函數列與函數項級數在區間上均勻收斂的進階討論。

課程進行：

請由以下幾個管道擇一進入課程影片，搭配課程學習單學習。

(1) 下方 QR code 掃描進入影片。

(2) 下方 YouTube 網址。

(3) 雲端學院 1092-高等微積分(二)-22023 的「開始課程」－「高等微積分探究課程錄影」－「06/15(二)課程影片」。

(4) 雲端學院 1092-高等微積分探究(二)-22024 的「開始課程」－「06/15(二)課程影片」。

(5) 高等微積分課程網頁 http://www.math.ncue.edu.tw/~kwlee/109AdvCalculus.html 有課程說明。

06/15-01	網址	06/15-02	網址
	https://youtu.be/jstBTDltZT4		https://youtu.be/CoRS_I5Y30k
06/15-03	網址	06/15-04	網址
	https://youtu.be/lXJYqAl3txQ		https://youtu.be/2sNdPDq6vuM

學習單繳交注意事項：

■ 當日活動學習單或是筆記請於時限之內將學習單照相或掃描之後至
雲端學院 1092-高等微積分探究(二)-22024 的「作業/報告」－「活動 15(06/15)」
上傳。

■ 上傳時間：於 6 月 15 日（二）23:59 之前上傳，超過時間系統自動關閉，無法再進行上傳。

■ 電子檔案務必確認字跡清楚而且整份學習單清晰可見，批閱時若無法辨識你的作答，將視為你作答不確實而予以扣分。

● 這次的學習單除了白板上的筆記外，有幾個問題必須補充作答(白板上的資訊並不完整，在影片中只是口頭說明)。

高等微積分探究(二)　　110 年 6 月 15 日

系所與班級: _____　　學號: _____　　姓名: _____

1　課程目標

☐ 函數列與函數項級數在區間上是否均勻收斂的討論。

2　函數列在區間 I 上逐點收斂與均勻收斂的差異

考慮函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 給定 $x \in I$, 記 $f(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, 稱函數列在區間 I 上逐點收斂到 $f(x)$。

- $f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂到 $f(x)$ 等價於: _____。

例 1. 論述 (A) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x}, I = [0,\infty)$ 與 (B) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, I = [0,\infty)$ 是否均勻收斂?

解.

(A1) 先求出 $f(x)$:

- 對函數列進行預判: 將 _____ 代入, 得到 _____, 所以預判 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,\infty)$ 上 _____。

(A2) 用微積分的方法得到 $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ 的上界, 再證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0$。

(A2) 用不等式估計 $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ 的上界, 再用夾擠定理證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0$。

(B1) 先求出 $f(x)$:

- 對函數列進行預判: 將 _____ 代入, 得到 _____, 所以預判 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,\infty)$ 上 _____。

(B2) 用微積分的方法得到 $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ 有一個正的下界, 就能證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \neq 0$。

註. 上面的例題是想要說明: 不必太執著於把 $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$ 真正的值算出來; 因爲我們的「目的」是要證 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$ 是不是等於零, 所以只要做到有效的估計 (estimate) 即可。

3 函數項級數在區間 I 上是否均勻收斂的討論

例 **2.** 論述 (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^3x}, I=[0,\infty)$ 與 (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^2x}, I=[0,\infty)$ 是否均勻收斂?

解.

(A1) 預判: 將 _____ 代入, 得到 _____, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\approx$ _____, 因此預判 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^3x}$ 在 $I=[0,\infty)$ 上 _____。

(A2) 給出數學論述:

(B1) 預判: 將 _____ 代入, 得到 _____, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\approx$ _____, 因此預判 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^2x}$ 在 $I=[0,\infty)$ 上 _____。

(B2) 可以用魏爾斯特拉斯 M-判別法 (Weierstrass M-test) 驗證函數項級數是均勻收斂嗎? _____。

(B3) 給出數學論述:

(B4) 上面論述, 選 $n=N, m=2N$ 的想法或原則是: _____。

註. 證明函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上是均勻收斂的方法: 均勻柯西收斂準則 (Uniform Cauchy Convergence Criterion)、魏爾斯特拉斯 M-判別法 (Weierstrass M-test)、阿貝爾判別法 (Abel's Test)、狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test)。證明函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上不是均勻收斂的方法: 均勻柯西收斂準則 (Uniform Cauchy Convergence Criterion)。均勻收斂的必要條件之否逆命題(作業 15 問題 2)。