高等微積分 (二) 課程學習單 第 8 章

系所與班級: _____ 學號: _____ 姓名: _____

8 單元介紹與學習目標

■ 對照影片 8.1 – 01 學習

□ 課程地圖:

□ 和微積分課程所學的級數理論差別在哪?

(1) 多介紹幾個級數收斂發散的判別法。

(2) 著重數學理論的論述。

(3) 和級數相關的代數結構上的討論。

8.1 無窮級數的基本性質

■ 對照影片 8.1 – 02 學習

定義 1. 給定無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

(A) 定義 部份和數列 (partial sum sequence) $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。

(B) 定義 無窮級數 (infinite series) 爲部份和數列的極限;也就是說,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)。$$

(C) 若部份和數列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 換言之, 極限 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 存在, 則稱無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂 (convergent), 極限值 s 稱爲 級數和 (sum of the series)。

(D) 若部份和數列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散, 則稱無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散 (divergent)。

問題.

(1) 有什麼方法可以判定級數是收斂或是發散?

(2) 無窮級數有什麼性質?

■ 對照影片 8.1 – 03 學習

例 **2** (等比級數)**.** 試論 等比級數 (geometric series) 的收斂性與級數和: 給定 $a \neq 0$ 與 $r \in \mathbb{R}$, 則

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & \text{若 } |r| < 1 \\ \text{發散} & \text{若 } |r| \geq 1。 \end{cases}$$

解**.**

■ 對照影片 8.1 – 04 學習

定理 **3** (線性性質)**.**

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 收斂, 並且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。

(B) 若無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 而 $c \in \mathbb{R}$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ 收斂, 並且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。

證明:

(A) 記 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 與 $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, 則

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \right) = \lim_{n\to\infty} (s_n \pm t_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n \pm \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n。 \end{aligned}$$

(B) 記 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 而 $c \in \mathbb{R}$, 則

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = \lim_{n\to\infty} c \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} c \cdot s_n = c \lim_{n\to\infty} s_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n。$$

□

註. 要確定<u>級數是收斂的</u>, 才有線性性質。論述過程中<u>避免</u>寫出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{或是} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 2^n = 3 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$$

這樣的式子, 在數學寫作上是違規的。

註. 可以證明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 發散。

■ 對照影片 8.1 – 05 學習

定理 4 (加法結合律). 若無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則將某些項加括號之後所成的級數

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots \\ + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots$$

收斂, 並且級數和相同。

複習數列與子數列下標的記號:

證明: 設 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部份和數列。記 $n_0 = 0$, 對於 $k \in \mathbb{N}$, 令

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k},$$

則先將某些項加括號之後所得的無窮級數可表示爲 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, 其部份和數列記爲 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, 於是對所有 $k \in \mathbb{N}$, 都有 $t_k = s_{n_k}$; 也就是說, 數列 $\{t_k\}_{k=1} = \{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一個子數列。因爲 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 所以由數列與子數列的收斂關係得知 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 也收斂。 □

■ 對照影片 8.1 – 06 學習

註. 無窮級數理論當中, 想要回答的代數結構問題包括: 加法結合律 (剛才已經解決了這個情況)、加法交換律、乘法分配律。至於其他兩個問題, 會在單元 8.4 才能回答。

註. 有關加法結合律的進一步延伸, 從它的否逆命題看問題:

■ 對照影片 8.1 – 07 學習

定理 5 (級數收斂的必要條件). 若無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

證明: 記 $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 因爲 $a_n = s_n - s_{n-1}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0。$$

□

註. 這個定理的逆敘述不對, 也就是「若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂」不一定成立。舉例:

至於 定理 5 的否逆命題則是一個常用來判斷無窮級數發散的方法。

推論 6 (發散判別法, Test of Divergence). 考慮無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 若極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在, 或者是 $\lim_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$, 則無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

之前討論等比級數的例子, 我們也可以透過發散判別法得知等比級數 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0$ 在公比爲 $r \geq 1$ 或是 $r \leq -1$ 的時候發散。

■ 對照影片 8.1 – 08 學習

想一想. 回想 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ 的精確定義, 還有柯西收斂準則。

定理 7 (柯西收斂準則, Cauchy Convergence Criterion)**.** 無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂的充分必要條件是*:* 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $m > n \geq N$, 都有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon。$$

證明: 記 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 級數收斂表示 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在。由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 知: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在等價於對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $m > n \geq N$, 都有

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon。$$

□

■ 對照影片 8.1 – 09 學習

例 **8.** 判斷無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收斂或是發散。

解**.**

■ 對照影片 8.1 – 10 學習

例 **9.** 判斷無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是收斂或是發散。

解. 比較:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂:
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散:

■ 對照影片 8.1 – 11 學習

例 **10.** 判斷無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 是收斂或是發散。

解.

