9

函數項級數

這一章所要研究的是一串永無止盡地排列的函數還有它形成的級數。相較於第 2 章的無窮數列與第 8 章的無窮級數理論, 現在要將變數以及函數的概念再與這些理論結合。爲闡述這個理論, 單元 9.1 先從函數列出發, 除了定義逐點收斂之外, 其實這一章最核心的概念會是均勻收斂的意義, 它將關係到這一章所有理論的建立, 於是單元 9.1 會仔細比較函數列逐點收斂與均勻收斂兩者的差異, 也會提供幾個均勻收斂的等價敘述以便驗證一個明確的函數列是否均勻收斂。到了單元 9.2 就會詳細論述若函數列具有均勻收斂的性質時在數學上的重要性; 大意上是說: 若函數列滿足均勻收斂, 那麼函數列的一般項所帶有的連續、可積分、可微分等性質會隨著極限的運算下能夠移植到取極限後的函數。

另一方面, 從第 8 章的理論知道: 無窮級數的定義是部份和數列取極限, 所以我們也可以類似地定義函數項級數就是函數列的部份和取極限。在這個想法下, 當初如何從數列過渡到級數的理論就可以設法逐一類比而建構, 而單元 9.3 就是要述說這方面的內容。

單元 9.4 要介紹一類很特別的函數項級數 — 冪級數, 由於冪級數可以看成是多項式與極限合併而成的產物, 基於多項式在四則運算還有微分與積分操作上的便利以及我們對於多項式的理解多於其它類型的初等函數, 冪級數得以建立出一套相當優質的理論。至於冪級數的一個最實質的應用可說是泰勒級數理論, 我們會在單元 9.5 提到: 若一個函數在想要研究的點附近可以重新改寫成冪級數的話, 那就可以藉由冪級數重新了解這個函數。至於什麼時候函數可以進行冪級數的改寫, 而它對應到哪一個冪級數, 還有函數與冪函數兩者相等的範圍爲何, 這些都是基本的數學問題, 需要逐一確定, 而這個故事的最終將引出光滑函數與解析函數之差異。

函數項級數理論的另一個應用是: 若一個函數的反導函數無法表示成初等函數的形式時, 這時退而求其次去了解反導函數的冪級數表示, 基於收斂性, 在設定誤差範圍下, 則可選取夠多的項以近似反導函數。此外, 函數項級數理論在常微分方程與偏微分方程中用途更爲廣泛, 這是因爲一個微分方程式的解通常無法得到明確的函數表示, 而冪級數與泰勒級數還有一個特性是: 愈前面的項掌有愈重要的資訊, 所以在物理學的分析上會經常使用此手法處理問題。

至於級數理論中, 傅立葉級數是另一個很重要的級數, 它是將一個函數設法用三角函數重新表達。因爲這一章主要是著重在冪級數與泰勒級數的理論, 只有在第 8 章的一小部份稍微介紹了傅立葉級數, 這裡只是想要說明的是: 傅立葉級數理論類比於冪級數理論來說, 至今也發展到一個很成熟的階段, 若各位日後遇到要用傅立葉級數去分析一些函數時, 應該自行去找相關的文獻理解, 甚至應該花一些時間好好比較這兩個理論的共通性與差異性。

9.1 均勻收斂

回想第 2 章我們介紹過無窮數列理論, 針對 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 這串永無止盡排列的數字研究其行爲, 然後到了第 8 章則進一步地探討無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 理論。現在我們想把這些數字 a_n 抽換成函數 $f_n(x)$, 這麼一來就形成 *函數列* (sequences of functions) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中對每個自然數 n, $f_n : I_n \to \mathbb{R}$ 是一個定義域爲某個區間 I_n 對應到實數 $\mathbb{R}$ 的函數。給定一組依序排列的函數, 我們感興趣的是它們享有同樣定義域的地方; 也就是說, 我們假設 $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = I$ 仍然是一個區間。所以之後爲了簡便起見, 我們就直接假設函數列是長成 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 的樣貌。

對於函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 給定 $x_0 \in I$, 則 $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個無窮數列, 於是我們可以問這個數列的收斂性, 若每一點都研究函數值的收斂性, 則有以下逐點收斂的定義:

定義 1. 給定函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 若對所有 $x \in I$, 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在, 將極限值記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\text{記}}{=} f(x)$, 此時稱函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上 *逐點收斂* (pointwise convergent) 到函數 $f(x)$。

若將逐點收斂這個概念用 ε-N 語言 (ε-N language) 描述, 則爲:

> 對所有 $x \in I$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都滿足 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$。

數學上感興趣的問題是: 對於 $n \in \mathbb{N}$, 若函數 $f_n(x)$ 具有一些好的性質, 比方說連續、可微分、可積分等性質, 那麼這些函數在逐點收斂的意義下得到的極限函數 $f(x)$ 是否也能繼承這些性質呢? 爲回答這個問題, 我們先研究以下幾個例子:

例 2. 在區間 $I = [0,1]$ 上考慮 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, 計算

$$f(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{若 } x = 1, \end{cases}$$

於是我們說函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I = [0,1]$ 上逐點收斂至 $f(x)$。注意到對所有 $n \in \mathbb{N}$, 函數 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 區間上是連續甚至是可微分的函數(在端點處只看單側連續與單側導數), 但是 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處並非左連續, 左導數 $f'_-(1)$ 也不存在。

例 3. 在區間 $I = (0,1)$ 上考慮 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x = \frac{p}{q}, \text{ 其中 } (p,q) = 1 \text{ 且 } q \leq n \\ 0 & \text{若 } x \text{ 是無理數, 或是 } x = \frac{p}{q}, \text{ 其中 } (p,q) = 1 \text{ 且 } q > n, \end{cases}$$

計算

$$f(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \text{ 是有理數} \\ 0 & \text{若 } x \text{ 是無理數}, \end{cases}$$

於是函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I = (0,1)$ 上逐點收斂至 $f(x)$。注意到對所有 $n \in \mathbb{N}$, 函數 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 區間上不連續點的個數只有有限個, 所以 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上是可積分的, 但是 $f(x)$ 是狄立克萊函數 (Dirichlet function), 它在 $(0,1)$ 上是不可積分的。

例 **4.** 在區間 $I=[0,1]$ 上考慮 $\{f_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$, 其中

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & \text{若 } 0\le x\le \frac{1}{n} \\ -n^2\left(x-\frac{1}{n}\right)+n & \text{若 } \frac{1}{n}<x\le\frac{2}{n} \\ 0 & \text{若 } \frac{2}{n}<x\le 1, \end{cases}$$

若觀察函數 $f_n(x)$ 的圖形, 它是在 $[0,\frac{2}{n}]$ 區間上長出一個高爲 n 單位的等腰三角形之兩邊, 而在 $[\frac{2}{n},1]$ 區間上函數取值爲零, 所以積分值可以直接以計算三角形面積的方法得到:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot n=\lim_{n\to\infty}1=1。$$

另一方面, 我們想計算 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, 現分以下情況討論:

- 若 $x=0$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$。
- 若 $x\in(0,1]$, 由阿基米德性質 (Archimedes Property) 得知: 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{N}<\frac{x}{2}$, 所以對所有 $n\ge N$ 都有 $\frac{1}{n}<\frac{x}{2}$, 即 $\frac{2}{n}<x$; 也就是說, 對於 $x\in(0,1]$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $n\ge N$ 都有 $f_n(x)=0$, 於是 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$。
- 由上討論得到在 $[0,1]$ 區間上 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$。

而這個例子告知:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\ne\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x;$$

也就是說: 極限與積分兩者互換之後的結果並不相等。

例 **5.** 在區間 $I=[0,1]$ 上考慮 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{n}x^n\}_{n=1}^{\infty}$, 計算

$$f(x)\overset{\text{定義}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,$$

於是函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=[0,1]$ 上逐點收斂至 $f(x)$。因爲對所有 $n\in\mathbb{N}$, 函數 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 區間上都是可微分函數, 而且 $f_n'(x)=x^{n-1}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\begin{cases} 0 & \text{若 } 0\le x<1 \\ 1 & \text{若 } x=1; \end{cases}$$

另一方面, 我們知道 $f'(x)=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)\ne f'(x)$。

現將前面討論的結果整理如下(以下標號 (A) 表示連續, (B) 表示積分, (C) 表示微分):

(A,C1) 在逐點收斂的意義下, 函數的連續性與可微分性不見得被保持。

(B1) 在逐點收斂的意義下, 可積分的性質不見得被保持。

(B2) 在逐點收斂的意義下, 積分與極限的運算先後順序互換下兩者算出來的值可能不同。

(C2) 在逐點收斂的意義下, 求導與極限的運算先後順序互換下兩者得到的結果可能不同。

上述的例子告訴我們: 逐點收斂的意義只是在描述每個點函數值各自的行爲, 基本上這樣的收斂性無法描述一些局部 (local) 或是整體 (global) 的現象。回想連續、可微分與可積分的定義, 其實它們都是在觀察或比較不同位置下函數值的差異, 所以一個函數列光是具有逐點收斂的話取極限後的函數不太可能會繼續保有這些性質。若從代數的角度看這個問題, 則是在說: 定義在區間 I 上某些類型的函數空間(像是連續函數所成的集合、可微分函數所成的集合或是可積分函數所成的集合等) 在逐點收斂的意義下不具有封閉性。

這一節的目標是想要找到一個機制以及找到可以確定這個機制成立的判別法使得函數列本身具有的性質經過取極限之後仍然可以保持。以下討論的區間 I 除了某些定理會明確指出區間的屬性外, 其它的情況並不設限它是開區間或是閉區間或是開閉區間, 甚至有界或是無限的區間皆可。

定義 6. 考慮函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 若有一個函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 滿足

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及 $n \geq N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

則稱函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上 *均勻收斂* (uniformly convergent) 至 $f(x)$。

首先注意到: 如果函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上均勻收斂到 $f(x)$, 那麼 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上一定是逐點收斂到 $f(x)$。也就是說, 給定 $x_0 \in I$, 則 $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ 形成一個在實數 $\mathbb{R}$ 上的數列, 而均勻收斂的條件告知極限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ 存在, 由極限的唯一性告知: 這個極限值與就是逐點收斂的函數值 $f(x_0)$。而這個討論也說明了逐點收斂是均勻收斂的必要條件; 反過來說, 均勻收斂是一種比逐點收斂要求更多的一個條件。

那到底均勻收斂與逐點收斂的差異在哪裡呢? 這裡我們把兩個定義同時列出來比較:

(A) 逐點收斂: 對所有 $x \in I$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都滿足 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$。

(B) 均勻收斂: 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及 $n \geq N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$。

兩相對照下便很快發現: 逐點收斂是在研究每一個點各自的行爲, 當我們把想要研究的點 x 先抓出來, 逐點收斂就是單純地問函數值 $f_n(x)$ 隨著 n 變化之下與 $f(x)$ 的差距, 所以滿足 $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ 這個不等式的機制 N 不僅和 ε 有關, 也和位置 x 有關, 於是逐點收斂的定義當中, 特別用 $N = N(\varepsilon, x)$ 強調這個自然數的存在是依賴於 ε 與 x。而均勻收斂要呈現的是: 給了 $\varepsilon > 0$ 之後, 目標也是在研究 $f_n(x)$ 與 $f(x)$ 的差距, 但此時希望能夠找到一體適用的 N, 所謂一體適用, 指的是這個 N 一旦選定之後, 它適用於所有的 $x \in I$ 與所有的 $n \geq N$ 都滿足 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$。

想必各位曾在體育課或競賽中比過百米賽跑, 比賽前大家在起跑線的地方就定位, 當哨音響起所有人奮力向前衝到目的地。我小時候是個體育白痴, 體育老師介紹了很多跑步的要領, 但是我那時候要嘛聽不懂又或者學不會, 所以不管怎麼跑都跑不快, 印象中那次的比賽我是六個人當中最後一個跑到終點。這場百米賽跑, 每個人都依自己的能力向前跑, 這就像逐點收斂的情況一樣, 所有人都會到終點, 只是體育細胞很好的人一下就衝到終點; 但是我跑不快, 需要花比較多的時間才能抵達終點。

