高等微積分(二) 課程學習單 第 9 章

系所與班級: _____ 學號: _____ 姓名: _____

9 單元介紹與學習目標

■ 對照影片 9.1 – 01 學習

☐ 課程地圖:

☐ 課程目標:

(1) 將數列與級數理論應用到函數列與函數項級數。

(2) 確實理解函數列與函數項級數逐點收斂或均勻收斂 (uniformly convergent) 的性質與差異。

(3) 深入了解冪級數理論 (power series theory) 與泰勒級數理論 (Taylor series theory)。

9.1 均勻收斂

■ 對照影片 9.1 – 02 學習

這一章的研究對象是函數列還有它的加總(稱爲函數項級數)。對於 $n \in \mathbb{N}$, 記 $f_n : I_n \to \mathbb{R}$ 是一個函數, 其中 I_n 是 f_n 的定義域。現考慮 $I = \cap_{n=1}^{\infty} I_n$, 並且假設 I 也是一個區間, 這時, 稱 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 爲一個*函數列* (sequences of functions)。

給定 $x_0 \in I$, 則 $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個無窮數列, 於是我們可以問這個數列的收斂性。若區間中的每一點的函數值數列都收斂, 則有以下逐點收斂的定義:

定義 1. 給定函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 若對所有 $x \in I$, 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在, 將極限值記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\text{記}}{=} f(x)$, 稱函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上 *逐點收斂* (pointwise convergent) 到函數 $f(x)$。

若將逐點收斂這個概念用 ε-N 語言 (ε-N language) 描述, 則爲:

數學上感興趣的問題是: 對於 $n \in \mathbb{N}$, 若函數 $f_n(x)$ 具有一些好的性質, 比方說連續、可積分、可微分等性質, 那麼這些函數在逐點收斂的意義下得到的極限函數 $f(x)$ 是否也能繼承這些性質呢?

■ 對照影片 9.1 – 03 學習

例 **2.** 在區間 $I=[0,1]$ 上考慮 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}=\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, 計算

$$f(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) =$$

於是函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=[0,1]$ 上逐點收斂至 $f(x)$。

- 對所有 $n\in\mathbb{N}$,
- 對於 $f(x)$,
- 結論:

可以試著將函數列與逐點收斂後的函數圖形畫出來進行觀察:

■ 對照影片 9.1 – 04 學習

例 **3.** 在區間 $I=(0,1)$ 上考慮 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中

$$f_n(x)=\begin{cases} 1 & \text{若 } x=\frac{p}{q},\ \text{其中 } (p,q)=1 \text{ 且 } q\le n \\ 0 & \text{若 } x \text{ 是無理數,} \end{cases}$$

計算

$$f(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) =$$

於是函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=(0,1)$ 上逐點收斂至 $f(x)$。

- 對所有 $n\in\mathbb{N}$,
- 對於 $f(x)$,
- 結論:

■ 對照影片 9.1 – 05 學習

例 **4.** 在區間 $I=[0,1]$ 上考慮 $\{f_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$, 其中

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & \text{若 } 0\le x\le \frac{1}{n} \\ -n^2\left(x-\frac{1}{n}\right)+n & \text{若 } \frac{1}{n}<x\le\frac{2}{n} \\ 0 & \text{若 } \frac{2}{n}<x\le 1, \end{cases}$$

若觀察函數 $f_n(x)$ 的圖形, 它是在 $[0,\frac{1}{n}]$ 區間上長出一個高爲 n 單位的等腰三角形之兩邊, 而在 $[\frac{1}{n},1]$ 區間上函數取值爲零。

- 計算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$
- 證明: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$。
  - ⋆ 若 $x=0$, 則
  - ⋆ 若 $x\in(0,1]$,
  - ⋆ 由上討論得到在 $[0,1]$ 區間上 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$。
- 結論:

■ 對照影片 9.1 – 06 學習

例 **5.** 在區間 $I=[0,1]$ 上考慮 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{n}x^n\}_{n=1}^{\infty}$, 計算

$$f(x)\overset{\text{定義}}{=\!=}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0,$$

於是函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=[0,1]$ 上逐點收斂至 $f(x)$。

- 對所有 $n\in\mathbb{N}$,
- 對於 $f(x)=0$, 得到
- 結論:

■ 對照影片 9.1 – 07 學習

現將前面討論的結果整理如下(以下標號 (A) 表示連續, (B) 表示積分, (C) 表示微分):

(A,C1) 在逐點收斂的意義下, 函數的連續性與可微分性不見得被保持。

(B1) 在逐點收斂的意義下, 可積分的性質不見得被保持。

(B2) 在逐點收斂的意義下, 積分與極限的運算先後順序互換下兩者算出來的值可能不同。

(C2) 在逐點收斂的意義下, 求導與極限的運算先後順序互換下兩者得到的結果可能不同。

想一想. 爲什麼逐點收斂無法讓連續性、可微分、可積分等性質轉移到取極限之後的函數?

問題. 是否有一個更好的收斂性讓這些數學性質在取極限之後仍然可以保持?

