高等微積分(二) 課程學習單 第 10 章

系所與班級: _____ 學號: _____ 姓名: _____

10 單元介紹與學習目標

■ 對照影片 10.1 – 01 學習

課程單元介紹

10.1 隱函數定理 (Implicit Function Theorem):

10.2 反函數定理 (Inverse Function Theorem):

10.3 函數獨立與函數相關:

10.1 隱函數定理

■ 對照影片 10.1 – 02 學習

討論.

(A) 方程式 (equation) 與函數 (function) 的差別。

(B) 隱函數定理想要問的是: 給定方程式之後, 哪些變數可以被其它的變數決定?

(C) 從方程式 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 認識隱函數定理想要討論的問題。

■ 對照影片 10.1 – 03 學習

(D) 所謂在平面中一點 $P(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 的 鄰域 (neighborhood of P), 記爲 $U(P, \delta)$, 指的是集合

$$\begin{aligned} U(P,\delta) &= (x_0-\delta, x_0+\delta) \times (y_0-\delta, y_0+\delta) \\ &= \{(x,y) | x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), y \in (y_0-\delta, y_0+\delta)\}, \end{aligned}$$

其中 $\delta > 0$; 也就是說, $U(P, \delta)$ 是一個以 $P(x_0, y_0)$ 爲中心, 邊長爲 2δ 的一個方形區域。

(E) 記 $P_1 = (-1, 0)$, 則 _____。

記 $P_2 = (0, 1)$, 則 _____。

若 $P \in C, P \neq P_1, P \neq P_2$, 則 _____。

■ 對照影片 10.1 – 04 學習

定義 1. 假設 $F(x, y)$ 是一個定義在 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的函數, 如果存在一個區域 $R = I_1 \times I_2 \subset D$, 其中 I_1 與 I_2 都是 $\mathbb{R}$ 上的開區間, 使得對所有 $x \in I_1$, 存在唯一 $y \in I_2$ 滿足 $F(x, y) = 0$, 此時稱方程式 $F(x, y) = 0$ 唯一確定了一個 隱函數 (implicit function) $y = f(x)$, 其中 $f : I_1 \to I_2$。此時, 對所有 $x \in I_1$ 都有 $F(x, f(x)) = 0$。

定理 2 (隱函數定理, Implicit Function Theorem). 考慮方程式 $F(x, y) = 0$, 假設

(A) 在矩形區域 $R = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$ 上 $F_x(x, y)$ 與 $F_y(x, y)$ 都是連續函數。

(B) $F(x_0, y_0) = 0$。

(C) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$。

則有以下結論:

(1) 在 (x_0, y_0) 的附近, 方程式 $F(x, y) = 0$ 可以唯一確定一個函數 $y = f(x)$, 而且 $y_0 = f(x_0)$。更明確地說, 存在 $\delta, \delta' > 0$ 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta', y_0 + \delta') \subset R$, 而且對於每個 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 方程式 $F(x, y) = 0$ 在 $(y_0 - \delta', y_0 + \delta')$ 中存在唯一的解 y。由這樣建立的函數關係記成 $y = f(x)$, 其中 $y_0 = f(x_0)$。此時, 對所有 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 都有 $F(x, f(x)) = 0$。

(2) 函數 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上是連續函數。

(3) 函數 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上導函數 $y' = f'(x)$ 連續, 並且 $f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$。

證明:

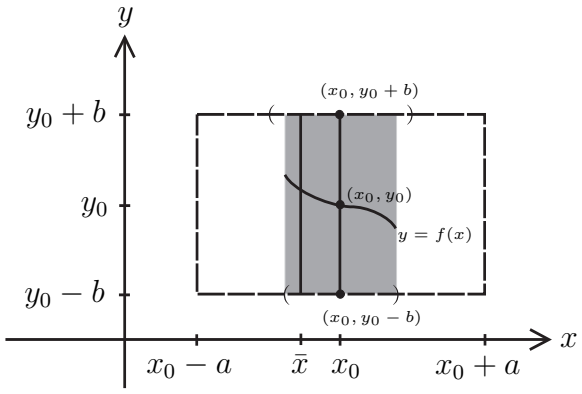

圖 1: 方程式 $F(x, y)$ 關於隱函數 $y = f(x)$ 的存在性。

■ 對照影片 10.1 – 05 學習

(1)