那什麼樣的情況可類比於均勻收斂的百米賽跑呢? 這個百米賽跑是一個「六人七腳」的比賽, 當六個人排成一列時, 相鄰兩人的左、右腳必須綁起來之後再開始跑, 這時你就會發現到: 這樣的百米賽跑就不能自顧自地跑, 這六個人彼此受到牽制, 若你自己一人跑太快整隊就會跌倒, 反之你若跑得太慢也無法順利前行。而這六個人必須擬定作戰計畫, 可能需要推派一人當領隊, 然後在比賽的時候喊出指令約定每個人的出腳順序; 除此以外, 還要顧慮到每個人的步伐大小, 每次跨步的差異也不能太大, 在這樣的情況下才有可能全隊順利到達目的地。而在六人七腳的百米賽跑下, 所有人到達終點會有一致性。

現在回到數學層面, 我們以實例討論何謂均勻收斂。

例 **7.** 試論函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ 在 $I=\mathbb{R}$ 上是否均勻收斂。

解. 首先觀察 $f(x)\overset{\text{定義}}{=\!=}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 的結果:

- <u>若 $x=0$</u>, 則 $f_n(0)=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$。
- <u>若 $x\neq 0$</u>, 因爲

$$0\leq\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\leq\frac{|x|}{n^2|x|^2}=\frac{1}{n^2|x|}$$

  而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2|x|}=0$, 由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}=0$。
- 由上述討論得知 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\equiv 0$; 也就是說, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐點收斂到 $f(x)=0$。

以下要探討這個函數列是否均勻收斂。在 $x=0$ 的地方, 因爲 $f_n(0)=f(0)=0$, 所以這一點對所有 $n\in\mathbb{N}$ 都滿足 $|f_n(0)-f(0)|<\varepsilon$ 這個不等式。至於 $x\neq 0$ 處, 利用算幾不等式 (Arithmetic-Geometric Mean Inequality) 可得以下估計:

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}-0\right|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\leq\frac{|x|}{2\sqrt{1\cdot n^2x^2}}=\frac{|x|}{2n|x|}=\frac{1}{2n},$$

所以對任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=[\![\frac{1}{2\varepsilon}]\!]+1$, 則對所有 $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ 以及所有 $n\geq N$, 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{2n}<\varepsilon$。將上述兩結果整合得到 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{R}$ 上均勻收斂至 $f(x)=0$。

至於什麼樣的函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 逐點收斂到 $f(x)$ 但不是均勻收斂到 $f(x)$ 呢? 這裡我們將它對應到的數學語句寫出來: 若函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 不是均勻收斂到 $f(x)$, 那麼就是說

「對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $x\in I$ 以及 $n\geq N$ 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$。」<u>不成立</u>
$\Leftrightarrow$「存在 $\varepsilon_0>0$, 對任意 $N\in\mathbb{N}$, 存在 $x_0\in I$ 以及 $n_0\geq N$ 使得 $|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0$。」<u>成立</u>。

這裡注意到: 我們寫出上面的語句時, 函數 $f(x)$ 是來自於固定 $x\in I$ 之下 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 所以如果從跑步的概念去想像這個概念時, 則是說: 每個人終究會與終點線愈來愈近, 但是這種靠近的概念無法用一個 N 一次去說明這個現象, 它會因人而異, 每個階段總是可以看到有人會有脫隊或脫序的情況。

例 **8.** 試論函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$ 在 $I=[0,1]$ 上是否均勻收斂。

解. 首先算出逐點收斂的函數:

$$f(x)\overset{\text{定義}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2nx}{1+n^2x^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}x^2}=\frac{0}{0+x^2}=0。$$

以下討論均勻收斂的可能性。對任何 $n\in\mathbb{N}$, 計算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_n(x)-f(x))=f_n'(x)=\frac{(1+n^2x^2)2n-2nx\cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}=\frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2},$$

解 $(f_n(x)-f(x))'=0$ 得到 $x=\frac{1}{n}\in[0,1]$, 所以 $f_n(x)-f(x)$ 在區間 $I=[0,1]$ 上有一個臨界點 $x=\frac{1}{n}$。因爲 $f_n(0)-f(0)=0, f_n(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n})=1, f_n(1)-f(1)=\frac{2n}{1+n^2}=1-\frac{(n-1)^2}{1+n^2}<1$, 所以 $f_n(x)-f(x)$ 在 $x=\frac{1}{n}$ 處有最大值 1。

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$, 對任何 $N\in\mathbb{N}$, 取 $x_0=\frac{1}{N}$ 與 $n_0=N$, 那麼 $|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|=1\geq\frac{1}{2}$, 所以函數列 $\{f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=[0,1]$ 上並非均勻收斂到 $f(x)$。

給定一個函數列, 要如何判定它是否均勻收斂呢? 以下給出第一個充分必要條件。

定理 **9.** 假設函數列 $\{f_n:I\to\mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上逐點收斂至 $f(x)$, 記

$$\|f_n-f\|_\infty\overset{\text{定義}}{=\!=}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|,$$

則函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上均勻收斂至 $f(x)$ 的充分必要條件是

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0。$$

證明: $(\Rightarrow)$ 因爲函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上均勻收斂至 $f(x)$, 則對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$ 使得對所有 $x\in I$ 以及 $n\geq N$ 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, 所以對所有 $n\geq N$ 都有 $\|f_n-f\|_\infty\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$。
$(\Leftarrow)$ 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$ 的定義知: 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$ 使得對所有 $n\geq N$ 都有 $\|f_n-f\|_\infty=\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 由上確界的定義知道對所有 $x\in I$ 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 所以 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上均勻收斂至 $f(x)$。 □

當我們仔細觀察 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$ 這個條件, 在尚未取極限之前, $\|f_n-f\|_\infty$ 想要說明的是: 在固定了 n 之下 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 之間差距的上確界(若 $f_n(x)$ 與 $f(x)$ 都是連續的話, 則上確界可理解成最大值); 也就是說, 它是在尋找哪一個地方離終點線最遠, 而最遠的距離又是多少, 只要對它有所約束, 那麼整體就有一個控制。若用百米賽跑的比喻去想它, 則是在觀察那位跑得最慢的人, 當你研究跑得最慢的人靠近終點的程度, 因爲其他人離終點更近, 所以這就是一個對於所有跑百米賽跑的人抵達終點的現象有一個整體的描述。

而這個檢驗法的特色在於它把均勻收斂當中對所有 $x\in I$ 以及對所有 $n\geq N$ 這種雙重約束條件轉換成先對 $x\in I$ 討論, 再看 $n\to\infty$ 的結果。但它的缺點在於: 這個判別法與均勻收斂的定義一樣, 你必須先知道逐點收斂的函數 $f(x)$ 是什麼, 才有辦法對此檢驗。有的時候(到下一節討論函數項級數時) 可能無法將收斂函數的明確表達式寫出, 那麼這個等價敘述在實作層面就難以派上用場。

現舉例說明用均勻收斂之充要條件來驗證函數列的均勻收斂性。

例 **10.** 試論函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$ 在 $I=(0,1)$ 上是否均勻收斂。

解. 首先計算對所有 $x\in(0,1)$,

$$f(x)\overset{\text{定義}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx+1}=0,$$

所以函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=(0,1)$ 上逐點收斂至 $f(x)\equiv 0$。

再討論固定 $n\in\mathbb{N}$, 計算

$$\|f_n-f\|_\infty=\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{1}{nx+1}\right|=\sup_{x\in(0,1)}\frac{1}{nx+1}=1,$$

最後一個等式成立是因爲

- 對所有 $x\in(0,1)$, $\frac{1}{nx+1}<1$, 所以 1 是一個上界。
- 對任意 $M\in\mathbb{R}, M<1$, 記 $M=\frac{1}{q}$ 其中 $q\in\mathbb{R}, q>1$, 取 $x=\frac{q-1}{2n}$, 則

$$\frac{1}{nx+1}=\frac{1}{n\cdot\frac{q-1}{2n}+1}=\frac{1}{\frac{q-1}{2}+1}=\frac{1}{\frac{q+1}{2}}=\frac{2}{q+1}>\frac{2}{q+q}=\frac{1}{q}=M,$$

所以 M 不再是上界。

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=1\neq 0$, 所以 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(0,1)$ 上不均勻收斂。

這裡我們比較一下 例 **8** 與 例 **10**, 實際上兩者的討論過程都是用到 定理 **9** 的概念。而這裡應指出的是: 例 **8** 是在有界閉區間 $I=[0,1]$ 上討論函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的均勻收斂性, 因爲對所有 $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ 以及 $f(x)$ 在區間 $I=[0,1]$ 上都是連續函數, 所以

$$\|f_n-f\|_\infty=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=\max_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|;$$

也就是說, 我們利用了第 4 章介紹過的有界閉區間上的連續函數的極值定理, 先確定 $|f_n(x)-f(x)|$ 在 $[0,1]$ 的上確界與最大值一致, 然後再用微積分學過的尋求最大值的方法找到極值。

但是 例 **10** 是在開區間 $I=(0,1)$ 上討論函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的均勻收斂性, 區間並非有界閉區間, 所以無法使用極值定理的方式處理, 甚至上述的討論中得到 $\|f_n-f\|_\infty=\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=1$ 這個上確界是存在的, 但是它不會是函數 $|f_n(x)-f(x)|$ 在某一點的最大值, 所以關於 例 **10** 是透過上確界的定義進行論述。

由上面的討論, 我們知道: 雖然 定理 **9** 提供了一個均勻收斂的充分必要條件, 但是在執行上也可能還是有難點; 也就是說, 這個判別法必須先明確知道逐點收斂的函數才能繼續判斷函數列是否均勻收斂。現在的問題是: 我們有沒有辦在不知道收斂的函數之下就可以判讀函數列是否均勻收斂呢? 如果各位在之前的章節對極限的概念有些了解的話, 應該就能聯想到柯西收斂準則會是一個方法, 所以在現在的情況下, 是不是可以寫出函數列均勻收斂的柯西收斂準則呢? 以下定理就是要說明這個結果。

定理 11 (均勻柯西收斂準則, Uniform Cauchy Convergence Criterion). 定義在在區間 I 上的函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂之等價敘述爲:

> 對任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及對所有 $m > n \geq N$ 都有 $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$。

證明: ($\Rightarrow$) 假設 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂至 $f(x)$, 則對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$ 使得對所有 $m > n \geq N$, 都有

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{以及} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

於是

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon。$$

($\Leftarrow$) 已知對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$ 使得對所有 $x \in I$ 以及所有 $m > n \geq N$ 都有 $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 則對所有 $x \in I$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個柯西數列, 所以由實數的完備性得知: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 存在。至此說明了函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 逐點收斂至函數 $f(x)$。

現在要證明 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂到 $f(x)$。給定 $\varepsilon > 0$, 從上段的討論已經確定了 $N = N(\varepsilon)$, 現考慮 $n \geq N$, 對於 $x \in I$, 找 $N_1 \in \mathbb{N}$ 且 $N_1 > N$ 使得當 $m \geq N_1$ 時, $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$。所以

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

注意到上述討論的 $N_1 = N_1(\varepsilon, x)$ 和 x 有關, 但是原先選定好的 $N = N(\varepsilon)$ 這個量是與 x 無關的, 所以函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上均勻收斂。 □

這個等價敘述和以往柯西收斂準則的原理一樣, 我們不需要知道極限函數 $f(x)$ 是什麼, 直接從函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 之間的關係就可以確定函數列是否均勻收斂, 但是要驗證 $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ 這個不等式的時候, 多了一個 m 的任意性需要控制, 所以必須更加仔細思量如何估計才能讓不等式成立。

例 **12.** 試論函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $f_n(x) = \frac{n+x^2}{nx}$ 在 $I = (0,1)$ 上是否均勻收斂。

解. 對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1$, 則對所有 $m > n \geq N$, 都有

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= \left|\frac{m+x^2}{mx} - \frac{n+x^2}{nx}\right| = \left|\frac{1}{x} + \frac{x}{m} - \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{n}\right)\right| = \left|\frac{x}{m} - \frac{x}{n}\right| \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)x < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

