110 年 6 月 8 日高等微積分探究(二)課程說明：

今日課程學習重點：

☐ 函數列逐點收斂與均勻收斂的差異。
☐ 快速預判函數列是否均勻收斂的方法。

課程進行：

請由以下幾個管道擇一進入課程影片，搭配課程學習單學習。
(1) 下方 QR code 掃描進入影片。
(2) 下方 YouTube 網址。
(3) 雲端學院 1092-高等微積分(二)-22023 的「開始課程」－「高等微積分探究課程錄影」－「06/08(二)課程影片」。
(4) 雲端學院 1092-高等微積分探究(二)-22024 的「開始課程」－「06/08(二)課程影片」。
(5) 高等微積分課程網頁 http://www.math.ncue.edu.tw/~kwlee/109AdvCalculus.html 有課程說明。

06/08-01	網址	06/08-02	網址
	https://youtu.be/gA0OWC1dj1Q		https://youtu.be/k4-_GxPnuHA

學習單繳交注意事項：

■ 當日活動學習單或是筆記請於時限之內將學習單照相或掃描之後至
雲端學院 1092-高等微積分探究(二)-22024 的「作業/報告」－「活動 14(06/08)」
上傳。
■ 上傳時間：於 6 月 8 日（二）23:59 之前上傳，超過時間系統自動關閉，無法再進行上傳。
■ 電子檔案務必確認字跡清楚而且整份學習單清晰可見，批閱時若無法辨識你的作答，將視為你作答不確實而予以扣分。

高等微積分探究(二)　　110 年 6 月 8 日

系所與班級: _____　　學號: _____　　姓名: _____

1　課程目標

☐ 函數列逐點收斂與均勻收斂的差異。

☐ 快速預判函數列是否均勻收斂的方法。

2　函數列在區間 I 上逐點收斂與均勻收斂的差異

給定函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 我們會探討兩種函數列的收斂性, 一種是逐點收斂, 一種是均勻收斂。

問. 爲什麼要研究函數列在區間 I 上要有均勻收斂的性質?

解.

在了解均勻收斂的重要性之後, 給了一個函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 那麼要如何得知函數列在區間 I 上是否均勻收斂呢? 我們除了可以用精確定義的方式驗證, 課程中提供了一些判別法, 或者是等價敘述了解它。

首先複習並區分清楚函數列逐點收斂與均勻收斂的差異。給定 $x \in I$, 記 $f(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, 那麼

(A) $f_n(x)$ 在區間 I 上逐點收斂到 $f(x)$: _____

(B1) $f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂到 $f(x)$: _____

(B2) $f_n(x)$ 在區間 I 上不是均勻收斂到 $f(x)$: _____

(C) $f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂到 $f(x)$ 的充分必要條件是: _____

(C1) 因爲 $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ 只與 n 有關, 不妨將這個量記成數列 d_n, 這時 $d_n \geq 0$。而均勻收斂的充要條件就寫成 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$, 然後追問 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ 或是 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n \neq 0$ (或不存在)。

(C2) 有同學會被驗證 sup 這件事困住(因爲函數可能很複雜), 上課介紹的例題一來比較簡單, 二來是想複習上確界, 所以課堂示範的時候確實地將上確界的值算出來。若以目的論來說, 我們只是在問函數列是否均勻收斂, 也就是問數列 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$ 的極限是否爲零, 所以可以<u>不需要</u>把 sup 真正的值算出來。比方說我們可以用<u>估計</u>的方式得到對於 d_n 的一個上界 M_n, 然後計算 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$, 所以夾擠定理告知 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$; 或者是想辦法找到一個<u>正的下界</u> $d_n > m > 0$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$, 這樣就可以得知 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n \neq 0$。

(D) $f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂等價於: _____

問. 課堂中用六人七腳跑步的方式比喻均勻收斂。在影片中, 又用了什麼故事(運動) 體會均勻收斂的感覺?

解.

3 如何快速預判函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上是否均勻收斂?

以下示範如何從等級的原理預判函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上是否均勻收斂到 $f(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$。想法如下: 因爲 $f(x)$ 是逐點收斂之下的目標函數(終點線), 若「固定」x, 當 $n \to \infty$ 時函數列 $f_n(x)$ 會與 $f(x)$ 很近。想像 n 是時間, 而 x 是人, 現在要設法在每個時刻找到一個人, 這個人要抵銷當初因爲 n 很大而收斂到 $f(x)$ 的因子, 然後再重新整理後看看這個量會不會與終點線 $f(x)$ 之間的差趨近於 0。

預判時, 所要找 x 的這個人要挑對等級 (order), 它不見得是函數列與目標函數之間差距最大的人。

例 **1.** 寫出逐點收斂的函數, 然後快速預判函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上是否均勻收斂到 $f(x)$。

(A) 在 $I = \mathbb{R}$, 考慮 $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, 則 $f(x) =$ _____。

(B) 在 $I = (0, \infty)$, 考慮 $f_n(x) = \tan^{-1}(nx)$, 則 $f(x) =$ _____。

- 若取 $x = \frac{1}{n^2}$, 那麼 $f_n(\frac{1}{n^2}) =$ _____, 所以預判 _____。

(C) 在 $I = (0, 1)$, 考慮 $f_n(x) = x^n$, 則 $f(x) =$ _____。

- 若取 $x = 1 - \frac{1}{n^2}$, 那麼 $f_n(1 - \frac{1}{n^2}) =$ _____, 所以預判 _____。

(D) 在 $I = (0, 1-\delta], \delta > 0$, 考慮 $f_n(x) = x^n$, 則 $f(x) =$ _____。