■ 對照影片 10.1 – 06 學習

(2)

■ 對照影片 10.1 – 07 學習

(3)

□

■ 對照影片 10.1 – 08 學習

這裡註記幾件與隱函數定理相關的事情:

(A) 若 $F(x,y) \in C^k(R)$, 則 $y = f(x) \in C^k(I)$, 其中 $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$。

(B) 若是問方程式 $F(x,y) = 0$ 什麼時候 x 可以表示成 y 的函數? 這時, 在變數的角色對調之下, 只要將定理的條件 (3) 改成 _____ 而其它條件依舊成立的情況下, 則局部來說就會有 $x = g(y)$ 滿足 $x_0 = g(y_0)$ 以及 $F(g(y), y) = 0$。

隱函數定理是說: 對於一個方程式 $F(x,y) = 0$, 若你想要問哪個變數是被決定的, 那麼就去計算函數 $F(x,y)$ 對於你覺得它會是被決定的變數進行偏導數, 然後代入要研究的點看看是否偏導數爲零, 如果偏導數不是零的話, 那麼這個變數在局部上就可以被其它變數決定。

(C) 若 $F_y(x_0, y_0) = 0$, 則 _____。前面 $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 的例子, 在 $P_1 = (-1, 0)$ 與 $P_2 = (1, 0)$ 處滿足 $F_y(P_1) = 0, F_y(P_2) = 0$, 而 $F(x,y) = 0$ 在 P_1 與 P_2 無法決定一個隱函數。另一方面, 考慮

(D) 從自由度 (degree of freedom) 的觀點, 在「理想」的情況下, 每次設立一個方程式, 該系統就會減少一個自由度。所以在 $F(x,y)$ 來說, x 與 y 爲獨立的兩個變數, 但是考慮 $F(x,y) = 0$ 時, 則變數之間彼此受到牽制, 自由度降一個的情況下, 其中一個變數可被另一個變數決定。

■ 對照影片 10.1 – 09 學習

前面是介紹二變數方程式的隱函數定理, 而這個概念可以推廣至 $n+1$ 個變數的方程式的問題。給定一個 $n+1$ 個變數的方程式, 若你想要問某個變數是否可以用其它的變數的函數表示, 那麼就把那個變數設定成 y, 然後其它的變數依序標記爲 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 這樣就形成了下方所設定的方程式。至於下面定理的證明, 其實過程就和二變數的情況一樣, 只是把變數中的區間改寫成立體的區域而已。這裡證明省略。

定理 3 (隱函數定理, Implicit Function Theorem). 考慮方程式 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, 假設

(A) 在區域 $R = \prod_{i=1}^{n}(x_i^0 - a_i, x_i^0 + a_i) \times (y^0 - b, y^0 + b)$ 上函數 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ 具有對所有變數的偏導函數皆連續。

(B) $F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0) = 0$。

(C) $F_y(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0) \neq 0$。

則有以下結論:

(1) 在點 $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0)$ 的附近, 由方程式 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ 可以唯一確定一個函數, 記爲 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 並且 $y^0 = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$。更明確地說, 存在一個鄰域

$$U \times I = \prod_{i=1}^{n}(x_i^0 - \delta_i, x_i^0 + \delta_i) \times (y^0 - \delta', y^0 + \delta') \subset R$$

使得對於每個 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, 方程式 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ 在 I 中存在唯一的解 y, 由此建立的函數記成 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 其中 $y^0 = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$。此時, 對所有 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, 都有 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0$。