因此函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I = (0,1)$ 上均勻收斂。

爲了要達到均勻柯西收斂準則的條件, 在進行估計 $|f_m(x) - f_n(x)|$ 的時候, 必須想辦法用一個和 x 無關的量估計, 而且 m 也要換成只和 n 相關的量控制, 像上面的例子得到的是 $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n}$, 如此一來才有辦法證明均勻收斂。

9.2 均勻收斂的性質

這一節的主要目的是要逐一回答函數列的一些性質(例如連續性、可積性、可微性等) 如何經由均勻收斂的特性之下將這些性質過渡到取極限之後的函數。

定理 1. 若函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 對於所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $x = x_0 \in I$ 處連續, 而且 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上均勻收斂至 $f(x)$, 則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續。

證明: 對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂至 $f(x)$, 所以存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及所有 $n \geq N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$。因爲 $f_N(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續, 所以存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $x \in I, |x - x_0| < \delta$ 都有 $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, 於是對所有 $x \in I, |x - x_0| < \delta$ 都有

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續。 □

關於 **定理 1**, 這裡再對它進行另一個面向的解釋。我們知道: 函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續表示 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 所以我們把定理的結論寫下數學式, 則爲

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x),$$

於是這個定理是在描述兩個極限交換的可行性。兩個與極限或無窮有關的操作之交換性其實是數學分析研究的主要課題, 又或者說, 數學分析主要是在探討將「極限」這個概念放進數學主體的時候, 所有數學的結構必須重新建立, 這當中的一個環節就像現在欲研究的問題: 在什麼情況下兩個極限的操作順序互換下等式成立。

定理 2. 若函數列 $\{f_n : I = [a, b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可積分的, 而且 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I = [a, b]$ 上均勻收斂至 $f(x)$, 則 $f(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上也是可積分的, 並且對所有 $x \in I = [a, b]$ 都有

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\lim_{n \to \infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t。$$

證明: 對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂至 $f(x)$, 所以存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 與所有 $n \geq N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, 由此得到

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

因爲 $f_N(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可積分的, 由黎曼可積的第三充分必要條件得知: 存在分割 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_{f_N}^i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$, 其中

$$\omega_{f_N}^i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f_N(x) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f_N(x) \quad \text{以及} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

由於

$$\begin{aligned}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} &\le \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \le \sup_{[x_{i-1},x_i]} f_N(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \\ \inf_{[x_{i-1},x_i]} f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} &\le \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \le \inf_{[x_{i-1},x_i]} f_N(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)},\end{aligned}$$

所以對所有 $i = 1, 2, \ldots, m$ 都有 $\omega_f^i \le \omega_{f_N}^i + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, 因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \omega_f^i \Delta x_i &< \sum_{i=1}^m \left(\omega_{f_N}^i + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \omega_{f_N}^i \Delta x_i + \sum_{i=1}^m 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \Delta x_i \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon,\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可積分的。此外, 對所有 $x \in [a, b]$, 我們計算

$$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon(x-a)}{3(b-a)} < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t。$$

□

這個定理是在說明: 當函數列具有均勻收斂的性質時, 可積分的性質可經由極限過渡至極限函數, 而且定積分的值也可以透過均勻收斂的特性下過渡至取極限後的函數之定積分。此外, 由代數操作的觀點來看, 定理最後的結論是告知: 在均勻收斂的情況下, 極限與積分的操作先後順序可以交換。

最後, 我們要回答函數列的均勻收斂性質和求導之間的關係。

定理 3. 若函數列 $\{f_n : I = [a, b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^\infty$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 導函數皆連續, 而 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $I = [a, b]$ 上逐點收斂到 $f(x)$, $\{f_n'(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $I = [a, b]$ 上均勻收斂到 $g(x)$, 則

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = f'(x),$$

而且 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $I = [a, b]$ 上均勻收斂到 $f(x)$。

證明: 因爲 $\{f_n'(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $I = [a, b]$ 上均勻收斂至 $g(x)$, 而且對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n'(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上連續, 由 **定理 1** 得知 $g(x)$ 連續, 又由 **定理 2** 知道

$$\begin{aligned}G(x) &= \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n'(t)\right)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) \\ &= f(x) - f(a),\end{aligned}$$

因爲 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 所以由微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus) 得知 $G(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可微分的, 而且 $G'(x) = g(x) = f'(x)$。

以下要證明 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=[a,b]$ 上均勻收斂到 $f(x)$。給定任意 $\varepsilon>0$, 因爲 $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂到 $f(a)$, 所以存在 $N_1\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $n\geq N_1$ 都有 $|f_n(a)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$, 又 $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=[a,b]$ 上均勻收斂到 $f'(x)$, 所以存在 $N_2\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $x\in I$ 以及 $n\geq N_2$ 都有 $|f_n'(x)-f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$。現取 $N=\max(N_1,N_2)$, 則對所有 $x\in I$ 以及 $n\geq N$, 因爲 $f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$, 所以

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)| &= \left|f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t-\left(f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\right|\\ &= \left|(f_n(a)-f(a))+\int_a^x (f_n'(t)-f'(t))\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq |f_n(a)-f(a)|+\int_a^x |f_n'(t)-f'(t)|\,\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon(x-a)}{2(b-a)}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。\end{aligned}$$

因此 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $I=[a,b]$ 上均勻收斂到 $f(x)$。 □

這個定理欲說明在函數列具有均勻收斂的性質下, 極限與求導兩個操作順序可以交換。

證明完這三個定理之後, 各位可以發現均勻收斂的重要性, 函數列必須要有均勻收斂的性質時, 原本函數列所具有的連續性、可積分性或是可微分性才能經由取極限之下過渡到極限函數。

9.3 函數項級數

前兩節介紹的是函數列 $\{f_n : I\to\mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 與均勻收斂之間的關係, 現在要考慮更複雜的情況, 也就是探討 *函數項級數* (series of functions) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$。這裡應先解釋符號的意義: 對每個 $x_0\in I$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 是一個無窮級數, 我們可從第 8 章無窮級數理論先行驗證無窮級數的收斂性。若將無窮級數收斂的點收集起來, 便形成函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的定義域, 這個函數項級數的定義域會是區間 I 的一個子集合, 不過這裡不妨假設函數項級數對所有區間 I 上的點都收斂, 然後繼續研究之後的問題。

從級數的理論知道, 函數項級數的本質是在觀察函數項級數的部份和函數列之收斂性, 現將函數項級數的部份和記爲 $s_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$。這一節的目的是想要將前兩節有關函數列的理論套用到函數項級數的部份和函數列 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$。以下便將所有設定進行改寫。

定義 1. 給定函數列 $\{f_n : I\to\mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 記 $s_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$,

(A) 若對所有 $x\in I$, 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$ 存在, 稱函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上 *逐點收斂* (pointwise convergent) 到 $s(x)$。

(B) 若 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂到 $s(x)$, 稱級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上 *均勻收斂* (uniformly convergent) 到 $s(x)$。

同樣地, 我們首先要問的問題是: 給了一個函數項級數, 該如何判斷它只是一般的逐點收斂還是說它具有更好的均勻收斂之性質? 基於對函數列均勻收斂的認識, 我們可以先得到一個函數項級數均勻收斂的判別法。

定理 2 (均勻柯西收斂準則, Uniform Cauchy Convergence Criterion). 函數項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂的充分必要條件是:

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及所有 $m > n \geq N$ 都有

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon。$$

證明: ($\Rightarrow$) 記函數項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的部份和爲 $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$。假設 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂至 $s(x)$, 則對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$ 使得對所有 $m > n \geq N(\varepsilon)$, 都有

$$|s_m(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad 以及 \quad |s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

於是

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leq |s_m(x) - s(x)| + |s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon。$$

($\Leftarrow$) 已知對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$ 使得對所有 $x \in I$ 以及 $m > n \geq N$ 都有 $|s_m(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$。對所有 $x \in I$, 則 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個柯西數列, 所以由實數的完備性得知: $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ 存在。至此說明了部份和 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 逐點收斂至函數 $s(x)$。

現在要證明 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂到 $s(x)$。給定 $\varepsilon > 0$, 從上段的討論已經確定了 $N = N(\varepsilon)$, 現考慮 $n \geq N$, 對於 $x \in I$, 找 $N_1 \in \mathbb{N}$ 且 $N_1 > N$ 使得當 $m \geq N_1$ 時, $|s_m(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$。所以

$$\begin{aligned} |s_n(x) - s(x)| &= |s_n(x) - s_m(x) + s_m(x) - s(x)| \\ &\leq |s_n(x) - s_m(x)| + |s_m(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

因此部份和 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上均勻收斂; 換言之, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂。 □

由均勻柯西收斂準則繼續延伸, 那麼可以得到一個實用性更高的級數均勻收斂判別法。

定理 3 (魏爾斯特拉斯 M-判別法, Weierstrass M-Test). 考慮函數項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 假設存在一個無窮數列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得對所有 $x \in I$ 與 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|f_n(x)| \leq M_n$。如果級數 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收斂, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂。

證明: 因爲 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收斂, 對任意 $\varepsilon > 0$, 由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知: 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對任何 $m > n \geq N$ 都有 $\sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$, 於是對所有 $x \in I$, 都有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon,$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂。 □

這裡我們觀察並說明魏爾斯特拉斯 M-判別法的特色還有實用性: 原本要處理的是與 n 和 x 都有關的函數項級數有沒有均勻收斂的性質, 假如對每一個函數 $f_n(x)$ 都可以用一個數字 M_n 控制, 這個控制量是只與 n 有關的數, 那麼我們對於這個數列而形成的無窮級數探討其收斂性, 只要無窮級數收斂, 那麼函數項級數是均勻收斂的。

也因爲這樣的緣故, 在第 8 章介紹那麼多級數收斂判別法的用意也就在於它是判斷函數項級數均勻收斂的一個很好的應用。

例 **4.** 試就 p 值, 其中 $p>0$, 討論函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^p \mathrm{e}^{-nx}$ 在 $I=(0,\infty)$ 上是否均勻收斂。

解. 令 $f_n(x)=x^p\mathrm{e}^{-nx}$, 計算

$$f_n'(x)=px^{p-1}\mathrm{e}^{-nx}-nx^p\mathrm{e}^{-nx}=(p-nx)x^{p-1}\mathrm{e}^{-nx},$$

解 $f_n'(x)=0$ 得到 $x=\frac{p}{n}$ 是函數 $f_n(x)$ 在區間 $I=(0,\infty)$ 上唯一的臨界點。因爲當 $x\in(0,\frac{p}{n})$, $f_n'(x)>0$; 當 $x\in(\frac{p}{n},\infty)$, $f_n'(x)<0$, 所以函數 $f_n(x)$ 在 $x=\frac{p}{n}$ 處達到局部極大值(事實上它是達到最大值), 又對所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $f_n(x)>0$, 於是對所有 $x\in(0,\infty)$, 都有

$$|f_n(x)|=f_n(x)\le f_n\left(\frac{p}{n}\right)=\left(\frac{p}{n}\right)^p\mathrm{e}^{-p}=\frac{p^p\mathrm{e}^{-p}}{n^p}。$$

記 $M_n=\frac{p^p\mathrm{e}^{-p}}{n^p}$。

(A) <u>若 $p>1$</u>, 因爲級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p^p\mathrm{e}^{-p}}{n^p}$ 收斂, 由魏爾斯特拉斯 M-判別法 (Weierstrass M-test) 得知: 函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^p\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $p>1$ 時均勻收斂。

(B) <u>若 $0<p\le 1$</u>, 取 $\varepsilon_0=\mathrm{e}^{-2}>0$, 對任意 $N\in\mathbb{N}$, 取 $x=\frac{1}{N}, n=N, m=2n=2N$, 則

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} x^p\mathrm{e}^{-kx}\bigg|_{x=\frac{1}{N}} &= \sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{N^p}\mathrm{e}^{-\frac{k}{N}}=\frac{1}{N^p}\sum_{k=N+1}^{2N}\mathrm{e}^{-\frac{k}{N}}\ge\frac{1}{N^p}\sum_{k=N+1}^{2N}\mathrm{e}^{-2}\\ &=\frac{1}{N^p}\cdot N\cdot\mathrm{e}^{-2}=N^{1-p}\cdot\mathrm{e}^{-2}\ge\mathrm{e}^{-2}=\varepsilon_0,\end{aligned}$$