註. 尋求級數和是件很困難的事, 需要用別的方法證明。$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$。

8.2 正項級數的收斂判別法

■ 對照影片 8.2 – 01 學習

這一節將專心研究 正項級數 (series with positive terms) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n > 0$ 的收斂性。

定理 1 (積分判別法, Integral Test). 假設 $f(x)$ 在 $[1, \infty)$ 上是連續、恆正、遞減的函數。記 $a_n = f(n)$, 則正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 與瑕積分 $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 具有相同收斂或發散的性質。

證明:

□

■ 對照影片 8.2 – 02 學習

定義 2. 給定 $p \in \mathbb{R}$, 型如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的無窮級數稱爲 p-級數 (p-series)。

例 3. 證明: p-級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 若 $p > 1$ 收斂; 若 $p \leq 1$ 發散。

證明:

(A) <u>若 $p > 0$</u>, 考慮 $f(x) = \frac{1}{x^p}$, 則 $f(x)$ 在 $[1, \infty)$ 上連續、恆正、遞減。因爲瑕積分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 若 $p > 1$ 收斂, 若 $p \leq 1$ 發散, 所以 p-級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 若 $p > 1$ 收斂, 若 $0 < p \leq 1$ 發散。

(B) <u>若 $p \leq 0$</u>, 記 $a_n = \frac{1}{n^p}$, 因爲 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$, 由發散判別法 (Test of Divergence) 得知: p-級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 若 $p \leq 0$ 時發散。

(C) 綜合 (A) 與 (B) 的結果, 得知: p-級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 若 $p > 1$ 收斂;若 $p \leq 1$ 發散。

□

註. 在單元 8.1 已經用了柯西收斂準則證明 p-級數在 $p = 1, 2$ 的情況。

註. 兩個重要的標準模型: 等比級數 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0$ 在 $|r| < 1$ 收斂, 在 $|r| \geq 1$ 發散; p-級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 在 $p > 1$ 收斂, 在 $p \leq 1$ 發散。

■ 對照影片 8.2 – 03 學習

例 **4.** 試就 p 值, 其中 $p > 0$, 判斷無窮級數 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 是收斂或發散。

解.

■ 對照影片 8.2 – 04 學習

問題. 爲什麼積分判別法當中, 對於函數需要假設連續、恆正、「遞減」的條件?

解. 自行看影片完成並註記心得。

■ 對照影片 8.2 – 05 學習

定理 **5** (比較判別法, Comparison Test). 假設無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 滿足對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $0 < a_n \leq b_n$。

(A) 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(B) 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散。

證明: 考慮兩級數之部份和 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 與 $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$,

(A) 因爲兩級數皆爲正項級數, 所以部份和數列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 皆爲遞增數列。因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂, 記 $t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。因爲對所有 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $a_k \leq b_k$, 所以 $s_n \leq t_n \leq t$。由單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) 得知 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂;換言之, 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(B) 因爲級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$, 因此級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散。

□

■ 對照影片 8.2 – 06 學習

例 **6.** 判斷無窮級數 (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n-1}{n^3-2n+5}$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^3-2n^2+1}$ 是收斂或是發散。

解. 先從等級預判 (A) 和 _____ 相近, 所以 _____; (B) 和 _____ 相近, 所以 _____。

■ 對照影片 8.2 – 07 學習

定理 **7** (極限比較判別法, Limit Comparison Test). 假設 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆爲正項級數, 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0,$$

則無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 具有同樣的收斂或發散性質。

證明: 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{C}{2} > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - C\right| < \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}C < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}C \Rightarrow \frac{1}{2}C \cdot b_n < a_n < \frac{3}{2}C \cdot b_n,$$

(A) 因爲對所有 $n > N$ 都有 $\frac{1}{2}C \cdot b_n < a_n$, 得到 $b_n < \frac{2}{C} \cdot a_n$。若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ 收斂, 得到 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{C} \cdot a_n$ 也收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知: 無窮級數 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ 收斂, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ 收斂。

(B) 因爲對所有 $n > N$ 都有 $a_n < \frac{3}{2}C \cdot b_n$, 得到 $\frac{2}{3C} \cdot a_n < b_n$。若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散, 則 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ 發散, 得到 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3C} \cdot a_n$ 也發散, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知: 無窮級數 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ 發散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ 發散。

□

■ 對照影片 8.2 – 08 學習

例 **8.** 試就 $p \in \mathbb{R}$ 討論 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 的收斂性。

解.