■ 對照影片 9.1 – 08 學習

定義 6. 考慮函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 若有一個函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 滿足

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及 $n \geq N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

則稱函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上 **均勻收斂** (uniformly convergent) 至 $f(x)$。

註. 如果函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上均勻收斂到 $f(x)$, 那麼 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上逐點收斂到 $f(x)$。

均勻收斂與逐點收斂的差異在哪裡呢? 這裡我們把兩個定義同時列出來比較:

(A) 逐點收斂:

對所有 $x \in I$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$。

(B) 均勻收斂:

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及 $n \geq N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$。

想一想. 體會逐點收斂與均勻收斂的差別?

■ 對照影片 9.1 – 09 學習

例 **7.** 試論函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ 在 $I = \mathbb{R}$ 上是否均勻收斂。

解.

■ 對照影片 9.1 – 10 學習

至於什麼樣的函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 逐點收斂到 $f(x)$ 但不是均勻收斂到 $f(x)$ 呢? 現寫出數學語句:

「對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及 $n \geq N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$。」<u>不成立</u>

$\Leftrightarrow$「存在 $\varepsilon_0 > 0$, 對任意 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $x_0 \in I$ 以及 $n_0 \geq N$ 使得 $|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$。」<u>成立</u>。

例 **8.** 試論函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ 在 $I = [0, 1]$ 上是否均勻收斂。

解.

給定函數列, 除了精確定義的討論外, 還有什麼方法判定它是否均勻收斂呢? 以下給出第一個充要條件。

■ 對照影片 9.1 – 11 學習

定理 9. 假設函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上逐點收斂至 $f(x)$, 記 $\|f_n - f\|_\infty \overset{\text{定義}}{=\!=} \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$, 則函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上均勻收斂至 $f(x)$ 的充分必要條件是

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0, \quad \text{即} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0。$$

證明:

□

想一想. 體會均勻收斂的充分必要條件之特色以及可能的缺點。

■ 對照影片 9.1 – 12 學習

例 **10.** 試論函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ 在 $I = (0, 1)$ 上是否均勻收斂。

解.

問題. 什麼時候 $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ 可以改成 $\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$?

解. 詳見第 9 章講義第 7 頁解釋。

■ 對照影片 9.1 – 13 學習

定理 11 (均勻柯西收斂準則, Uniform Cauchy Convergence Criterion). 函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^\infty$ 在區間 I 上均勻收斂之等價敘述爲:

> 對任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及對所有 $m > n \geq N$ 都有 $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$。

證明: ($\Rightarrow$) 假設 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 均勻收斂至 $f(x)$, 則對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$ 使得對所有 $m > n \geq N$, 都有

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{以及} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

於是

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon。$$

($\Leftarrow$) 已知對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$ 使得對所有 $x \in I$ 以及所有 $m > n \geq N$ 都有 $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 對所有 $x \in I$, 則 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是一個柯西數列, 所以由實數的完備性得知: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 存在。至此說明了函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 逐點收斂至函數 $f(x)$。

現在要證明 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 均勻收斂到 $f(x)$。給定 $\varepsilon > 0$, 從上段的討論已經確定了 $N = N(\varepsilon)$, 現考慮 $n \geq N$, 對於 $x \in I$, 找 $N_1 \in \mathbb{N}$ 且 $N_1 > N$ 使得當 $m \geq N_1$ 時, $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$。所以

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

注意到上述討論的 $N_1 = N_1(\varepsilon, x)$ 和 x 有關, 但是原先選定好的 $N = N(\varepsilon)$ 這個量是與 x 無關的, 所以函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在區間 I 上均勻收斂。 □

■ 對照影片 9.1 – 14 學習

例 12. 試論函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, 其中 $f_n(x) = \frac{n+x^2}{nx}$ 在 $I = (0, 1)$ 上是否均勻收斂。

解.

9.2 均勻收斂的性質

■ 對照影片 9.2 – 01 學習

這一節的主要目的是要逐一回答函數列的一些性質(例如連續性、可積性、可微性等) 如何經由均勻收斂的特性之下將這些性質過渡到取極限之後的函數。

定理 1. 若函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $x = x_0 \in I$ 處連續, 而且 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上均勻收斂至 $f(x)$, 則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續。

證明:

□

註. 關於均勻收斂保持連續性定理, 它的另一個觀點: _____

■ 對照影片 9.2 – 02 學習

定理 2. 若函數列 $\{f_n : I = [a,b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $I = [a,b]$ 上是可積分的, 而且 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I = [a,b]$ 上均勻收斂至 $f(x)$, 則 $f(x)$ 在 $I = [a,b]$ 上也是可積分的, 並且對所有 $x \in I = [a,b]$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t。$$

證明: 對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂至 $f(x)$, 所以存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 與所有 $n \geq N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, 由此得到

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

因爲 $f_N(x)$ 在 $I = [a,b]$ 上是可積分的, 由黎曼可積的第三充分必要條件得知: 存在分割 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_{f_N}^i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$, 其中

$$\omega_{f_N}^i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{以及} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