所以函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^p\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $0<p\le 1$ 不是均勻收斂的。

雖然魏爾斯特拉斯 M-判別法是說: 假如控制函數的數列所形成的級數收斂, 那麼函數項級數均勻收斂; 如果控制函數的數列所對應的級數發散, 則無法下結論。這是因爲你有可能做了一個過於粗糙的估計。不過就上面的例子來說, 因爲我們把每一個函數的最大值求出並且記爲 M_n, 所以它是一個最佳的控制, 這時就可以根據等級的原理, 因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p^p\mathrm{e}^{-p}}{n^p}$ 在 $0<p\le 1$ 的時候發散, 所以可以預判函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^p\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $0<p\le 1$ 不是均勻收斂的, 最後利用精確定義的方式論述。

級數理論中曾經介紹了阿貝爾判別法 (Abel's Test) 與狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test), 現將這兩個判別法稍加修飾, 就可以用來證明函數項級數均勻收斂的性質。

定理 5 (阿貝爾判別法, Abel's Test)**.** 若有函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{g_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 均勻收斂,

(B) 對所有 $x \in I$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是單調且均勻有界; 也就是說, 存在 $M > 0$ 使得對所有 $x \in I$ 以及 $n \in \mathbb{N}$ 都滿足 $|g_n(x)| \leq M$。

則函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。

證明: 因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 均勻收斂, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及所有 $m > n \geq N$ 都有

$$|F_{m,n+1}(x)| \overset{\text{記}}{=} \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon。$$

再從阿貝爾變換 (Abel Transformation) 得到

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)g_k(x) \right| &= \left| F_{m,n+1}(x)g_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} F_{k,n+1}(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \right| \\
&\leq |F_{m,n+1}(x)||g_m(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |F_{k,n+1}(x)||g_k(x) - g_{k+1}(x)| \\
&\leq \varepsilon(|g_m(x)| + |g_{n+1}(x)| + |g_m(x)|) \leq 3M\varepsilon,
\end{aligned}$$

所以由均勻柯西收斂準則 (Uniform Cauchy Convergence Criterion) 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。 □

定理 6 (狄立克萊判別法, Dirichlet's Test)**.** 若有函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{g_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足

(A) 存在 $M > 0$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $x \in I$ 都有 $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq M$,

(B) 對所有 $x \in I$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 單調, 並且 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂至 $g(x) = 0$;

則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。

證明: 因爲 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂至 $g(x) = 0$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 與 $n \geq N$ 都有 $|g_n(x)| < \varepsilon$。此外, 對所有 $m > n \geq N$, 都有

$$|F_{m,n+1}(x)| \overset{\text{記}}{=} \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq 2M,$$

由阿貝爾變換 (Abel Transformation) 得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)g_k(x)\right| &= \left|F_{m,n+1}(x)g_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} F_{k,n+1}(x)(g_k(x)-g_{k+1}(x))\right| \\ &\le |F_{m,n+1}(x)||g_m(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |F_{k,n+1}(x)||g_k(x)-g_{k+1}(x)| \\ &\le 2M(|g_m(x)|+|g_{n+1}(x)|+|g_m(x)|) < 6M\varepsilon,\end{aligned}$$

故由均勻柯西收斂準則 (Uniform Cauchy Convergence Criterion) 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ 在 I 上均勻收斂。 □

例 **7.** 試證以下兩個結果:

(A) 假設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調收斂至 0, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $(0,2\pi)$ 內部的任何一個閉區間上均勻收斂。

(B) 假設 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調收斂至 0, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 在 $(0,2\pi)$ 內部的任何一個閉區間上均勻收斂。

解.

(A) 關於數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 也可以視爲是常數函數列, 它單調收斂至 0, 對任意 $0<\delta<\pi$, 當 $x\in[\delta,2\pi-\delta]$ 時,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$ 在區間 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上均勻收斂。

(B) 關於數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 也可以視爲是常數函數列, 它單調收斂至 0, 對任意 $0<\delta<\pi$, 當 $x\in[\delta,2\pi-\delta]$ 時,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| = \frac{\left|\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$ 在區間 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上均勻收斂。

我們在單元 8.3 曾經簡單地說明傅立葉級數 (Fourier Series) 的精神, 傅立葉級數理論是希望將函數 $f(x)$ 重新表示成三角函數的級數和之形式。而上述的討論告知: 若三角級數的係數遞減趨近於零, 則函數在遠離 $2m\pi, m\in\mathbb{Z}$ 這些點的閉區間上均勻收斂, 於是我們可以對於函數在遠離 $2m\pi, m\in\mathbb{Z}$ 的地方, 可利用三角函數重新認識一般的函數。

至於我們可以從均勻收斂的過程中認識到什麼東西? 現將上一節討論的均勻收斂之性質套用到函數項級數的部份和, 則得到以下三個重要的定理, 這三個定理是很一般的結果, 當然也適用於上面討論的傅立葉級數的情況。

定理 8. 給定函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $x = x_0$ 處皆連續, 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上均勻收斂至 $s(x)$, 則 $s(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續。

證明: 記函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的部份和爲 $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$。對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $s_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂至 $s(x)$, 所以存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 與 $n \geq N$ 都有 $|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$。因爲對於 $k = 1, 2, \ldots, N$, 函數 $f_k(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續, 所以 $s_N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} f_k(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續, 所以存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $x \in I, |x - x_0| < \delta$ 都有 $|s_N(x) - s_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, 這麼一來, 對所有 $x \in I, |x - x_0| < \delta$ 都有

$$|s(x) - s(x_0)| \leq |s(x) - s_N(x)| + |s_N(x) - s_N(x_0)| + |s_N(x_0) - s(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

因此 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續。 □

定理 9 (逐項積分定理, Term-by-Term Integration)**.** 給定函數列 $\{f_n : I = [a, b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可積分的, 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上均勻收斂至 $s(x)$, 則 $s(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上也是可積分的。此外, 對所有 $x \in [a, b]$, 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t。$$

證明: 記函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的部份和爲 $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$。對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $s_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂至 $s(x)$, 所以存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 與 $n \geq N$ 都有 $|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, 由此得到

$$s_n(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < s(x) < s_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

因爲對於 $k = 1, 2, \ldots, N$, $f_k(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可積分的, 所以 $s_N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} f_k(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上也是可積分的, 於是存在分割 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_{s_N}^i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$, 所以

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_s^i \Delta x_i < \sum_{i=1}^{m} \left(\omega_{s_N}^i + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \omega_{s_N}^i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} \Delta x_i < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

所以 $s(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上是可積分的。此外, 對所有 $x \in [a, b]$, 我們計算

$$\left| \int_a^x s_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_a^x (s_n(t) - s(t))\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^x |s_n(t) - s(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon(x-a)}{3(b-a)} < \varepsilon,$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^x f_k(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^x \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^x s_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^x s(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t。 \end{aligned}$$

□

定理 10 (逐項求導定理, Term-by-Term Differentiation)**.** 給定函數列 $\{f_n : I = [a,b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$, 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 具有連續的導函數, 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上逐點收斂至函數 $s(x)$。而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 I 上均勻收斂至 $u(x)$, 則

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right),$$

而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 實際上在區間 I 上均勻收斂至函數 $s(x)$。

證明: 記部份和 $u_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k'(x)$, 因爲 $u_n(x)$ 在 I 上均勻收斂至 $u(x)$, 而且對所有 $k = 1, 2, \ldots, n$, $f_k'(x)$ 在 $I = [a,b]$ 上連續, 所以 $u(x)$ 連續, 由 **定理 9** 知道:

$$\begin{aligned}
U(x) &\overset{\text{記}}{=} \int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n\to\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_a^x \sum_{k=1}^{n} f_k'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^x f_k'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(f_k(x) - f_k(a)) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(a)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(a) = s(x) - s(a),
\end{aligned}$$

所以由微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus) 知: $u(x) = U'(x) = s'(x)$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)。$$

再證 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 實際上在區間 I 上均勻收斂至函數 $s(x)$。給定 $\varepsilon > 0$, 因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 收斂至 $s(a)$, 所以存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N_1$ 都有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(a) - s(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 I 上均勻收斂至 $u(x)$ 告知: 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $x \in I$ 以及 $n \geq N_2$ 都有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k'(x) - u(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$。取 $N = \max(N_1, N_2)$, 則對所有 $x \in I$ 以及 $n \geq N$, 都有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - s(x)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(f_k(a) + \int_a^x f_k'(t)\,\mathrm{d}t\right) - \left(s(a) + \int_a^x s'(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(a) - s(a)\right) + \int_a^x \left(\sum_{k=1}^{n} f_k'(t) - u(t)\right)\mathrm{d}t\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^x \left|\sum_{k=1}^{n} f_k'(t) - u(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^x \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(x-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂至函數 $s(x)$。 □

9.4 冪級數

這一節將討論由多項式形成函數列與函數項級數。給定 $x_0 \in \mathbb{R}$ 以及對於 $n = 0, 1, 2, \ldots$, 假設 $c_n \in \mathbb{R}$, 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \overset{\text{定義}}{=\!=} c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{1}$$

的函數項級數稱爲 *以 x_0 爲中心的冪級數* (power series centered at x_0), 它的部份和函數列爲 $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$ 是次數 (degree) 爲 n 的多項式 (polynomial), 所以冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$ 可以理解爲多項式函數列對於次數 n 取極限而成的產物。正因爲冪級數是一類簡單又特別的函數項級數, 所以冪級數在數學上有一些很好的性質值得探討。

這裡先注意一件事: 在冪級數的表達式中, 不論 x 爲何, 我們總是約定 $(x-x_0)^0 \equiv 1$, 於是 $c_0(x-x_0)^0 \equiv c_0$, 這樣的約定可以將冪級數用一個很精簡的符號像是 (1) 式左邊那樣的表示法。

給了冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, 它又可以看成是一個以 x 爲變數的函數, 所以此時不妨將冪級數記成 $f(x) \overset{\text{記}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$。現在我們要了解的是這個函數的定義域爲何? 也就是說, 給了 $x \in \mathbb{R}$, 必須指定 $f(x)$ 是一個實數, 如此才符合函數的定義。而這個函數的概念就等價於探討哪些 x 所形成的級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 是收斂的。這時, 我們先看 $x = x_0$ 這個點, 將它代入冪級數後得到 c_0 這個數; 也就是說, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} c_0 = c_0$。這件事告知: 冪級數的定義域不是空集合。

至於冪級數的定義域除了 $x = x_0$ 以外還有其它的點嗎? 現在我們試著利用比值判別法 (Ratio Test) 進行了解。<u>對於 $x \neq x_0$</u>, 我們計算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \cdot |x-x_0| = \left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\right) \cdot |x-x_0| \overset{\text{記}}{=} L \cdot |x-x_0|。$$

在對上式繼續分析之前, 先做一個註記: 因爲 $x = x_0$ 一定在冪級數的定義域內, 所以之後若用比值判別法討論冪級數的定義域時, 我們就自然地假定這些操作總是在 $x \neq x_0$ 的情況下討論, 就不再每次都強調 $x \neq x_0$ 使得算式有意義。

由比值判別法 (Ratio Test) 得知:

- 若 $L \cdot |x-x_0| < 1$, 則冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 絕對收斂。
- 若 $L \cdot |x-x_0| > 1$ 或者是 $L \cdot |x-x_0| = \infty$, 則冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 發散。

現定義冪級數的 *收斂半徑* (radius of convergence) 爲

$$R = \begin{cases} 0 & \text{若 } L = \infty \\ \frac{1}{L} & \text{若 } L \in (0, \infty) \\ \infty & \text{若 } L = 0, \end{cases}$$

於是我們得到以下三個結論:

(A) <u>若 $R=0$</u>, 它等價於 $L=\infty$; 也就是說, 對所有 $x\neq x_0$ 都滿足 $L\cdot|x-x_0|=\infty$; 換言之, 對所有 $x\neq x_0$, 冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ 都發散, 所以冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ 只有在 $x=x_0$ 處收斂。