8.3 一般級數的收斂判別法

■ 對照影片 8.3 – 01 學習

定義 1 (交錯級數, Alternating Series). 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$, 則型如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 或是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$ 的無窮級數稱爲 交錯級數 (alternating series)。

定理 2 (交錯級數判別法, Alternating Series Test). 關於交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$, 若數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減而且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 則交錯級數收斂。

證明: 這裡先看 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 的情況。記交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 的部份和數列爲 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, 並記 $s_0 = 0$, 因爲 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 所以觀察

$$\begin{aligned} s_{2n} &= s_{2n-2} + b_{2n-1} - b_{2n} \geq s_{2n-2} \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} - b_{2n} + b_{2n+1} = s_{2n-1} - (b_{2n} - b_{2n+1}) \leq s_{2n-1}; \end{aligned}$$

換言之, 部份和的偶數項子數列 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 遞增, 而奇數項子數列 $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 而且

$$\begin{aligned} s_{2n} &= s_{2n-1} - b_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_{2n-3} \cdots \leq s_3 \leq s_1 = b_1 \\ s_{2n+1} &= s_{2n} + b_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_{2n-2} \geq \cdots \geq s_4 \geq s_2 = b_1 - b_2 \geq 0, \end{aligned}$$

得到部份和的偶數項子數列 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界, 而奇數項子數列 $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 有下界, 由單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) 得知 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收斂。

設 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = L$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = M$, 因爲 $M - L = \lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0$, 所以交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = L = M$ 收斂。

至於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$ 的情形, 記 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲其部份和, 則 $t_n = -s_n$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 收斂, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} -s_n = -\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 收斂。因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$ 收斂。 □

想一想. 如何用圖解的方式說明交錯級數判別法?

■ 對照影片 8.3 – 02 學習

例 **3.** 試論交錯級數 (A) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^p}$, 其中 $p > 0$ 與 (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{3n-1}$ 是收斂或是發散。

解.

■ 對照影片 8.3 – 03 學習

定義 **4.** 考慮無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

(A) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 稱無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是 絕對收斂 (absolutely convergent)。

(B) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 發散, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 稱級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是 條件收斂 (conditionally convergent)。

絕對收斂的例子: _____。條件收斂的例子: _____。

定理 **5.** 絕對收斂級數必爲收斂級數。換言之, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

證明: 記 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部份和數列, 而 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 的部份和數列, 因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, _____, 於是

故由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。 □

■ 對照影片 8.3 – 04 學習

定理 6 (比值判別法, Ratio Test).

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂。

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, 則級數收斂或發散無法下定論。

證明:

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, 取 $\varepsilon = \frac{1-L}{2} > 0$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - L\right| < \frac{1-L}{2} \Rightarrow \frac{3L-1}{2} < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \frac{1+L}{2}。$$

記 $r = \frac{1+L}{2} < 1$, 從不等式 $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r$ 得到對所有 $n > N$ 都有 $|a_{n+1}| < |a_n|r$, 於是對所有 $k \in \mathbb{N}$, 都有 $|a_{N+k}| < |a_{N+k-1}|r < |a_{N+k-2}|r^2 < \cdots < |a_N|r^k$, 因爲 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_N|r^k = \frac{|a_N|r}{1-r}$ 收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}|$ 收斂, 於是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{N} |a_n| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}|$ 收斂, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂。

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Leftrightarrow |a_{n+1}| > |a_n|,$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 所以由發散判別法 (Test of Divergence) 得知無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

□

■ 對照影片 8.3 – 05 學習

例 **7.** 試論級數 (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 與 (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ 是收斂或是發散。

解.

■ 對照影片 8.3 – 06 學習

基本等級的列表: 當 $n \to \infty$ 時, _____。

等級的預判適用於 (1) 多類等級的量相加 或是 (2) 兩類等級的量相乘 (除)。

問題. 若遇到三種類型以上的量相乘時, 可以只抓最高等級的量預判嗎?