由於

$$\begin{aligned}
\sup_{[x_{i-1},x_i]} f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} &\leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f_N(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \\
\inf_{[x_{i-1},x_i]} f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} &\leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f_N(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)},
\end{aligned}$$

所以對所有 $i = 1, 2, \ldots, m$ 都有 $\omega_f^i \le \omega_{f_N}^i + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, 因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \omega_f^i \Delta x_i &\le \sum_{i=1}^{m} \left(\omega_{f_N}^i + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \omega_{f_N}^i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \Delta x_i \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon,\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可積分的。此外, 對所有 $x \in [a, b]$, 我們計算

$$\left| \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| =$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t) \right)\,\mathrm{d}t。$$

□

註. 關於均勻收斂保持定積分定理, 它的另一個觀點: _____

■ 對照影片 9.2 – 03,04 學習

最後, 我們要回答函數列的均勻收斂性質和求導之間的關係。

定理 3. 若函數列 $\{f_n : I = [a, b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 導函數皆連續, 而 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I = [a, b]$ 上逐點收斂到 $f(x)$, $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I = [a, b]$ 上均勻收斂到 $g(x)$, 則

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) = f'(x),$$

而且 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I = [a, b]$ 上均勻收斂到 $f(x)$。

註. 這裡先觀察清楚均勻收斂的條件是下在哪一個地方, 然後哪一個等式還有哪一個結果是需要證明的。

證明: 因爲 $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I = [a, b]$ 上均勻收斂至 $g(x)$, 而且對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n'(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上連續, 由 **定理 1** 得知 $g(x)$ 連續, 又由 **定理 2** 知道

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t =$$

因爲 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 所以由微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus) 得知 $G(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可微分的, 而且 $G'(x) = g(x) = f'(x)$。

以下要證明 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=[a,b]$ 上均勻收斂到 $f(x)$。給定任意 $\varepsilon>0$, 因爲 $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂到 $f(a)$, 所以存在 $N_1\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $n\geq N_1$ 都有 $|f_n(a)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$, 又 $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=[a,b]$ 上均勻收斂到 $f'(x)$, 所以存在 $N_2\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $x\in I$ 以及 $n\geq N_2$ 都有 $|f_n'(x)-f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$。現取 $N=\max(N_1,N_2)$, 則對所有 $x\in I$ 以及 $n\geq N$, 因爲 $f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$, 所以

$$|f_n(x)-f(x)|=$$

因此 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=[a,b]$ 上均勻收斂到 $f(x)$。 □

9.3 函數項級數

■ 對照影片 9.3 – 01 學習

定義 1. 給定函數列 $\{f_n:I\to\mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 記 $s_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$,

(A) 若對所有 $x\in I$, 極限 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=s(x)$ 存在, 稱函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 I 上 *逐點收斂* (pointwise convergent) 到 $s(x)$。

(B) 若 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂到 $s(x)$, 稱級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 I 上 *均勻收斂* (uniformly convergent) 到 $s(x)$。

同樣地, 我們首先要問的問題是: 給了一個函數項級數, 該如何判斷它只是一般的逐點收斂還是說它具有更好的均勻收斂之性質? 基於對函數列均勻收斂的認識, 我們可以先得到一個函數項級數均勻收斂的判別法。

■ 對照影片 9.3 – 02 學習

定理 2 (均勻柯西收斂準則, Uniform Cauchy Convergence Criterion)**.** 函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂的充分必要條件是:

對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $x\in I$ 以及所有 $m>n\geq N$ 都有

$$|s_m(x)-s_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}f_k(x)\right|<\varepsilon。$$

證明: ($\Rightarrow$) 記函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 的部份和爲 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$。假設 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂至 $s(x)$, 則對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$ 使得對所有 $x\in I$ 以及對所有 $m>n\geq N(\varepsilon)$, 都有

$$|s_m(x)-s(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{以及}\quad|s_n(x)-s(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

於是

$$|s_m(x)-s_n(x)|\leq|s_m(x)-s(x)|+|s(x)-s_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

($\Leftarrow$) 已知對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$ 使得對所有 $x \in I$ 以及 $m > n \geq N$ 都有 $|s_m(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$。對所有 $x \in I$, 則 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個柯西數列, 所以由實數的完備性得知: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ 存在。至此說明了部份和 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 逐點收斂至函數 $s(x)$。

現在要證明 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂到 $s(x)$。給定 $\varepsilon > 0$, 從上段的討論已經確定了 $N = N(\varepsilon)$, 現考慮 $n \geq N$, 對於 $x \in I$, 找 $N_1 \in \mathbb{N}$ 且 $N_1 > N$ 使得當 $m \geq N_1$ 時, $|s_m(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$。所以

$$\begin{aligned}|s_n(x) - s(x)| &= |s_n(x) - s_m(x) + s_m(x) - s(x)| \\ &\leq |s_n(x) - s_m(x)| + |s_m(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

因此部份和 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上均勻收斂;換言之, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂。 □

