110 年 5 月 18 日高等微積分探究(二)課程說明：

今日課程學習重點：

☐ 從習題中繼續探索級數理論, 從舉例或舉反例以深化無窮級數的認識。

課程進行：

請由以下幾個管道擇一進入課程影片，搭配課程學習單學習。

(1) 下方 QR code 掃描進入影片。

(2) 下方 YouTube 網址。

(3) 雲端學院 1092-高等微積分(二)-22023 的「開始課程」－「高等微積分探究課程錄影」－「05/18(二)課程影片」。

(4) 雲端學院 1092-高等微積分(二)-22024 的「開始課程」－「05/18(二)課程影片」。

(5) 高等微積分課程網頁 http://www.math.ncue.edu.tw/~kwlee/109AdvCalculus.html 有課程說明。

05/18-01	網址	05/18-02	網址
	https://youtu.be/g72KWLuYsdU		https://youtu.be/iZLad8Ur33s
05/18-03	網址		
	https://youtu.be/8fKu5wG94gU		

註：05/18-03 影片的倒數第 3 行有錯字，bounde 應為 bounded。

學習單繳交注意事項：

■ 當日活動學習單或是筆記請於時限之內將學習單照相或掃描之後至
雲端學院 1092-高等微積分探究(二)-22024 的「作業/報告」－「活動 11(05/18)」
上傳。

■ 上傳時間：於 5 月 18 日（二）23:59 之前上傳，超過時間系統自動關閉，無法再進行上傳。

■ 電子檔案務必確認字跡清楚而且整份學習單清晰可見，批閱時若無法辨識你的作答，將視為你作答不確實而予以扣分。

高等微積分探究 (二)　　**110 年 5 月 18 日**

系所與班級: _____　　學號: _____　　姓名: _____

1　課程目標

☐ 從習題中繼續探索級數理論, 從舉例或舉反例以深化無窮級數的認識。

2　將作業發揮到極致

例 **1.** 若 $a_n > 0, n \in \mathbb{N}$, 而 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$。<u>請註記甲乙丙丁</u>。

解. 根據 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂的柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion):

$$\text{對任意 } \varepsilon > 0, \text{ 存在 } N \in \mathbb{N} \text{ 使得對所有 } m > n \geq N \text{ 都有 } \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \overset{\text{正項}}{=\!=} \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \tfrac{\varepsilon}{2}。$$

因爲此不等式是對於所有的 $m > n \geq N$ 都成立, 所以對所有 $n \geq N$, 特別取 $m = 2n$, 則有

$$n \cdot a_{2n} = a_{2n} + a_{2n} + \cdots + a_{2n} < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2n \cdot a_{2n} < \varepsilon,$$

另一方面, 若取 $m = 2n+1$, 則有

$$\begin{aligned} &(n+1)a_{2n+1} = a_{2n+1} + a_{2n+1} + \cdots + a_{2n+1} < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1} < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow\ &(2n+1)a_{2n+1} < 2(n+1)a_{2n+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

綜上討論得知: 給定 $\varepsilon > 0$, 取 $N' = 2N \in \mathbb{N}$, 則對所有 $n \geq N'$ 都有 $|na_n| < \varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$。

上一次的探究課已介紹過上面的證明, 想法是從 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的柯西收斂準則出發, 從指定的項數 n 之下, 再往後取出 n 項或 $n+1$ 項, 利用正項與遞減的條件估計。

現在要繼續針對這個敘述思考一些延伸問題。希望各位在今日的課程結束後, 可以把這個想法用到其它習題上, 如此有助分析能力的提升。

討論 **2.** 上面這個習題告訴我們什麼事情? (將一個習題發揮最大的效益)

(A) 級數收斂的必要條件: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 它是收斂級數一般項初步的認識。

而這個習題可以看成是 _____。

(B) 從等級的原理看最後的結論, 對於遞減且收斂的正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 0$ 說明了

_____。

問: 有同學試圖證: 由甲、乙、丙這三個條件推得 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ 收斂, 再由級數收斂的必要條件得到 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 這樣的想法可行嗎?

(C) 否逆命題可證級數發散:「甲、乙、非丁 $\Rightarrow$ 非丙」。由此得到一個<u>新型態的發散判別法</u>。

_____。

例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 在 _____ 對應於 $\lim_{n\to\infty} na_n$ 不存在; 在 _____ 對應於 $\lim_{n\to\infty} na_n = 1 \neq 0$。$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$。

(D) 若 $a_n > 0, n \in \mathbb{N}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 且 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 那麼級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收斂的嗎?

答: ____。例如: _____。

(E) 若 $a_n > 0, n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 那麼可以直接推得 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ 嗎?

是否由甲、丙可以直接推出丁。若能找到反例, 則可說明原命題的乙條件不可少。