這個情形完全不令人感興趣, 因爲冪級數只在 $x=x_0$ 處收斂, 取值爲 c_0, 其它地方寫了這麼複雜的式子但是都沒有意義, 所以沒有什麼好再研究的。

(B) <u>若 $0<R<\infty$</u>, 它等價於 $L=\frac{1}{R}$, 於是冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ 在 $|x-x_0|<R$ 的時候絕對收斂; 在 $|x-x_0|>R$ 的時候發散。至於冪級數在端點 $x=x_0\pm R$ 的收斂或發散必須根據冪級數的性質各別檢視, 不同的冪級數在端點會有不同的收斂或發散的結果。

這個情形可以說是冪級數的重頭戲, 除了冪級數的一般性質外, 之後還要觀察冪級數在端點的收斂與否對於函數有哪些影響, 有很多問題需要逐一澄清。

(C) <u>若 $R=\infty$</u>, 它等價於 $L=0$; 也就是說, 對所有 $x\neq x_0$ 都滿足 $L\cdot|x-x_0|=0<1$; 換言之, 對所有 $x\neq x_0$, 冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ 都收斂。因爲冪級數在 $x=x_0$ 處必收斂, 所以冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ 對所有 $x\in\mathbb{R}$ 都收斂。

這個情形至少在逐點收斂的意義下是很好的, 因爲每一點對應到的級數和都是實數, 至於這類的冪級數還有什麼更好的性質, 原則上就和 (B) 的情況一併處理。

而冪級數的 *收斂區間* (interval of convergence) 表示冪級數的定義域。對於上述 (B) 的情況, 收斂區間可能是 $(x_0-R,x_0+R),[x_0-R,x_0+R],(x_0-R,x_0+R],[x_0-R,x_0+R)$ 四種情況之一。至於 (C) 的情況, 收斂區間是 $(-\infty,\infty)$。

例 **1.** 試求冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nx^n$ 的收斂區間。

解. 令 $a_n=n^nx^n$, 計算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{n^nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot|x|,$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$, 得知冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nx^n$ 只有在 $x=0$ 處收斂。

例 **2.** 試求冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 的收斂區間。

解. 令 $a_n=\frac{1}{n!}x^n$, 計算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot|x|=0,$$

所以冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 的收斂區間是 $(-\infty,\infty)$。

例 **3.** 試求冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^{2n-1}$ 的收斂區間。

解. 令 $a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^{2n-1}$, 計算

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2(n+1))!(x-1)^{2(n+1)-1}}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!(x-1)^{2n-1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\cdot(x-1)^2\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{(n+1)}\cdot|x-1|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2(2+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})}\cdot|x-1|^2 = 4|x-1|^2,\end{aligned}$$

若 $4|x-1|^2<1$, 也就是 $|x-1|<\frac{1}{2}$, 或者說 $x\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$, 冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^{2n-1}$ 收斂。以下要討論冪級數在端點的收斂性:

(A) <u>若 $x=\frac{3}{2}$</u>, 則級數爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n-1}}$, 令 $a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n-1}}$, 則

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4(n+1)}{2(2n+1)}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2-(2n+1)}{2n+1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

由拉比判別法 (Raabe's Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^{2n-1}$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 處發散。

(B) <u>若 $x=\frac{1}{2}$</u>, 則級數爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n-1}}$, 其收斂或發散的結果與 (A) 相同, 故級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^{2n-1}$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 處發散。

由上述的討論得知: 冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^{2n-1}$ 的收斂區間是 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$。

這裡我們不妨再從等級 (order) 的原理來看冪級數的收斂範圍。以下是幾個常見的等級列表:

$$c\ll\ln n\ll n^p(p>0)\ll a^n(a>1)\ll n!\ll n^n \qquad 當\ n\to\infty,$$

關於冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$, 它的一般項是由指數 $(x-x_0)^n$ 與係數 c_n 搭配而成, 因爲冪級數一定帶有指數的等級, 而我們知道 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 視爲公比爲 x 的等比級數, 所以收斂的範圍是 $|x|<1$, 於是關於指數 $(x-x_0)^n$ 的部份, 它會貢獻出一個有限的收斂範圍 $|x-x_0|<1$。再來就要研究係數對於冪級數收斂的影響是什麼, 如果係數帶有比指數更高等級的量, 那麼係數就會主宰冪級數的收斂區間; 若係數是比指數等級還要低的量則不會影響冪級數的收斂區間; 若係數也是一個和指數等級相當的量, 那麼它會將收斂的範圍放大或縮小一個倍數。

在 例 **1** 的情況, 冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n x^n$ 的一般項係數是 n^n, 它的等級比指數高, 而且它是位在分子, 所以一般項很快就會趨近於無限大, 於是冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n x^n$ 在 $x=x_0$ 以外的點都不收斂。在 例 **2** 的

情況, 冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 前方的係數帶有比指數等級還要高的 $n!$, 而且它是放在分母, 所以 $\frac{1}{n!}$ 強勢於指數之下跑到零的速度會很快使得冪級數處處收斂。

至於 例 **3**, 各位在初看冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^{2n-1}$ 的時候, 會以爲前方的係數帶有 $n!$ 是一個等級比指數高的量然後可能過於草率地預判其收斂或發散。要注意的是, 帶有階乘的量在分子與分母都出現的話, 兩者必須先做比較之後再進行判斷; 也就是說, 當分子與分母都帶有階乘的時候, 兩者相除可能會把階乘的等級消除。以這個例子來說, 我們大致上可以這麼看:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}{n!}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{n!},$$

對於第一個部份來說, 分子的每一項都可以提出 2, 所以它可以完全整理成

$$\frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}{n!}=\frac{2^n\cdot n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}{n!}=\frac{2^n\cdot n!}{n!}=2^n,$$

至於後者, 雖然它不能完全消掉, 但是以等級來看, 它也是在分子分母逐項相比之下, 將貢獻出 2^n, 所以整體來說, 係數會是以 2^{2n} 之等級呈現。最後再和冪級數的主體一起看, 因爲當 n 增加 1 的時候, 主體增加了 $(x-1)^2$, 所以在看公比的時候, 冪級數的後項比前項就會變成 $r^2=2^2\cdot(x-1)^2$。最後, 在要求 $|r|<1$ 之下, 就可以解得收斂的範圍會是 $|x-1|<\frac{1}{2}$。以上討論是利用等級的原理對冪級數的收斂半徑進行預判, 至於冪級數在端點的收斂性就必須逐一檢查。

這裡我們再花一點時間觀察 $(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1$ 與 $2n(2n-2)(2n-4)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2$ 兩者之間的差異程度, 考慮

$$a_n=\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)(2n-4)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2},$$

計算

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{(2n+2)(2n)(2n-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{2n(2n-2)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}=\frac{2}{2}=1,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)&=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2-(2n+1)}{2n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以我們可以看出: 當 $n\to\infty$ 時,$(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1$ 與 $2n(2n-2)(2n-4)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2$ 兩者除了都有 $n!$ 與 2^n 的等級之外, 從拉比判別法 (Raabe's Test) 對於等級的精神可以看出: 分母 $2n(2n-2)(2n-4)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2$ 會比分子 $(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1$ 還要多出 $n^{\frac{1}{2}}$ 的等級。

此外, 如果各位對這些數字與階乘很敏感的話, 應該會發現到 a_n 這個量在第 7 章的時候討論過, 那時是在計算 $I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,\mathrm{d}x$ 的積分, 而那個地方得到的結果也可以再次印證上述現象。

尋找冪級數的收斂區間, 除了是在了解冪級數的定義域, 實際上它意味著冪級數逐點收斂的範圍。在這一章前三節的經驗發現: 若只知道一個冪級數在範圍內是逐點收斂其實意義不大, 因爲逐點收斂無法保證多項式的各種性質能夠順利移植到冪級數, 也基於此其實我們更想知道的是冪級數在收斂區間內是否均勻收斂; 換言之, 若能確定冪級數在哪些範圍是均勻收斂的的話, 因爲冪級數的部份和是多項式, 而多項式不僅連續, 甚至可以積分也可以求導, 所以在那個範圍內連續、可積分、可微分的性質就可以完全過渡到取極限之後的冪級數。

在闡明冪級數的均勻收斂性質之前, 我們先將前面關於冪級數絕對收斂的結果寫成以下定理:

定理 4 (阿貝爾第一定理, First Abel's Theorem)**.**

(A) 若冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $x=\xi$ 收斂, 則它在 $|x-x_0|<|\xi-x_0|$ 的地方絕對收斂。

(B) 若冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $x=\xi$ 發散, 則它在 $|x-x_0|>|\xi-x_0|$ 也發散。

證明:

(A) 因爲冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $x=\xi$ 收斂, 若 x 滿足 $|x-x_0|<|\xi-x_0|$, 則 $x\in(x_0-R,x_0+R)$, 其中 R 爲冪級數的收斂半徑, 得到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 是絕對收斂的。

(B) 因爲冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $x=\xi$ 發散, 若 x 滿足 $|x-x_0|>|\xi-x_0|$, 則 $x\notin[x_0-R,x_0+R]$, 其中 R 爲冪級數的收斂半徑, 得到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 發散。

□

定理 5 (阿貝爾第二定理, Second Abel's Theorem)**.** 考慮冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, 若冪級數的收斂半徑爲 R, 其中 $R>0$, 則

(A) 冪級數在 (x_0-R,x_0+R) 內的任何一個閉區間 $[a,b]$ 上均勻收斂。

(B) 若冪級數在 $x=x_0+R$ 收斂, 則冪級數在 $[a,x_0+R]$ 上均勻收斂, 其中 $a>x_0-R$。

(C) 若冪級數在 $x=x_0-R$ 收斂, 則冪級數在 $[x_0-R,b]$ 上均勻收斂, 其中 $b<x_0+R$。

證明:

(A) 任取閉區間 $[a,b]\subset(x_0-R,x_0+R)$, 記 $\eta=\max\{|a-x_0|,|b-x_0|\}$, 對所有 $x\in[a,b]$, 以及 $n=0,1,2,\ldots$, 都有 $0\le|c_n(x-x_0)^n|\le|c_n\eta^n|=|c_n|\eta^n$, 因爲 $\eta<R$, 所以級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|\eta^n$ 收斂, 由魏爾斯特拉斯 M-判別法 (Weierstrass M-Test) 得知: 冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $[a,b]$ 上均勻收斂。

(B) 首先證明 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $[x_0, x_0+R]$ 上均勻收斂。先將冪級數拆解成

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n \cdot \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) g_n(x),$$

因爲 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$ 收斂, 而 $f_n(x) = c_n R^n$ 在 $[x_0, x_0+R]$ 上視爲常數函數, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[x_0, x_0+R]$ 上是均勻收斂的。此外, $g_n(x) = \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$ 在 $x \in [x_0, x_0+R]$ 上遞減, 且 $0 \le (\frac{x-x_0}{R})^n \le 1$, 這表示 $(\frac{x-x_0}{R})^n$ 在 $[x_0, x_0+R]$ 上均勻有界, 所以由阿貝爾判別法 (Abel Test) 得知: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $[x_0, x_0+R]$ 上均勻收斂。

若 $a \ge x_0$, 上述的討論得知冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $[a, x_0+R]$ 上均勻收斂; 若 $x_0 - R < a < x_0$, 由 (A) 得知冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $[a, x_0+R]$ 上均勻收斂。

(C) 首先證明 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $[x_0-R, x_0]$ 上均勻收斂。先將冪級數拆解成

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(-R)^n \cdot \left(\frac{x_0-x}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) g_n(x),$$

因爲 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-R)^n$ 收斂, 而 $f_n(x) = c_n(-R)^n$ 在 $[x_0-R, x_0]$ 上視爲常數函數, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[x_0-R, x_0]$ 上是均勻收斂的。此外, $g_n(x) = \left(\frac{x_0-x}{R}\right)^n$ 在 $x \in [x_0-R, x_0]$ 上遞減, 且 $0 \le (\frac{x_0-x}{R})^n \le 1$, 這表示 $(\frac{x_0-x}{R})^n$ 在 $[x_0-R, x_0]$ 上均勻有界, 所以由阿貝爾判別法 (Abel Test) 得知: 冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $[x_0-R, x_0]$ 上均勻收斂。