■ 對照影片 9.3 – 03 學習

由均勻柯西收斂準則繼續延伸, 那麼可以得到一個實用性更高的級數均勻收斂判別法。

定理 3 (魏爾斯特拉斯 M-判別法, Weierstrass M-Test)**.** 考慮函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 假設存在一個無窮數列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 而言, 對所有 $x \in I$ 滿足 $|f_n(x)| \leq M_n$。如果級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂。

證明: 因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 收斂, 對任意 $\varepsilon > 0$, 由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知: 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對任何 $m > n \geq N$ 都有 $\sum\limits_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$, 於是對所有 $x \in I$, 都有

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂。 □

魏爾斯特拉斯 M-判別法的特色在於: 原本要處理的是與 n 和 x 都有關的函數項級數之均勻收斂, 我們可透過一個有效的估計, 轉而去問一個無窮級數的收斂問題, 由級數的收斂就可以證明函數項級數是均勻收斂的。

■ 對照影片 9.3 – 04,05 學習

例 **4.** 試就 p 值, 其中 $p > 0$, 討論函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^p \mathrm{e}^{-nx}$ 在 $I = (0, \infty)$ 上是否均勻收斂。

解.

■ 對照影片 9.3 – 06 學習

在探討級數理論時曾經介紹了阿貝爾判別法 (Abel's Test) 與狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test), 現將這兩個判別法稍加修飾, 就可以用來證明函數項級數均勻收斂的性質。

定理 5 (阿貝爾判別法, Abel's Test). 若有函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{g_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂,

(B) 對所有 $x \in I$, 數列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 單調; 此外, 函數列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上均勻有界(存在 $M > 0$ 使得對所有 $x \in I$ 以及 $n \in \mathbb{N}$ 都滿足 $|g_n(x)| \leq M$。)

則函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。

證明: 因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 均勻收斂, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及所有 $m > n \geq N$ 都有

$$|F_{m,n+1}(x)| \overset{\text{記}}{=} \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon。$$

再從阿貝爾變換 (Abel Transformation) 得到

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)g_k(x) \right| &= \left| F_{m,n+1}(x)g_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} F_{k,n+1}(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \right| \\
&\leq |F_{m,n+1}(x)||g_m(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |F_{k,n+1}(x)||g_k(x) - g_{k+1}(x)| \\
&\leq \varepsilon(|g_m(x)| + |g_{n+1}(x)| + |g_m(x)|) \leq 3M\varepsilon,
\end{aligned}$$

所以由均勻柯西收斂準則 (Uniform Cauchy Convergence Criterion) 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。 □

■ 對照影片 9.3 – 07 學習

定理 6 (狄立克萊判別法, Dirichlet's Test). 若有函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{g_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的部份和在 I 上均勻有界。*(存在 $M > 0$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 與 $x \in I$ 都有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \le M$。)*

(B) 對所有 $x \in I$, 數列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 單調;並且函數列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上均勻收斂至 $g(x) = 0$;

則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。

證明: 因爲 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂至 $g(x) = 0$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 與 $n \ge N$ 都有 $|g_n(x)| < \varepsilon$。此外, 對所有 $m > n \ge N$, 都有

$$|F_{m,n+1}(x)| \overset{\text{記}}{=} \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \le \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \le 2M,$$

由阿貝爾變換 (Abel Transformation) 得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)g_k(x)\right| &= \left|F_{m,n+1}(x)g_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} F_{k,n+1}(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x))\right| \\ &\le |F_{m,n+1}(x)||g_m(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |F_{k,n+1}(x)||g_k(x) - g_{k+1}(x)| \\ &\le 2M(|g_m(x)| + |g_{n+1}(x)| + |g_m(x)|) < 6M\varepsilon,\end{aligned}$$

故由均勻柯西收斂準則 (Uniform Cauchy Convergence Criterion) 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。 □

■ 對照影片 9.3 – 08 學習

例 **7.** 試證以下兩個結果:

(A) 假設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調收斂至 0, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $(0, 2\pi)$ 內部的任何一個閉區間上均勻收斂。

(B) 假設 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調收斂至 0, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 在 $(0, 2\pi)$ 內部的任何一個閉區間上均勻收斂。

解.

(A) 關於數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 也可以視爲是常數函數列, 它單調收斂至 0, 對任意 $0 < \delta < \pi$, 當 $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ 時,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \frac{\left|\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在區間 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上均勻收斂。

(B) 關於數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 也可以視爲是常數函數列, 它單調收斂至 0, 對任意 $0 < \delta < \pi$, 當 $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ 時,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \frac{\left|\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 在區間 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上均勻收斂。

想一想. 何謂富立葉級數理論 (Fourier Series Theory)?