解. 史特林公式 (Stirling's formula):

考慮 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{ne^n n!}$

■ 對照影片 8.3 – 07,08 學習史特林公式的證明。

■ 對照影片 8.3 – 09 學習。

定理 8 (根式判別法, Root Test).

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂。

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, 則級數收斂或發散無法下定論。

證明:

(A) 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, 取 $\varepsilon = \frac{1-L}{2} > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有

$$\left| \sqrt[n]{|a_n|} - L \right| < \frac{1-L}{2} \Rightarrow \frac{3L-1}{2} < \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1+L}{2},$$

記 $r = \frac{1+L}{2} < 1$, 則上述不等式告知: 對所有 $n > N$ 都有 $|a_n| < r^n$。因爲 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} r^n = \frac{r^{N+1}}{1-r}$ 收斂, 故由比較判別法 (Comparison Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂。

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Leftrightarrow |a_n| > 1^n = 1,$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 所以由發散判別法 (Test of Divergence) 得知無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

□

■ 對照影片 8.3 – 10 學習。

例 **9.** 試論級數 (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ 與 (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{n-1}3^{n+1}}$ 的收斂性。

解.

■ 對照影片 8.3 – 11 學習。

比值判別法與根式判別法和等比級數的關係:

(A) 看 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$ _____。

(B) 看 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{|a_n|} =$ _____。

對於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 則操作 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 與 $\sqrt[n]{|a_n|}$ 可以理解成“類公比”。

問題. 什麼時候比值判別法與根式判別法不適用?

解.

從基本等級的列表 (質譜分解, spectrum): 當 $n \to \infty$ 時,
比指數等級還要低的量無法在這兩個判別法當中顯現。

問題. 有沒有一種更精細的判別法進一步分類比值判別法與根式判別法不適用的情況?

■ 對照影片 8.3 – 12 學習。

定理 10 (拉比判別法, Raabe's Test). 考慮無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, 假設 $r = \lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right)$ 存在。若 $r > 1$ 則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 若 $r < 1$, 則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 發散。若 $r = 1$, 則 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 的收斂或發散無法判定。

證明: 設 $1 < p < q$, 考慮函數 $f(x) = 1 + qx - (1+x)^p$。因爲 $f(0) = 0, f'(0) = q - p > 0$, 所以存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $0 < x < \delta$ 都有 $1 + qx > (1+x)^p$。

(A) <u>若 $r > 1$</u>,

(B) <u>若 $r < 1$</u>, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \Rightarrow |a_n|n < |a_{n+1}|(n+1),$$

得到 $\{|a_n|n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $n > N$ 遞增, 所以數列有下界, 即存在 $m > 0$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n|n \geq m$, 即 $|a_n| \geq \frac{m}{n}$。而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n}$ 發散, 比較判別法 (Comparison Test) 知: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 發散。

□

■ 對照影片 8.3 – 13 學習。

關於拉比判別法的注意事項:

(A) 拉比判別法最終是得到 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 的收斂或發散。

(B) 爲什麼拉比判別法是偵測 n^p 的等級? 爲什麼判別式當中是寫成 $|\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ 而非 $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$?

■ 對照影片 8.3 – 14 學習。

例 **11.** 判斷無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+1)(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$ 是收斂或是發散。

解.

■ 對照影片 8.3 – 15 學習。

關於級數判別法的進階討論:

(A) 比值判別法、根式判別法、拉比判別法都有失效的情況, 有沒有一種「最佳」的判別法? 答:____

高斯判別法 (Gauss Test): 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 滿足

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right), n \to \infty,$$

則當 $\beta > 1$ 時級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, $\beta < 1$ 時級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 發散。

(B) 是否有一種收斂「最慢」的級數?

對每個收斂的正項級數, 必存在一個比它收斂性更慢的級數。討論如下: 假設 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 記 $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 表示級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 n-階餘項 (n-th remainder), 由此建構 $b_n = \sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}$, 則可證明級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收斂, 而對應到的餘項 $r'_n = \sqrt{r_n} \to 0$ 當 $n \to \infty$, 而且因爲

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{r_{n-1} - r_n}{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}} = \sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n} \to 0 \text{ 當 } n \to \infty,$$

所以級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的收斂性比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 還要慢。

■ 對照影片 8.3 – 16 學習。

定理 12 (阿貝爾判別法, Abel's Test). 若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調有界, 則無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂。