(2) 函數 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在區域 U 上是連續函數。

(3) 函數 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在區域 U 上的偏導函數 $y_{x_i} = f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 皆連續, 而且

$$f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{F_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)}{F_y(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)}, \quad \text{其中} \quad i = 1, 2, \ldots, n。$$

■ 對照影片 10.1 – 10 學習

以下我們要討論方程組的隱函數存在定理。考慮方程組

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0, \end{cases}$$

現在要問的是: 對於這個方程組, 我們是否可以將其中兩個變量(比方說 u 和 v) 寫成另外兩個變量(比方說 x 和 y) 的函數呢? 如果可以的話, 這個向量值函數 $(u(x, y), v(x, y))$ 又有什麼性質呢?

爲回答此問題, 這裡先引進雅可比行列式的概念。現有兩個四變數函數 F 與 G, 在變數 x, y, u, v 當中挑出兩個變數, 比方說 u, v, 定義 F, G 對於 u, v 的 雅可比行列式 (Jacobi determinant)

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}。$$

■ 對照影片 10.1 – 11 學習

定理 4. 考慮方程組 $F(x,y,u,v)=0$ 與 $G(x,y,u,v)=0$, 假設

(A) 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的一個鄰域

$$R=(x_0-a,x_0+a)\times(y_0-b,y_0+b)\times(u_0-c,u_0+c)\times(v_0-d,v_0+d)$$

當中, 函數 $F(x,y,u,v)$ 與 $G(x,y,u,v)$ 對於各種變數之偏導函數皆連續。

(B) 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 滿足方程組 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$ 與 $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$。

(C) 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 關於 F,G 對於 u,v 的雅可比行列式

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P(x_0,y_0,u_0,v_0)}=\left.\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\right|_{P(x_0,y_0,u_0,v_0)}\neq 0。$$

則有以下結論:

(1) 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的附近, 方程組 $F(x,y,u,v)=0$ 與 $G(x,y,u,v)=0$ 可以唯一確定一個向量值函數 $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$ 且滿足 $(u_0,v_0)=(f(x_0,y_0),g(x_0,y_0))$。更明確地說, 存在一個鄰域 $U\times V=(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)\times(y_0-\delta_2,y_0+\delta_2)\times(u_0-\delta_1',u_0+\delta_1')\times(v_0-\delta_2',v_0+\delta_2')\subset R$ 使得對每個 $(x,y)\in U$, 方程組 $F(x,y,u,v)=0$ 與 $G(x,y,u,v)=0$ 在 U 中存在唯一解 (u,v)。由此建立的向量值函數記爲 $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$, 其中 $(u_0,v_0)=(f(x_0,y_0),g(x_0,y_0))$。此時, 對所有 $(x,y)\in U$, 都有

$$\begin{cases} F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0 \\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0。\end{cases}$$

(2) 向量值函數 $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$ 在區域 U 上是連續函數。

(3) 向量值函數 $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$ 在區域 U 上的各種偏導函數皆連續, 而且

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix}。$$

■ 對照影片 10.1 – 12,13 學習

證明:

(1) 因爲在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 處 $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_P\neq 0$, 所以 $F_u(P)$ 與 $F_v(P)$ 至少有一個非零。不妨假設 $F_u(P)\neq 0$, 另一個情況同理。此時, 對於方程式 $F(x,y,u,v)=0$, 由隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 得知: 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的一個鄰域 $W\times I$ 中會有 $u=\varphi(x,y,v)$, 其中 $\varphi:W\to I$ 使得

$$F(x,y,\varphi(x,y,v),v)=0,\quad u_0=\varphi(x_0,y_0,v_0),\quad \varphi_v=-\frac{F_v}{F_u},$$