■ 對照影片 9.3 – 09 學習

定理 8. 給定函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $x = x_0$ 處皆連續, 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上均勻收斂至 $s(x)$, 則 $s(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續。

證明: 記函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的部份和爲 $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$。對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $s_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂至 $s(x)$, 所以存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 與 $n \geq N$ 都有 $|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$。因爲對於 $k = 1, 2, \ldots, N$, 函數 $f_k(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續, 所以 $s_N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} f_k(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續, 所以存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $x \in I, |x - x_0| < \delta$ 都有 $|s_N(x) - s_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, 這麼一來, 對所有 $x \in I, |x - x_0| < \delta$ 都有

$$|s(x) - s(x_0)| \leq |s(x) - s_N(x)| + |s_N(x) - s_N(x_0)| + |s_N(x_0) - s(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

因此 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續。 □

■ 對照影片 9.3 – 10 學習

定理 9 (逐項積分定理, Term-by-Term Integration). 給定函數列 $\{f_n : I = [a, b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可積分的, 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上均勻收斂至 $s(x)$, 則 $s(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上也是可積分的。此外, 對所有 $x \in [a, b]$, 都有

$$\int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t。$$

證明: 記函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的部份和爲 $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$。對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $s_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂至 $s(x)$, 所以存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 與 $n \geq N$ 都有 $|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, 由此得到

$$s_n(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < s(x) < s_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

因爲對於 $k = 1, 2, \ldots, N$, $f_k(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可積分的, 所以 $s_N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} f_k(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上也是可積分的, 於是存在分割 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_{s_N}^i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$, 所以

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_s^i \Delta x_i < \sum_{i=1}^{m} \left(\omega_{s_N}^i + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \omega_{s_N}^i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} \Delta x_i < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

所以 $s(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可積分的。此外, 對所有 $x \in [a, b]$, 我們計算

$$\left| \int_a^x s_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_a^x (s_n(t) - s(t))\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^x |s_n(t) - s(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon(x-a)}{3(b-a)} < \varepsilon,$$

因此

$$\int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^x s_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^x \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^x f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t。$$

□

■ 對照影片 9.3 – 11,12 學習

定理 10 (逐項求導定理, Term-by-Term Differentiation)**.** 給定函數列 $\{f_n : I = [a,b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 具有連續的導函數, 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上逐點收斂至函數 $s(x)$。而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 I 上均勻收斂至 $u(x)$, 則

$$s'(x) \overset{\text{記}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right) \overset{\text{記}}{=} u(x),$$

而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 實際上在區間 I 上均勻收斂至函數 $s(x)$。

證明: 記部份和 $u_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k'(x)$, 因爲 $u_n(x)$ 在 I 上均勻收斂至 $u(x)$, 而且對所有 $k = 1, 2, \ldots, n$, $f_k'(x)$ 在 $I = [a,b]$ 上連續, 所以 $u(x)$ 連續, 由 **定理 9** 知道:

$$\begin{aligned} U(x) &\overset{\text{記}}{=} \int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n(x) - f_k(a)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = s(x) - s(a), \end{aligned}$$

由微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus) 知: $u(x) = U'(x) = s'(x)$, 即 $s'(x) = u(x)$, 因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right)。$$

以下欲證明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂至函數 $s(x)$。

給定 $\varepsilon > 0$, 因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 收斂至 $s(a)$, 所以存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_1$ 都有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(a) - s(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 I 上均勻收斂至 $u(x)$ 告知: 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及 $n \geq N_2$ 都有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k'(x) - u(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$。取 $N = \max(N_1, N_2)$, 則對所有 $x \in I$ 以及 $n \geq N$, 都有

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - s(x)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(f_k(a) + \int_a^x f_k'(t)\,\mathrm{d}t\right) - \left(s(a) + \int_a^x s'(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\ &= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(a) - s(a)\right) + \int_a^x \left(\sum_{k=1}^{n} f_k'(t) - u(t)\right)\mathrm{d}t\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^x \left|\sum_{k=1}^{n} f_k'(t) - u(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^x \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(x-a)}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂至函數 $s(x)$。 □

9.4 冪級數

■ 對照影片 9.4 – 01 學習

定義 1. 定義 *以 x_0 爲中心的冪級數* (power series centered at x_0) 爲

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + \cdots + c_n(x-x_0)^n + \cdots, \quad \text{其中 } c_n \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \ldots。$$

(A) 冪級數的部份和函數列是: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$ 可以理解爲多項式函數列對次數 n 取極限而得的產物。

(B) 在冪級數的表達式中, 不論 x 爲何, 我們總是約定 $(x-x_0)^0 \equiv 1$, 於是 $c_0(x-x_0)^0 \equiv c_0$。

(C) 冪級數也可以看成是一個以 x 爲變數的函數, 此時將冪級數記成 $f(x) \overset{\text{記}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$。若把它看成函數, 那麼就要先了解函數的定義域, 也就是探討哪些 x 所成的級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 是收斂的。

(C1) 將 $x = x_0$ 代入冪級數, 則得 $\lim_{n\to\infty} P_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} c_0 = c_0$。所以<u>冪級數的定義域不是空集合</u>。

(C2) 若 $x \neq x_0$, 計算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \cdot |x-x_0| = \left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\right) \cdot |x-x_0| \overset{\text{記}}{=} L \cdot |x-x_0|。$$

由比值判別法 (Ratio Test) 得知:

- 若 $L \cdot |x-x_0| < 1$, 則冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 絕對收斂。
- 若 $L \cdot |x-x_0| > 1$ 或者是 $L \cdot |x-x_0| = \infty$, 則冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 發散。

(D) 定義冪級數的 *收斂半徑* (radius of convergence) 爲

$$R = \begin{cases} 0 & \text{若 } L = \infty \\ \frac{1}{L} & \text{若 } L \in (0, \infty) \\ \infty & \text{若 } L = 0。 \end{cases}$$

於是我們得到冪級數的收斂範圍分成三種類型:

- <u>若 $R = 0$</u>, 則冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 只有在 $x = x_0$ 處收斂。
- <u>若 $0 < R < \infty$</u>, 則冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $|x-x_0| < R$ 的時候絕對收斂; 在 $|x-x_0| > R$ 的時候發散。至於冪級數在端點 $x = x_0 \pm R$ 的收斂或發散必須根據冪級數的性質各別檢視, 不同的冪級數在端點會有不同的收斂或發散的結果。
- <u>若 $R = \infty$</u>, 冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 都收斂。

而冪級數的 *收斂區間* (interval of convergence) 表示冪級數的定義域。對於上述的第二種情形, 收斂區間可能是 $(x_0-R, x_0+R), [x_0-R, x_0+R], (x_0-R, x_0+R], [x_0-R, x_0+R)$ 四種情況之一。至於最後一種情況, 收斂區間是 $(-\infty, \infty)$。

例 **2.** 冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ 的收斂區間只有 $x=0$。

例 **3.** 冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ 的收斂區間是 $(-\infty, \infty)$。

例 **4.** 冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^{2n-1}$ 的收斂區間是 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$。跳階多指數, 平移多冪次。端點重新檢驗。

冪級數的收斂區間表示冪級數的定義域, 也表示冪級數逐點收斂的集合。

定理 5 (阿貝爾第一定理, First Abel's Theorem).

(A) 若冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $x=\xi$ 收斂, 則它在 $|x-x_0|<|\xi-x_0|$ 的地方絕對收斂。

(B) 若冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $x=\xi$ 發散, 則它在 $|x-x_0|>|\xi-x_0|$ 也發散。

由前幾節知道: 只知冪級數在範圍內是逐點收斂其實意義不大, 因爲逐點收斂無法保證多項式的各種性質能夠順利移植到冪級數, 所以我們更想知道的是冪級數在收斂區間內是否均勻收斂。

定理 6 (阿貝爾第二定理, Second Abel's Theorem). 考慮冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, 若冪級數的收斂半徑爲 R, 其中 $R>0$, 則

(A) 冪級數在 (x_0-R, x_0+R) 內的任何一個閉區間 $[a,b]$ 上均勻收斂。

(B) 若冪級數在 $x=x_0+R$ 收斂, 則冪級數在 $[a, x_0+R]$ 上均勻收斂, 其中 $a>x_0-R$。

(C) 若冪級數在 $x=x_0-R$ 收斂, 則冪級數在 $[x_0-R, b]$ 上均勻收斂, 其中 $b<x_0+R$。

■ 對照影片 9.4 – 02 學習

定理 7. 冪級數在收斂區間上是連續函數。

定理 8 (冪級數逐項積分定理, Term-by-Term Integration Theorem for Power Series).
若冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 的收斂半徑爲 R, 其中 $R>0$, 則在收斂區間中的任意一點 x 都有

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} c_n(t-x_0)^n\,\mathrm{d}t\right)。\tag{1}$$

此外, 逐項積分後所得的冪級數與原來的冪級數具有相同的收斂半徑 R。

定理 9 (冪級數逐項求導定理, Term-by-Term Differentiation Theorem for Power Series).
若冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 的收斂半徑爲 R, 則在 (x_0-R, x_0+R) 當中的任一點 x 都有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c_n(x-x_0)^n\right)。$$

此外, 逐項求導後所得的冪級數與原來的冪級數具有相同的收斂半徑 R。

以下要介紹三個重要函數, 它們在一個範圍內可以表達成冪級數的樣子。

例 **10.** 考慮函數 $f(x)=\frac{1}{1-x}$, 我們可以把它理解成公比爲 x 的等比級數和的公式, 所以將它改寫成

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\overset{\text{在 }|x|<1}{=\!=\!=}1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n。$$

例 **11.** 考慮函數 $f(x)=\ln(1+x)$, 因爲

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}\overset{\text{在 }|x|<1}{=\!=\!=}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

由冪級數逐項積分定理 (Term-by-Term Integration Theorem for Power Series) 得到

$$f(x)=f(0)+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n+1}t^{n+1}\right]\Bigg|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}。$$

由於上面的討論用到了冪級數逐項積分定理, 所以端點的收斂性必須重新檢視。可證收斂區間是 $(-1,1]$。由阿貝爾第二定理 (Second Abel's Theorem) 得知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $(-1,1]$ 上均勻收斂至 $\ln(1+x)$。