證明: 因爲數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 故存在 $M > 0$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|b_n| \leq M$。因爲級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 所以對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $m > n \geq N$ 都有 $|A_{m,n+1}| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$, 利用阿貝爾變換 (Abel transformation), 得到

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| &= \left|A_{m,n+1} b_m + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_{k,n+1}(b_k - b_{k+1})\right| \leq |A_{m,n+1}||b_m| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |A_{k,n+1}||b_k - b_{k+1}| \\
&< M\varepsilon + \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}|\varepsilon = M\varepsilon + \varepsilon|b_{n+1} - b_m| \\
&\leq M\varepsilon + \varepsilon(|b_{n+1}| + |b_m|) < 3M\varepsilon,
\end{aligned}$$

注意到上述估計有用到 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是單調這個條件, 所以才會有 $\sum_{k=n+1}^{m-1} |a_k - a_{k+1}| = |a_{n+1} - a_m|$。由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂。 □

■ 對照影片 8.3 – 17 學習。

定理 13 (狄立克萊判別法, Dirichlet's Test). 若部份和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 有界, 數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調趨近於零, 則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂。

證明: 因爲 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $|b_n| < \varepsilon$。

因爲部份和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 有界, 所以存在 $M > 0$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq M$。令 $A_{m,n+1} = \sum_{k=n+1}^{m} b_k$, 則 $|A_{m,n+1}| = \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{m} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq 2M$。利用阿貝爾變換 (Abel transformation), 得到

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| &= \left|A_{m,n+1} b_m + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_{k,n+1}(b_k - b_{k+1})\right| \leq |A_{m,n+1}||b_m| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |A_{k,n+1}||b_k - b_{k+1}| \\
&\leq 2M \cdot \varepsilon + 2M \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| = \varepsilon \cdot 2M + 2M|b_{n+1} - b_m| \\
&\leq \varepsilon \cdot 2M + 2M(|b_{n+1}| + |b_m|) < \varepsilon \cdot 2M + 2M(\varepsilon + \varepsilon) = 6M\varepsilon,
\end{aligned}$$

注意到上述估計有用到 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是單調這個條件, 所以才會有 $\sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| = |b_{n+1} - b_m|$。由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂。 □

■ 對照影片 8.3 – 18 學習。

例 **14.** 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調趨近於零, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 對任何 $x \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ 都收斂。當 $x = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$, 必須根據 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的性質進一步判定。

解.

■ 對照影片 8.3 – 19 學習。

例 **15.** 若數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調趨近於零, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 對任何 $x \in \mathbb{R}$ 都收斂。

解.

註. 傅立葉級數 (Fourier series) 的初步認識:

8.4 無窮級數的加法交換律與乘法分配律

■ 對照影片 8.4 – 01 學習

例 **1.** 考慮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$。

(A) 級數收斂。可用 _____ 或 _____ 判定。

(B) 考慮一種順序互換的方法: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$, 記 $s'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a'_k$,

■ 對照影片 8.4 – 02 學習

爲回答無窮級數的加法交換律與乘法結合律問題, 首先引進記號:

$$a_n^+ \overset{\text{定義}}{=\!=} \max(a_n, 0) = \frac{|a_n| + a_n}{2} \geq 0$$
$$a_n^- \overset{\text{定義}}{=\!=} \max(-a_n, 0) = \frac{|a_n| - a_n}{2} \geq 0,$$

在這樣的註記之下, 則有 $a_n = a_n^+ - a_n^-$ 以及 $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$。

給定級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 則會對應到兩個正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$。以無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 爲例, 則有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \frac{1}{1} + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 + \cdots$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \cdots。$$

■ 對照影片 8.4 – 03 與 04 學習

定理 2.

(A) 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂若且唯若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收斂。

(B) 若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 條件收斂, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都發散。若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 至少一個發散, 則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 發散, 至於 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收斂或發散無法下定論。

證明:

□

■ 對照影片 8.4 – 05 學習

定義 3. 給定級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 記 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一種 置換 (permutation), 稱級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 是級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一種 重排 (rearrangement) 或稱爲 更序級數。

以下定理表明絕對收斂的級數才有加法交換律, 而條件收斂的級數沒有加法交換律。

定理 4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的任何一種重排後的級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 都收斂, 並且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n。$$

證明: 首先證明當 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正項級數的情況。記更序級數的部份和數列爲 $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$, 其中 $t_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_{\sigma(n)}$ 是一個遞增數列, 並且對所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $t_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_{\sigma(n)} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 即 $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ 有上界, 於是由單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) 得知: 更序級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 收斂, 並且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n。$$