若 $b \le x_0$, 上述的討論得知冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $[x_0-R, x_0]$ 上均勻收斂; 若 $x_0 < b < x_0+R$, 由 (A) 得知 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在 $[x_0-R, b]$ 上均勻收斂。

□

這裡應細細體會阿貝爾第二定理關於 (B) 與 (C) 的特色: 只要確定冪級數在端點的收斂性, 那麼至少可以確定冪級數在從中心到該端點所成的閉區間上是均勻收斂。而冪級數厲害的地方也在於此, 當我們觀察冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 的樣貌, 視冪級數爲函數的時候, 函數的變數 x 只出現在 $(x-x_0)^n$ 的地方, 而且 n 增加之下, 這個量就是指數的概念。回想這一章最一開始的許多例子, 逐點收斂的函數列不見得會是均勻收斂, 但是阿貝爾第二定理則是說: 只要確定一個點 x 的級數收斂, 就可以確定冪級數在一整段區間(這個區間甚至包含這個級數收斂的點) 具有均勻收斂的性質。

我們接下來就要將前一節的定理應用到冪級數, 在阿貝爾第二定理的建立後, 多項式的性質就能完全轉移到冪級數上。特別地, 阿貝爾第二定理的 (B) 與 (C) 結果可以進一步推論到那些性質在端點處也成立。

定理 6. 冪級數在收斂區間上是連續函數。

證明: 在收斂區間上任取一點 x_0, 取一個包含 x_0 且在收斂區間內的一個閉區間 I, 因爲冪級數的一般項是多項式, 多項式在區間 I 上是連續函數, 由阿貝爾第二定理 (Second Abel's Theorem) 得知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在區間 I 上是均勻收斂的, 所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 在區間 I 上是連續函數。因此冪級數在整個收斂區間上是連續函數。 □

定理 7 (冪級數逐項積分定理, Term-by-Term Integration Theorem for Power Series)**.** 若冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 的收斂半徑爲 R, 其中 $R>0$, 則在收斂區間中的任意一點 x 都有

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} c_n(t-x_0)^n\,\mathrm{d}t\right)。\tag{2}$$

此外, 逐項積分後所得的冪級數與原來的冪級數具有相同的收斂半徑 R。

證明: 在冪級數的收斂區間上取一點 x, 由阿貝爾第二定理 (Second Abel's Theorem) 得知: 部份和 $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$ 在 $[x_0,x]$ (或 $[x,x_0]$) 上均勻收斂到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, 由均勻收斂的函數項級數之逐項積分定理 (Term-by-Term Integration Theorem) 得知 (2) 式成立。

對於先進行逐項積分所形成的冪級數

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} c_n(t-x_0)^n\,\mathrm{d}t\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} c_n(t-x_0)^n\,\mathrm{d}(t-x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(t-x_0)^{n+1}\Big|_{t=x_0}^{t=x}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1},\end{aligned}$$

現計算其收斂範圍:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+2}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{c_n(x-x_0)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\cdot|x-x_0|\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\cdot\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\cdot|x-x_0|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\cdot|x-x_0|,\end{aligned}$$

所以級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ 與 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 具有相同的收斂半徑 R。 □

定理 8 (冪級數逐項求導定理, Term-by-Term Differentiation Theorem for Power Series)**.** 若冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 的收斂半徑爲 R, 則在 (x_0-R,x_0+R) 當中的任一點 x 都有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c_n(x-x_0)^n\right)。$$

此外, 逐項求導後所得的冪級數與原來的冪級數具有相同的收斂半徑 R。

證明: 關於先逐項求導後所成的冪級數可寫成

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c_n(x-x_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-x_0)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(x-x_0)^n。$$

在往下討論之前, 先註記一件事: 左式在 $n=0$ 時是常數函數對於 x 求導, 其值爲 0, 故中間的式子在求和的時候, 指標從 $n=1$ 開始寫起; 而最右式則是進行指標的重新設定。

現計算

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)c_{n+1}(x-x_0)^n}{nc_n(x-x_0)^{n-1}}\right|&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{c_{n+1}}{c_n}\cdot(x-x_0)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\cdot\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\cdot|x-x_0|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\cdot|x-x_0|,\end{aligned}$$

所以級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nc_n(x-x_0)^{n-1}$ 與 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ 具有相同的收斂半徑 R。

因爲 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上收斂, 由阿貝爾第二定理 (Second Abel's Theorem) 知: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上均勻收斂; 因爲 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(x-x_0)^n$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上收斂, 由阿貝爾第二定理 (Second Abel's Theorem) 知: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(x-x_0)^n$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上均勻收斂; 由函數項級數的逐項求導定理 (Term-by-Term Differentiation Theorem) 即得冪級數的逐項求導定理。 □

關於冪級數的逐項積分與逐項求導定理, 我們只能確定它們的收斂半徑相同, 至於收斂區間, 也就是端點的收斂性是無法確定的; 也就是說, 端點的收斂性可能會因爲逐項求導或逐項積分後而有所改變, 必須重新檢視。以下舉例說明此現象。

例 **9.** 考慮 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$, 探討 $f(x),f'(x),f''(x)$ 的收斂區間。

解.

(A) 先求 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$ 的收斂區間。計算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot|x|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2\cdot|x|=|x|,$$

得到若 $|x|<1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$ 絕對收斂; 若 $|x|>1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$ 發散。現分析冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$ 在端點 $x=\pm1$ 的收斂性:

- 若 $x=1$, 則 $f(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 它是收斂的 p-級數, 其中 $p=2$。
- 若 $x=-1$, 則 $f(-1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$。令 $b_n=\frac{1}{n^2}$, 因爲數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 由交錯級數判別法 (Alternating Series Test) 得知級數收斂。

由上討論得知: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$ 的收斂區間是 $[-1,1]$。

(B) 由冪級數的逐項求導定理 (Term-by-Term Differentiation Theorem for Power Series) 知道: 在 $(-1,1)$ 區間上 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$。計算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot|x|=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\cdot|x|=|x|,$$

得到若 $|x|<1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$ 絕對收斂; 若 $|x|>1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$ 發散。以下分析冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$ 在端點 $x=\pm1$ 的收斂性:

- 若 $x=1$, 則 $f'(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$, 它是發散的 p-級數, 其中 $p=1$。
- 若 $x=-1$, 則 $f'(-1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$。令 $b_n=\frac{1}{n+1}$, 因爲數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 由交錯級數判別法 (Alternating Series Test) 得知級數收斂。

由上討論得知: $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$ 的收斂區間是 $[-1,1)$。

(C) 由冪級數的逐項求導定理 (Term-by-Term Differentiation Theorem for Power Series) 知道: 在 $(-1,1)$ 區間上 $f''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}x^n$。計算

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{n+3}\cdot\frac{n+2}{(n+1)x^n}\right|&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+3)(n+1)}\cdot|x|\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{2}{n})^2}{(1+\frac{3}{n})(1+\frac{1}{n})}\cdot|x|=|x|,\end{aligned}$$

得到若 $|x|<1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}x^n$ 絕對收斂; 若 $|x|>1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}x^n$ 發散。以下分析冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}x^n$ 在端點 $x=\pm1$ 的收斂性:

- 若 $x=1$, 則 $f''(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$, 令 $a_n=\frac{n+1}{n+2}$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=1\neq0$, 由發散判別法 (Test of Divergence) 得知級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$ 發散。
- 若 $x=-1$, 則 $f''(-1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n+2}$。令 $a_n=\frac{(-1)^n(n+1)}{n+2}$, 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\frac{(-1)^{2n}(2n+1)}{2n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}=1\neq0$, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$, 由發散判別法 (Test of Divergence) 可知級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n+2}$ 發散。

由上討論得知: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}x^n$ 的收斂區間是 $(-1,1)$。

(D) 綜合 (A) (B) (C) 的結果知道 $f(x),f'(x),f''(x)$ 三者的收斂區間皆不同。若以 $f'(x)$ 爲主體, 則 $f(x)$ 可視爲 $f'(x)$ 逐項積分後的結果。而 $f''(x)$ 則是將 $f'(x)$ 逐項求導後的結果。如此一來就說明了冪級數經逐項積分或逐項求導後在端點的收斂性可能會不同。

以下要介紹三個重要函數, 它們在一個範圍內可以表達成冪級數的樣子。

例 **10.** 考慮函數 $f(x)=\frac{1}{1-x}$, 我們可以把它理解成公比爲 x 的等比級數和的公式, 所以將它改寫成

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\overset{\text{在 }|x|<1}{=\!=\!=}1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n。$$

例 **11.** 考慮函數 $f(x)=\ln(1+x)$, 因爲

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}\overset{\text{在 }|x|<1}{=\!=\!=}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,$$

由冪級數逐項積分定理 (Term-by-Term Integration Theorem for Power Series) 得到

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^nt^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n+1}t^{n+1}\right]\Bigg|_0^x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}。\end{aligned}$$

由於上面的討論用到了冪級數逐項積分定理, 所以端點的收斂性必須重新檢視。

(A) <u>若 $x=1$</u>, 則級數爲 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$。記 $b_n=\frac{1}{n+1}$, 因爲 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 由交錯級數判別法 (Alternating Series Test) 得知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收斂。

(B) <u>若 $x=-1$</u>, 則級數爲 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(-1)^{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$, 它是發散的 p-級數, 其中 $p=1$。

(C) 由上述討論得知: 冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ 的收斂區間是 $(-1,1]$。

因爲冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ 的收斂區間是 $(-1,1]$, 由阿貝爾第二定理 (Second Abel's Theorem) 得知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $(-1,1]$ 上均勻收斂至 $\ln(1+x)$。

例 **12.** 證明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\cdots=\ln 2$。

證明: 因爲 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $(-1,1]$ 上均勻收斂至 $\ln(1+x)$, 所以在 $x=1$ 的地方, 級數和與函數值相同, 於是我們得到交錯級數的和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$。 □

關於 $\ln(1+x)$ 在 $(-1,1]$ 上冪級數的表達, 有時候我們會重新選用指標, 得到

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

的樣子, 這些表達式完全通用。

例 **13.** 考慮函數 $f(x)=\tan^{-1}x$, 因爲

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}\overset{\text{在 }|x|<1}{=\!=\!=}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

由冪級數逐項積分定理 (Term-by-Term Integration Theorem for Power Series) 得到

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}\right]\Bigg|_0^x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}。\end{aligned}$$

由於上面的討論有用到逐項積分定理, 所以端點的收斂性必須重新檢視。

(A) <u>若 $x=1$</u>, 則級數爲 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$。記 $b_n=\frac{1}{2n+1}$, 因爲 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 由交錯級數判別法 (Alternating Series Test) 得知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收斂。

(B) <u>若 $x=-1$</u>, 則級數爲 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(-1)^{2n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}-\frac{(-1)^n}{2n+1}$, 由 (A) 知級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(-1)^{2n+1}$ 收斂, 而且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(-1)^{2n+1}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$。

(C) 由上述討論得知: 級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收斂區間是 $[-1,1]$, 而且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 在 $[-1,1]$ 上均勻收斂至 $\tan^{-1}x$。

因爲冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收斂區間是 $[-1,1]$, 由阿貝爾第二定理 (Second Abel's Theorem) 得知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 在 $[-1,1]$ 上均勻收斂至 $\tan^{-1}x$。

例 **14.** 證明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4}{2n+1}=\pi$。

證明: 因爲冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 在 $[-1,1]$ 上均勻收斂至 $\tan^{-1}x$。所以在 $x=1$ 的地方級數和等於函數值, 於是

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{2n+1}=\pi。$$

□

至此, 我們得到三個常用函數的冪級數表達式, 至於其它函數是否可以寫出其冪級數表達式, 又該如何找到它對應的冪級數, 這將是下一節泰勒級數理論所要探討的事情。在這一單元的最後想要討論的是: 有些冪級數我們可以觀察它的規律, 得到級數滿足某個微分方程式, 利用微分方程式的理論解出冪級數的函數表達。