例 **12.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\cdots=\ln 2$。

證明: 因爲 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $(-1,1]$ 上均勻收斂至 $\ln(1+x)$, 所以在 $x=1$ 的地方, 級數和與函數值相同, 於是我們得到交錯級數的和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$。 □

關於 $\ln(1+x)$ 在 $(-1,1]$ 上冪級數的表達, 有時候我們會重新選用指標, 得到

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

的樣子, 這些表達式完全通用。

例 **13.** 考慮函數 $f(x)=\tan^{-1}x$, 因爲

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}\overset{\text{在 }|x|<1}{=\!=\!=}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

由冪級數逐項積分定理 (Term-by-Term Integration Theorem for Power Series) 得到

$$f(x)=f(0)+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}\right]\Bigg|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}。$$

由於上面的討論有用到逐項積分定理, 所以端點的收斂性必須重新檢視。可證兩端點均收斂。

因爲冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收斂區間是 $[-1,1]$, 由阿貝爾第二定理 (Second Abel's Theorem) 得知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 在 $[-1,1]$ 上均勻收斂至 $\tan^{-1}x$。

例 **14.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4}{2n+1}=\pi$。(代入 $x=1$ 後整理, 也要用到均勻收斂的性質。)

9.5 泰勒級數理論

■ 對照影片 9.5 – 01 學習

回想前一單元, 我們利用等比級數公式與冪級數理論得到以下函數在一個範圍內可以用冪級數重新表達:

(1) $\dfrac{1}{1-x} \overset{x\in(-1,1)}{=\!=\!=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$。

(2) $\ln(1+x) \overset{x\in(-1,1]}{=\!=\!=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$。

(3) $\tan^{-1} x \overset{x\in[-1,1]}{=\!=\!=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$。

問題. 什麼時候一個函數 $f(x)$ 可以在一個點 $x = x_0$ 的<u>附近</u>表示成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 的樣子?

想要了解這個問題, 我們首先要找到等號成立的必要條件, 然後再去問充分性。

解.

(A) 觀察冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, 未知的量是所有係數 $c_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ 的值, 所以首先要確定係數。

<u>假設</u>函數 $f(x)$ 可以在 $x = x_0$ 的附近 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 表示成 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, 那麼冪級數的係數必須是

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots。$$

由此, 我們需要假設函數 $f(x) \in C^{\infty}(I)$; 也就是說, 假設函數的任何階導函數 $f^{(n)}(x), n = 0, 1, 2, \ldots$ 在區間 I 上存在且連續, 具有這樣性質的函數我們稱爲 *光滑函數* (smooth functions)。

由上述討論知道:<u>若</u>在 $x = x_0$ 附近<u>可以</u>寫成 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 的話, 那麼 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 是<u>唯一</u>讓等式成立的候選人。

(B) 在討論這個等號是否成立之前, 我們要先重新討論冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 的結構。給定一個光滑函數 $f(x)$, 稱

$$T_{x_0}(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

爲函數 $f(x)$ *以* $x = x_0$ *爲中心的泰勒級數* (Taylor series centered at $x = x_0$)。

特別地, 函數 $f(x)$ 以 $x = 0$ 爲中心的泰勒級數

$$M(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

稱爲函數 $f(x)$ 的 *馬克勞林級數* (Maclaurin series)。

(C) 考慮 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$, 由它定義出的馬克勞林級數爲

$$M(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \mathrm{e}^{2^{2n+1}}}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

而 $M(x)$ 只在 $x=0$ 處收斂。

這個例子告知: 存在一個函數 $f(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 由這個函數定義出的馬克勞林級數 $M(x)$ 只有在 $x=0$ 的地方收斂, 而在 $x\neq 0$ 的地方都沒有意義。這是不樂見的情形, 因爲函數本來就會在中心的地方與其冪級數相等, 花了那麼多時間把馬克勞林級數寫出來, 卻在其它地方沒意義, 這是很糟的情況。

(D) 考慮函數

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & 若\ x\neq 0\\ 0 & 若\ x=0,\end{cases}$$

則函數 $f(x)$ 對應到的馬克勞林級數是

$$M(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\equiv 0;$$

也就是說, $M(x)$ 是一個處處爲零的函數, 函數 $M(x)$ 的收斂區間是 $(-\infty,\infty)$。但是在 $x\neq 0$ 的地方, $M(x)\neq f(x)$。所以函數 $f(x)$ 無法在包含 $x=0$ 的任一個區間 $(-\delta,\delta)$ 用馬克勞林級數 $M(x)$ 表達。

這個例子告知: 存在一個函數 $f(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 縱使由這個函數定義出的馬克勞林級數 $M(x)$ 的定義域是 $\mathbb{R}$, 但是除了在 $x=0$ 處滿足 $f(0)=M(0)$, 而在 $x\neq 0$ 的地方 $f(x)\neq M(x)$, 這也是不樂見的情形。函數本來就會在中心的地方與其冪級數相等, 花了那麼多時間把馬克勞林級數寫出來, 卻在其它地方不相等(心中是希望這個冪級數可以重現函數值), 那麼這個馬克勞林級數也沒什麼用處。

■ 對照影片 9.5 – 02 學習

問題. 在什麼樣的條件下一個光滑函數 $f(x)$ 存在 $\delta>0$ 使得在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上滿足 $f(x)=T_{x_0}(x)$, 或是在 $(-\delta,\delta)$ 上滿足 $f(x)=M(x)$?