現將 $u=\varphi(x,y,v)$ 代入 $G(x,y,u,v)=0$ 之後得到 $H(x,y,v)\overset{\text{記}}{=}G(x,y,\varphi(x,y,v),v)=0$。觀察函數 $H(x,y,v)$, 在 (x_0,y_0,v_0) 的地方, 有

$$H_v$$

而且 $H(x_0,y_0,v_0)=0$ 所以由隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 得知: 存在 (x_0,y_0,v_0) 的一個鄰域 $U\times I'$ 使得 $v=g(x,y)$, 其中 $g:U\to I'$ 使得 $H(x,y,g(x,y))=0$。

記 $f(x,y)=\varphi(x,y,g(x,y))$, 其中 $f:U\to I$, 則在 (x_0,y_0) 的鄰域 U, 有

$$\begin{cases} F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0 \\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0。\end{cases}$$

(2) 因爲 $u=\varphi(x,y,v)$ 在 (x_0,y_0,v_0) 的鄰域 W, $v=g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的鄰域 U 都連續, 所以合成函數 $f(x,y)=\varphi(x,y,g(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 的鄰域 U 也連續。於是 $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 的一個鄰域 U 上連續。

(3) 最後, 欲得到隱函數的各種偏導函數, 利用鏈鎖律 (Chain Rule), 將

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases}$$

兩邊對 x 求偏導數, 得到

$$\begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

兩邊對 y 求偏導數, 得到

$$\begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

將兩個矩陣再做合併, 則得

□

■ 對照影片 10.1 – 14 學習

例 **5.** 考慮方程組

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x^2 + y - u^2 - v^2 = 0 \\ G(x,y,u,v) = xy - 1 + u - v = 0。 \end{cases}$$

(A) 在 $P(2,1,1,2)$ 的一個鄰域內是否存在隱函數 $u = u(x,y)$ 與 $v = v(x,y)$?

(B) 在 $P(2,1,1,2)$ 的一個鄰域內是否存在隱函數 $x = x(y,u)$ 與 $v = v(y,u)$?

解.

■ 對照影片 10.1 – 15 學習

這一節最後, 我們給出更多變數的方程組隱函數存在定理。

定理 6. 假設有一個以 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ 爲變數的方程組

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \\ \qquad\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \end{cases}$$

其中函數 $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m), k = 1, 2, \ldots, m$ 滿足

(A) 在 $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ 點的一個鄰域

$$R = \prod_{i=1}^{n}(x_i^0 - a_i, x_i^0 + a_i) \times \prod_{j=1}^{m}(y_j^0 - b_j, y_j^0 + b_j)$$

當中對於每個變數的偏導函數皆連續。

(B) $F_k(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0) = 0, k = 1, 2, \ldots, m$。

(C) 在 $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ 點的雅可比行列式

$$\left.\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}\right|_P \neq 0,$$

則有以下結論:

(1) 存在一個 P 的鄰域 $U \times V = \prod_{i=1}^{n}(x_i^0 - \delta_i, x_i^0 + \delta_i) \times \prod_{j=1}^{m}(y_j^0 - \delta_j', y_j^0 + \delta_j') \subset R$ 使得對任何 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, 方程組

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

存在唯一解 $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$。由此方程組建立的向量值函數記爲 $y_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 其中 $y_j^0 = f_j(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), j = 1, 2, \ldots, m$。此時, 對所有 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$ 與 $k = 1, 2, \ldots, m$, 都有

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0。$$

(2) 每個 $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), j = 1, 2, \ldots, m$ 在區域 U 上都是連續函數。

(3) 每個 $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), j = 1, 2, \ldots, m$ 在區域 U 上都有連續的偏導函數, 並且這些偏導函數可以從方程組

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

解出;即

$$\left[\ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\ \right]_{m\times n} = -\left[\ \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\ \right]_{m\times m}^{-1}\left[\ \frac{\partial F_k}{\partial x_i}\ \right]_{m\times n}。$$

10.2 反函數定理

■ 對照影片 10.2 – 01 學習

首先我們回顧單變數函數的反函數理論。在單元 5.2, 我們曾經證明了以下定理:

定理 1 (反函數的求導法則). 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處導數存在, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 並且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的一個鄰域內連續且嚴格單調(嚴格遞增或嚴格遞減), 則反函數 $x = \varphi(y)$ 在 $y = y_0 = f(x_0)$ 是可微分的, 並且 $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$。

以下我們用隱函數定理重證一次, 只是這時需要假設 $f(x) \in C^1(I)$, 其中 I 是包含 x_0 的開區間。

證明:

□

■ 對照影片 10.2 – 02 學習

現在我們要研究多變數的情況。給定一個 映射 (map) $T : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 其中 $(u, v) \in R$ 與 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 滿足

$$T : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

現在要問的是: 關於映射 T 是否存在 逆映射 (inverse map) 呢? 也就是說, 是否存在一個以 x, y 爲自變數而 u, v 爲應變數的映射

$$S : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

使得 $S \circ T = \mathrm{Id}$, 即

$$S \circ T(u, v) = S(x(u, v), y(u, v)) = (u(x(u, v), y(u, v)), v(x(u, v), y(u, v))) = (u, v)?$$

若 S 是 T 的逆映射, 我們會用符號 T^{-1} 重新表示 T 的逆映射。

■ 對照影片 10.2 – 03 學習

定理 2 (反函數定理 Inverse Function Theorem). 考慮映射 $T : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 其中 $(u, v) \in R$ 與 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 滿足

$$T : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

假設映射 T 在區域 R 上具有連續的偏導函數, 即 $x(u, v), y(u, v) \in C^1(R)$。而 $P = (u_0, v_0) \in R$ 與 $P' = (x_0, y_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$。如果在 P 點的雅可比行列式

$$\left.\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_P \neq 0,$$

則存在 P 的一個鄰域 $U(P, \delta)$ 與 P' 的一個鄰域 $U'(P', \delta')$ 使得映射 $T : U \to U'$ 可逆。若記 T 的逆映射爲 $S : U' \to U$, 其中

$$S : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

則逆映射 S 對於變數 x 與 y 具有連續的偏導函數, 並且 T 的微分映射 (differential map) 與 S 的微分映射若寫成矩陣的形式時彼此互爲反矩陣, 即

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

證明: 考慮方程組

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = \\ G(x, y, u, v) = \end{cases} \tag{1}$$

因爲在 (x_0, y_0, u_0, v_0) 滿足

$$\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} = \left.\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{(u_0, v_0)} \neq 0,$$

由隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 得知: 在 (x_0, y_0, u_0, v_0) 的一個鄰域 $U' \times U$ 中存在映射 $S : U' \to U$ 滿足

$$S : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

以及 $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$。現在要驗證: S 是 T 的逆映射: 因爲映射 S 必須滿足原方程組 (1), 由此得到對所有 $(x, y) \in U'$

$$\begin{cases} x - x(u(x, y), v(x, y)) = 0 \\ y - y(u(x, y), v(x, y)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(u(x, y), v(x, y)) = x \\ y(u(x, y), v(x, y)) = y, \end{cases} \tag{2}$$

所以 S 是 T 的逆映射。

■ 對照影片 10.2 – 04 學習

此外, 隱函數定理也告知 $u(x,y)$ 與 $v(x,y)$ 在 U' 上具有連續的偏導函數。現將 (2) 式對於變數 x 與 y 計算偏導函數, 得到

將這些式子寫成矩陣的形式, 則得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

□

■ 對照影片 10.2 – 05 學習

反函數定理經常被拿來應用的情況是回答一個變數變換是否會是一種坐標變換。這裡以平面中的直角坐標與極坐標的關係來討論之。

例 **3.** 討論直角坐標系 (Cartesian coordinates system) (x,y) 與極坐標系 (polar coordinates system) (r,θ) 的關係。

■ 對照影片 10.2 – 06 學習

例 **4.** 驗證映射 $T:\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$ 在第一象限的部分是一種坐標變換。

解.