例 **15.** 求冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ 的和。

解. 我們在 例 **2** 已經證明了冪級數 $f(x) \overset{\text{記}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ 的收斂範圍是 $(-\infty, \infty)$, 而且從冪級數的逐項求導定理 (Term-by-Term Differentiation Theorem for Power Series), 得到

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{n!}x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = f(x),$$

即 $f'(x) - f(x) = 0$, 現將等式兩邊同乘 e^{-x} 之後得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}f(x)) = 0$, 於是 $\mathrm{e}^{-x}f(x) = C$, 其中 C 爲常數。再將 $x = 0$ 代入後得到 $f(0) = C = 1$, 所以 $\mathrm{e}^{-x}f(x) = 1$, 即 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = \mathrm{e}^x$。

9.5 泰勒級數理論

前一節介紹了冪級數理論, 當中指出: 雖然冪級數是一種無窮級數, 但是它在逐點收斂的範圍內實際上是均勻收斂的, 由於冪級數的部份和是多項式, 所以多項式所具備的特性像是連續、逐項積分、逐項求導的操作都可以轉移到冪級數, 所以我們可以說冪級數在收斂範圍內幾乎與多項式無異, 是一種相當好的多項式推廣。

如果一個函數 $f(x)$ 在某個點 $x = x_0$ 的附近可以表示成一個冪級數的樣子, 那麼我們就可以透過冪級數來研究函數在 $x = x_0$ 附近的行爲。至於要怎麼樣把函數在一個點附近改寫成冪級數的樣貌並從中分析函數, 這就是泰勒級數理論 (Taylor series theory) 欲研究的課題。在正式進入泰勒級數的理論之前, 我們回想單元 9.4 介紹過的三個函數:

(A) $\dfrac{1}{1-x} \overset{\text{若 } x\in(-1,1)}{=\!=\!=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$。

(B) $\ln(1+x) \overset{\text{若 } x\in(-1,1]}{=\!=\!=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$。

(C) $\tan^{-1} x \overset{\text{若 } x\in[-1,1]}{=\!=\!=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$。

因爲這三個函數就函數的本身或是它的導函數與等比級數有關, 所以我們直接從等比級數的性質再透過均勻收斂的理論就能很快寫出冪級數的樣貌。而泰勒級數理論則是針對一般的函數, 當函數與等比級數無關或是關係程度不大的時候, 要如何推得其冪級數的表達, 並分析函數與冪級數之間的關係。

這裡特別注意到剛才列出的三個函數當中, 等號的上方都加註了一些說明, 主要是提醒各位這些等號的成立是有條件的, 雖然等式左邊函數定義域很大, 例如函數 $\frac{1}{1-x}$ 只有在 $x = 1$ 的地方沒有定義, 函數 $\ln(1+x)$ 在 $x > -1$ 處有定義, 函數 $\tan^{-1} x$ 處處都有定義, 但是等式右邊有意義的範圍只有介在 $x = -1$ 與 $x = 1$ 之間(頂多再加上端點的收斂)。這個現象告訴我們: 將函數用冪級數重新表達是一種描述函數局部的性質 (local property) 的方法。

此外, 從單元 9.4 的 例 **15** 知道, 有時我們可以用微分方程理論將冪級數的和解出明確的函數表達。只是這個方法與我們現在要問的問題是反向的討論; 也就是說, 現在想要研究的問題是: 給定一個函數, 有沒有辦法將函數在一點附近改寫成冪級數的樣子?

這裡我們假設函數 $f(x) \in C^\infty(I)$; 也就是說, 假設函數的任何階導函數 $f^{(n)}(x), n = 0, 1, 2, \ldots$ 在區間 I 上存在且連續, 具有這樣性質的函數我們稱爲 *光滑函數* (smooth functions)。現在我們假設這個光滑函數 $f(x)$ 可以在 $x = x_0$ 的附近表示成冪級數的樣子, 其中 $x_0 \in I$; 換言之, 假設存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

等號成立, 其中 $c_n \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \ldots$。首先我們可以確定每一項係數 c_n 的值。

引理 **1.** 給定一個光滑函數 $f(x) \in C^\infty(I)$, 記 $I_{x_0,\delta} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$, 若在區間 $I_{x_0,\delta}$ 上 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, 則

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}。$$

證明:

(A) 將 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ 兩邊代入 $x = x_0$ 之後得到 $f(x_0) = c_0$, 即 $c_0 = f(x_0)$。

(B) 對於 $k \in \mathbb{N}$, 將 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ 兩邊求導 k 次得到

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n (x - x_0)^{n-k},$$

兩邊代入 $x = x_0$ 之後得到

$$f^{(k)}(x_0) = k(k-1)\cdots 1 \cdot c_k \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}。$$

□

上面的引理說明: 若想要將函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 爲中心點, 以 δ 爲半徑的開區間上表示成冪級數的話, 那麼函數 $f(x)$ 必須是以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 這樣的冪級數逐點收斂至 $f(x)$。

定義 **2.** 給定一個光滑函數 $f(x)$, 稱

$$T_{x_0}(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

爲函數 $f(x)$ *以 $x = x_0$ 爲中心的泰勒級數* (Taylor series centered at $x = x_0$)。特別地, 函數 $f(x)$ 以 $x = 0$ 爲中心的泰勒級數

$$M(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

稱爲函數 $f(x)$ 的 *馬克勞林級數* (Maclaurin series)。

這裡重新整理上述的討論: 如果函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的附近可以表示成以 x_0 爲中心的冪級數的話, 那麼這個冪級數一定是 $f(x)$ 以 $x = x_0$ 爲中心的泰勒級數 $T_{x_0}(x)$。

特別注意到, 我們在得到泰勒級數 $T_{x_0}(x)$ 的討論過程中只用了 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處的函數值 $f(x_0)$ 以及各階導數 $f^{(n)}(x_0), n \in \mathbb{N}$ 的資訊, 並沒有用到函數 $f(x)$ 在其它地方的資訊; 也就是說, 泰勒級數 $T_{x_0}(x)$ 的特色是一般項係數完全由 $x = x_0$ 的資訊掌控, 而變數是由 $(x - x_0)^n$ 呈現。

例 **3.** 驗證: 函數 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 的馬克勞林級數是 $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$。

證明: 首先, $f(0) = 1$。因爲 $f(x) = (1-x)^{-1}$, 所以 $f'(x) = -(1-x)^{-2} \cdot (-1) = (1-x)^{-2}$, 得到 $f'(0) = 1$。假設對於 $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-(k+1)}$, 則

$$f^{(k+1)}(x) = -(k+1)k!(1-x)^{-(k+1)-1} \cdot (-1) = (k+1)!(1-x)^{-(k+2)},$$

得到 $f^{(k+1)}(0) = (k+1)!$。因此函數 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 的馬克勞林級數爲

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n。$$

□

給定光滑函數 $f(x)$ 以及一點 $x = x_0$, 則可寫出泰勒級數 $T_{x_0}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, 這個泰勒級數的定義域, 也就是冪級數的收斂區間必須重新檢視, 前面的討論並沒有提到有關泰勒級數的收斂區間之任何訊息, 必須透過單元 9.4 的冪級數理論處理泰勒級數 $T_{x_0}(x)$ 的收斂區間。當然, 我們希望這個泰勒級數的收斂範圍至少要包含一個區間 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 否則這樣辛苦算出來的泰勒級數 $T_{x_0}(x)$ 如果只在 $x = x_0$ 收斂的話那就沒有任何價值。以下舉出一個函數, 它的馬克勞林級數之定義域只有 $x = 0$, 這麼一來就說明上面描述這種很糟的情況的確會發生。

例 **4.** 考慮 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$, 求函數 $f(x)$ 的馬克勞林級數 $M(x)$ 及其收斂區間。

解. 注意到 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$ 並不是一個冪級數, 它只是函數項級數, 我們必須先驗證有關 $f(x)$ 的基本性質。

對任意 $x \in \mathbb{R}$, 因爲對所有 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ 都有

$$0 \leq \left| \frac{\sin(2^n x)}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)},$$

而

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(2^n x)}{n!} \right| = |\sin(2x)| + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin(2^n x)}{n!} \right|$ 收斂, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$ 絕對收斂。因此 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$ 的定義域是 $\mathbb{R}$。

實際上, 由上面的分析以及魏爾斯特拉斯 M-判別法 (Weierstrass M-test) 得知: 級數 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$ 是均勻收斂的。爲了要能夠使用逐項求導定理 (Term-by-Term Differentiation Theorem) 以求得函數 $f(x)$ 的馬克勞林級數, 我們還要驗證級數先逐項求導後所成的級數之均勻收斂性。

對於 $k=0,1,2,\ldots$, 計算

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}\left(\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right)&=\frac{\sin(2^n x)}{n!}\cdot(-1)^k\cdot(2^n)^{2k}=\frac{\sin(2^n x)}{n!}\cdot(-1)^k\cdot\left(2^{2k}\right)^n\\ \frac{\mathrm{d}^{2k+1}}{\mathrm{d}x^{2k+1}}\left(\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right)&=\frac{\cos(2^n x)}{n!}\cdot(-1)^k\cdot(2^n)^{2k+1}=\frac{\cos(2^n x)}{n!}\cdot(-1)^k\cdot\left(2^{2k+1}\right)^n,\end{aligned}$$

因爲

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}\left(\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right)\right|&=\left|\frac{\sin(2^n x)}{n!}\cdot(-1)^k\cdot\left(2^{2k}\right)^n\right|\le\frac{\left(2^{2k}\right)^n}{n!}\\ \left|\frac{\mathrm{d}^{2k+1}}{\mathrm{d}x^{2k+1}}\left(\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right)\right|&=\left|\frac{\cos(2^n x)}{n!}\cdot(-1)^k\cdot\left(2^{2k+1}\right)^n\right|\le\frac{\left(2^{2k+1}\right)^n}{n!},\end{aligned}$$

而且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}\right)^n}{n!}=\mathrm{e}^{2^{2k}},\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2^{2k+1}\right)^n}{n!}=\mathrm{e}^{2^{2k+1}}$$

由魏爾斯特拉斯 M-判別法 (Weierstrass M-test) 得知: 級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}\left(\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right)\right)\quad\text{與}\quad\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^{2k+1}}{\mathrm{d}x^{2k+1}}\left(\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right)\right)$$

都是均勻收斂的級數, 故由逐項求導定理 (Term-by-Term Differentiation Theorem) 得知: 對於 $k=0,1,2,\ldots$,

$$f^{(2k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}\left(\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right)\right)\quad\text{與}\quad f^{(2k+1)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^{2k+1}}{\mathrm{d}x^{2k+1}}\left(\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right)\right)$$

對於 $k=0,1,2,\ldots$, 因爲

$$f^{(2k)}(0)=0,\quad f^{(2k+1)}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(2^{2k+1}\right)^n}{n!}=(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2^{2k+1}\right)^n}{n!}=(-1)^k\mathrm{e}^{2^{2k+1}},$$

所以函數 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$ 對應到的馬克勞林級數爲

$$M(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{2^{2n+1}}}{(2n+1)!}x^{2n+1}。$$

現在要討論的是 $M(x)$ 的定義域。計算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{2^{2(n+1)+1}}x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(-1)^n\mathrm{e}^{2^{2n+1}}x^{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{2^{2n+3}-2^{2n+1}}}{(2n+3)(2n+2)}\cdot|x|^2=\infty,$$

最後一個等式成立是因爲對於 $n \geq 4$,

$$\frac{\mathrm{e}^{2^{2n+3}-2^{2n+1}}}{(2n+3)(2n+2)} \geq \frac{\mathrm{e}^{2^{2n+1}\cdot 3}}{(2n+3n)^2} \geq \frac{(1+1)^n}{25n^2} \geq \frac{C_3^n}{25n^2} = \frac{(n-1)(n-2)}{150n} \geq \frac{(\frac{1}{2}n)^2}{150n} = \frac{n}{600},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{600} = \infty$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2^{2n+3}-2^{2n+1}}}{(2n+3)(2n+2)} \cdot |x|^2 = \infty$。