(E) 給定光滑函數 $f(x)\in C^{\infty}(I)$, 以及 $x=x_0\in I$, 且存在 $\delta>0$ 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$,

(E1) 多項式 $T_{n,x_0}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 稱爲 函數以 $x=x_0$ 爲中心的 n-次泰勒多項式 (n-th degree Taylor polynomial of $f(x)$ at x_0)。

(E2) 定義一個泰勒級數 $T_{x_0}(x)$ 的 餘項 (remainder) 爲 $R_{n,x_0}(x)=f(x)-T_{n,x_0}(x)$。

(E3) 對於光滑函數 $f(x)$ 的馬克勞林級數 $M(x)$ 之餘項簡記爲 $R_n(x)$。

這裡先得到一個關於函數與其泰勒級數在一個區間內處處相等的充分必要條件。

定理. 一個光滑函數 $f(x)$ 在區間 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 內滿足 $f(x)=T_{x_0}(x)$ 的充分必要條件是對所有 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,x_0}(x)=0$。

要驗證 $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,x_0}(x)=0$, 這是一個技術層面的問題, 我們會試圖把餘項改寫成 拉格朗日餘項 (Lagrange remainder)、柯西餘項 (Cauchy remainder), 或是用 泰勒不等式 (Taylor's inequality) 處理。

(F) 在上述泰勒級數理論建立完畢後, 我們可以證明以下幾個常見的函數與其馬克勞林級數在收斂範圍內一樣。

(F1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 都成立。

(F2) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 都成立。

(F3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 都成立。

(F4) 對於 $m \in \mathbb{R}$, $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n$, 其中

$$C_n^m = \begin{cases} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} & \text{若 } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{若 } n = 0, \end{cases}$$

而馬克勞林級數的收斂半徑爲 $R = 1$, 端點的收斂性與 m 值有關。

現將前一單元所得到的式子與上述得到的結果一併整理:

(F5) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $x \in (-1, 1)$ 成立。

(F6) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ 在 $x \in (-1, 1]$ 成立。

(F7) $\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 在 $x \in [-1, 1]$ 成立。

(G) 設 $f : I \to \mathbb{R}$, 其中 I 爲開區間, 以及 $x_0 \in I$,

(G1) 若存在 $\delta > 0$ 以及一個冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ 使得對所有 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ 都有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

則稱函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處 解析 (analytic at $x = x_0$)。

(G2) 若函數 $f(x)$ 在區間 I 上的每個點都解析, 則稱 $f(x)$ 在 I 上是一個 解析函數 (analytic function on I)。

(H) 解析函數的性質摘要如下:

(H1) 解析函數的例子有: 多項式 (polynomials) $p(x)$、有理函數 (rational functions) $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, 其中 $p(x), q(x)$ 爲多項式、指數函數 (exponential functions) $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ 在 $\mathbb{R}$、對數函數 (logarithmic functions) $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ 在 $(0, \infty)$、正弦函數 $f(x) = \sin x$ 與餘弦函數 $f(x) = \cos x$ 在 $\mathbb{R}$、冪函數 (power functions) $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ 在其定義域上是解析函數。

(H2) 解析函數的四則運算與合成也都是解析函數。

課程總結

■ 對照影片 11.1 – 01 學習

問題. 高等微積分課程中學到了什麼?

- 你覺得高等微積分是個什麼樣的課程? 你覺得這門課和一年級的微積分課程有什麼差別?
  - ⋆ 想一想現在的你對這一個問題的答案是什麼? 然後回顧一年前你在雲端學院時候的作答, 兩者比較看看你是否有所成長。
  - ⋆ 若下一屆的學弟妹問你這個問題, 你可以說出一些關於這門課的實質內容或是給出更實際的建議嗎?

問題. 有什麼是上完高等微積分課後要帶走的觀念?

- 實數的建構 — 如何從 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$「填滿」得到 $\mathbb{R}$。
  - ⋆ 重新回顧如何建構實數的完備性。
- 了解從極限的方式定義出的概念, 它和數系之間的相容性, 這都會是有條件的成立。
  - ⋆ 各種規律成立的條件。
  - ⋆ 先後順序互換(操作順序交換) 的異同。
- 一副配好的眼鏡 — 從等級的原理看收斂與發散。
  - ⋆ 數列、瑕積分、級數、函數數列、函數項級數。
  - ⋆ 學數學應該要從學習的過程中培養出直覺或是宏觀的了解, 而非一直掉到細部的證明中跳脫不出來。
- 用不等式處理等式的美學。
  - ⋆ 從美學的角度看待這門課的特色, 它和其它學科(例如代數) 在思維上的差異。
  - ⋆ 生活中有很多現象與數學相關, 有待各位能夠體會箇中奧秘。