另一方面, 我們也可以將 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 看成是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 的一種更序級數, 所以有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$。將兩結果合併則得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。

現考慮 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是絕對收斂的級數, 由 **定理 2** 得知: 正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收斂, 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \quad \text{以及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-。$$

對於更序級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, 同樣也有對應的兩個正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-$, 由於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 的更序級數, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 的更序級數, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad \text{以及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$

於是

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-,$$

收斂, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 絕對收斂, 並且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。 □

■ 對照影片 8.4 – 06 學習

定理 5. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 條件收斂, 任給實數 $L \in \mathbb{R}$, 則存在一種重排後的級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 收斂至 L。

證明: 因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 條件收斂, 由 **定理 2** 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$ 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$。對於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 的部份和, 必存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ \leq L \leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+,$$

再依次計算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 的部份和, 必存在 $m_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- \leq L \leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1-1} a_k^-,$$

同理, 可找正整數 $n_2 > n_1$ 與 $m_2 > m_1$ 滿足

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- + \sum_{k=1}^{n_2-1} a_k^+ \leq L \leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1-1} a_k^- + \sum_{k=1}^{n_2} a_k^+$$

以及

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- + \sum_{k=1}^{n_2-1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_2} a_k^- \leq L \leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1-1} a_k^- + \sum_{k=1}^{n_2} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_2-1} a_k^-,$$

依此方法則可得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一個更序級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, 它的部份和介於 $L + a_{n_k}^+$ 與 $L - a_{m_k}^-$ 之間。由於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^+ = 0$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^- = 0$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L$。 □

■ 對照影片 8.4 – 07 學習

現在考慮兩個無窮級數的相乘。先從兩個有限項的級數 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 與 $\sum\limits_{k=1}^{m} b_k$ 看起, 此時將兩級數相乘後則爲 $a_i b_j$ 之和, 其中 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$。對於兩個收斂的無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 所有形如 $a_i b_j$, 其中 $i, j \in \mathbb{N}$ 的項有無限多個, 這裡先將它們排列成二維陣列的形式:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \cdots \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

然而, 由前面的討論知道: 級數一般來說並不滿足交換律, 所以若要將上述這些項加相的話也會出現排列順序的問題, 而且順序的選擇不僅影響級數和, 甚至會影響收斂性。在兩級數相乘的理論中, 具有應用價值的排列順序有以下兩種:

(1) 正方形法加總: 考慮 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$, 其中 $d_1 = a_1b_1, d_2 = a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1$, 而一般項可記爲

$$d_n = a_1b_n + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_n + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \cdots + a_nb_2 + a_nb_1,$$

此時部份和爲 $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)$, 正好爲兩部份和之相乘。

(2) 對角線法加總: 考慮 柯西乘積 (Cauchy product) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, 其中 $c_n = \sum\limits_{i+j=n+1} a_ib_j$。

■ 對照影片 8.4 – 08 學習

定理 6. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 收斂, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right)$。

證明: 分別記 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部份和數列爲 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, 級數和分別記爲 s 與 t, 而關於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 的部份和數列記爲 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$。因爲 $u_n = s_n \cdot t_n$, 而且 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n =$$

□

■ 對照影片 8.4 – 09 學習

例 **7.** 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的收斂性不見得可以保證柯西乘積 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收斂性。

解.

■ 對照影片 8.4 – 10 學習

定理 8. 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是絕對收斂的, 則將 $a_i b_j, i, j \in \mathbb{N}$ 按任意方式排列而成的級數也絕對收斂, 並且級數和等於 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right)$。

證明: 假設 $a_{i_1} b_{j_1}, a_{i_2} b_{j_2}, \ldots, a_{i_k} b_{j_k}, \ldots$ 是所有 $a_i b_j, i, j \in \mathbb{N}$ 的任何一種排列。對任意的 n, 取 $N = \max\limits_{1 \le k \le n} \{i_k, j_k\}$, 則

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{i_k} b_{j_k}| \le \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{N} |b_j|\right) \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\right),$$

得到 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{i_k} b_{j_k}|$ 的部份和是遞增有上界的數列, 因此 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ 絕對收斂。由 **定理 4** 得知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ 的任意更序級數也絕對收斂, 並且級數和不變。 □

所以 **定理 8** 表明絕對收斂級數滿足乘法對加法的分配律。