因此 $M(x)$ 只在 $x = 0$ 處收斂。

再來要研究的是: 給定一個光滑函數 $f(x)$ 以及 $x = x_0$, 由此定義了泰勒級數 $T_{x_0}(x)$, 假設泰勒級數的定義域至少包含一個區間 $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 那麼 $f(x)$ 和 $T_{x_0}(x)$ 在區間 I 上兩者會相同嗎? 爲回答這個問題, 我們先看一個例子。

例 **5.** 考慮函數

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{若 } x \neq 0 \\ 0 & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

我們分以下幾點說明函數的特性:

(A) <u>函數 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是連續函數。</u>

(A1) 若 $x \neq 0$, $f(x)$ 是兩個連續函數 $g(x) = \mathrm{e}^x$ 與 $h(x) = -\frac{1}{x^2}$ 的合成函數, 即 $f(x) = (g \circ h)(x)$, 所以 $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 處連續。

(A2) 若 $x = 0$, 計算

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to\pm\infty} \mathrm{e}^{-y^2} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{y^2}} = 0 = f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 處連續。

(A3) 綜合 (A1) 與 (A2) 討論得知: 函數 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是連續函數。

(B) <u>若 $x \neq 0$, 對於 $n \in \mathbb{N}$, 則 $f^{(n)}(x) = P_n(y)\mathrm{e}^{-y^2}$</u>, 其中 $y = \frac{1}{x}$, 而 $P_n(y)$ 是以 y 爲變數、次數 (degree) 爲 $3n$ 的多項式。

- 當 $n = 1$, 計算

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-y^2}(-2y)\cdot(-y^2) = 2y^3\mathrm{e}^{-y^2} = P_1(y)\mathrm{e}^{-y^2},$$

其中 $P_1(y) = 2y^3$ 是一個次數爲 3 的多項式。

- 假設在 $n = k$ 時, 有 $f^{(k)}(x)P_k(y)\mathrm{e}^{-y^2}$, 其中 $P_k(y)$ 的次數爲 $3k$。

當 $n = k+1$, 計算

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^{k+1}f}{\mathrm{d}x^{k+1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(P_k(y)\mathrm{e}^{-y^2}\right)(-y^2) \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}P_k(y)}{\mathrm{d}y}\mathrm{e}^{-y^2} + P_k(y)\mathrm{e}^{-y^2}(-2y)\right)(-y^2) \\ &= \left(-y^2\frac{\mathrm{d}P_k(y)}{\mathrm{d}y} + 2y^3P_k(y)\right)\mathrm{e}^{-y^2}。 \end{aligned}$$

令 $P_{k+1}(y) = -y^2\frac{\mathrm{d}P_k(y)}{\mathrm{d}y} + 2y^3P_k(y)$, 則 $P_{k+1}(y)$ 的次數爲 $3 + 3k = 3(k+1)$。

- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 對 $x \neq 0$, 都有 $f^{(n)}(x) = P_n(y)\mathrm{e}^{-y^2}$, 其中 $y = \frac{1}{x}$, 而 $P_n(y)$ 以一個以 y 變數且次數爲 $3n$ 的多項式。

(C) <u>對所有 $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$。</u>

- 若 $n = 1$, 計算

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y\to\pm\infty}\frac{\mathrm{e}^{-y^2}}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to\pm\infty}\frac{y}{\mathrm{e}^{y^2}}$$
$$\overset{(\frac{\infty}{\infty},L')}{=\!=\!=} \lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{2y\mathrm{e}^{y^2}} = 0。$$

- 假設 $n = k$, 都有 $f^{(k)}(0) = 0$。

  當 $n = k+1$, 計算

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)}{x} = \lim_{y\to\pm\infty}\frac{P_k(y)\mathrm{e}^{-y^2}}{\frac{1}{y}}$$
$$= \lim_{y\to\pm\infty}\frac{yP_k(y)}{\mathrm{e}^{y^2}} = 0.$$

  注意到上面式子需要用到羅必達法則 (l' Hôspital Rule) $\left[\!\left[\frac{3n-1}{2}\right]\!\right]$ 次而得到極限值爲 0。

- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 對所有 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $f^{(n)}(0) = 0$。

(D) 因爲 $f(0) = 0$ 以及對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $f^{(n)}(0) = 0$, 所以函數 $f(x)$ 對應到的馬克勞林級數是

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \equiv 0;$$

也就是說, $M(x)$ 是一個處處爲零的函數, 函數 $M(x)$ 的收斂區間是 $(-\infty, \infty)$。但是在 $x \neq 0$ 的地方, $M(x) \neq f(x)$。所以函數 $f(x)$ 無法在包含 $x = 0$ 的任一個區間 $(-\delta, \delta)$ 用馬克勞林級數 $M(x)$ 表達。

由上面的例子告知: 存在光滑函數 $f(x)$, 即使你寫出了它的泰勒級數 $T_{x_0}(x)$ 或是馬克勞林級數 $M(x)$ 而且也確定這兩個級數的定義域不只是一個點, 但是函數與泰勒級數或馬克勞林級數之間除了中心點取值一模一樣之外, 其它的地方都不同, 那麼我們花了這麼多時間計算出一個看似很漂亮的冪級數卻完全沒有用, 無助於我們對於這個光滑函數有新的認識。

到目前爲止, 這和我們心中設定的目標好像還很遙遠, 當初與等比級數有關的函數都可以立刻寫出它的冪級數表達, 怎麼一般的函數想要寫成冪級數卻困難重重, 那到底什麼情況下函數在某個範圍內才會與它的泰勒級數一致呢? 也就是說, 以下面等式什麼時候才會成立:

$$f(x) \overset{?}{=} T_{x_0}(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \overset{\text{記}}{=} \lim_{n\to\infty} T_{n,x_0}(x),$$

其中

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n。$$

定義 6. 給定光滑函數 $f(x) \in C^\infty(I)$, 以及 $x = x_0 \in I$, 且存在 $\delta > 0$ 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$,

(A) 多項式 $T_{n,x_0}(x)$ 稱爲 函數以 $x = x_0$ 爲中心的 n-次泰勒多項式 (n-th degree Taylor polynomial of $f(x)$ at x_0)。

(B) 定義一個泰勒級數 $T_{x_0}(x)$ 的 餘項 (remainder) 爲 $R_{n,x_0}(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$。

(C) 對於光滑函數 $f(x)$ 的馬克勞林級數 $M(x)$ 之餘項簡記爲 $R_n(x)$。

這裡先得到一個關於函數與其泰勒級數在一個區間內處處相等的充分必要條件。

定理 7. 一個光滑函數 $f(x)$ 在區間 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 內滿足 $f(x) = T_{x_0}(x)$ 的充分必要條件是對所有 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = 0$。

證明: ($\Rightarrow$) 因爲 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_{n,x_0}(x)$, 而 $R_{n,x_0}(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - T_{n,x_0}(x)) = f(x) - \lim_{n\to\infty} T_{n,x_0}(x) = f(x) - f(x) = 0。$$

($\Leftarrow$) 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = 0$ 以及 $T_{n,x_0}(x) = f(x) - R_{n,x_0}(x)$, 所以

$$T_{x_0}(x) = \lim_{n\to\infty} T_{n,x_0}(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - R_{n,x_0}(x)) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = f(x) - 0 = f(x)。$$

□

所以整個問題轉變成: 給定一個光滑函數 $f(x)$ 與 $x = x_0$, 定義了泰勒級數 $T_{x_0}(x)$ 以及餘項 $R_{n,x_0}(x)$, 要如何證明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = 0$ 呢? 以下定理提供一個將餘項重新改寫的方法:

定理 8. 假設 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處具有直到 $(n+1)$-階都是連續的導函數, 而 $f(x) = T_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$, 則

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, \mathrm{d}t。$$

證明: 因爲

$$R_{n,x_0}(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

對於 $j = 1, 2, \ldots, n$, 將上面等式兩邊求導 j 次可得

$$R_{n,x_0}^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) - \sum_{k=j}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-j)!}(x - x_0)^{k-j},$$

特別地, 當 $j = n$ 的時候爲 $R_{n,x_0}^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)$; 再求導一次得到 $R_{n,x_0}^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$。

將 $x = x_0$ 代入後得到

$$R_{n,x_0}(x_0) = R'_{n,x_0}(x_0) = R''_{n,x_0}(x_0) = \cdots = R_{n,x_0}^{(n)}(x_0) = 0,$$

由微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus) 以及分部積分 (Integration by Parts) 公式得到

$$\begin{aligned}
R_{n,x_0}(x) &= R_{n,x_0}(x) - R_{n,x_0}(x_0) = \int_{x_0}^{x} R'_{n,x_0}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} R'_{n,x_0}(t)\,\mathrm{d}(t-x) \\
&= \Big[R'_{n,x_0}(t)(t-x)\Big]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x}(t-x)\,\mathrm{d}R'_{n,x_0}(t) = \int_{x_0}^{x} R''_{n,x_0}(t)(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x} R''_{n,x_0}(t)\,\mathrm{d}(t-x)^2 = -\frac{1}{2!}\left(\Big[R''_{n,x_0}(t)(t-x)^2\Big]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x}(t-x)^2\,\mathrm{d}R''_{n,x_0}(t)\right) \\
&= \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x} R'''_{n,x_0}(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} R^{(n+1)}_{n,x_0}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t。
\end{aligned}$$

□

爲了後來的討論, 我們還要把上述得到的餘項再進行兩種變形。首先, 利用積分第一均值定理 (First Mean Value Theorem for Integrals), 存在 $\xi = x_0 + \theta(x-x_0) \in [x_0, x]$, 其中 $\theta \in [0,1]$ 使得

$$\begin{aligned}
R_{n,x_0}(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},
\end{aligned}$$

這樣將餘項重新表達的方法稱爲 拉格朗日餘項 (Lagrange remainder)。

另一方面, 如果是把被積分函數看成是 $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \cdot 1$, 然後利用積分第一均值定理 (First Mean Value Theorem for Integrals), 存在 $\xi = x_0 + \theta(x-x_0) \in [x_0, x]$, 其中 $\theta \in [0,1]$ 使得

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}\int_{x_0}^{x} 1\,\mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}\cdot(x-x_0),$$

因爲

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\Big|_{\xi=x_0+\theta(x-x_0)} &= f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\,(x-(x_0+\theta(x-x_0)))^n \\
&= f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\,((1-\theta)(x-x_0))^n \\
&= f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n(x-x_0)^n,
\end{aligned}$$

所以

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$

這樣的表達式稱爲 柯西餘項 (Cauchy remainder)。

這裡或許多觀察一下拉格朗日餘項與柯西餘項的表達。拉格朗日餘項在結構上是比較漂亮的, 不論是函數求導的次數, 分母階乘的次數, 或是最後的冪次, 全部都是 $n+1$ 次; 至於柯西餘項, 函數求導的次數是 $f^{(n+1)}$, 而分母放的是 $n!$, 另外兩個量的冪次也不同, 一個是 n, 另一個是 $n+1$。

以下要建立四個重要函數的馬克勞林級數: $\mathrm{e}^x, \sin x, \cos x, (1+x)^m, m \in \mathbb{R}$, 並驗證兩者相同的範圍。

例 **9.** 試證: 對所有 $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$。

解. 令 $f(x) = \mathrm{e}^x$, 則 $f(0) = 1$。對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$, 所以 $f^{(n)}(0) = 1$, 因此函數 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 對應到的馬克勞林級數爲 $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$。

以下欲證明: 對所有 $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$: 由拉格朗日餘項 (Lagrange remainder) 知:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

其中 $\theta \in [0,1]$。因爲 $|R_n(x)| \le \frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$, 取 $N = [\![2|x|]\!]$, 當 $n+1 \ge N$ 時,

$$0 \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{|x|}{n+1} \cdot \cdots \cdot \frac{|x|}{N+1} \cdot \frac{|x|}{N} \cdot \cdots \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-N} \cdot \frac{|x|^N}{N!},$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-N} \cdot \frac{|x|^N}{N!} = 0$, 所以由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 知道 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0$。因此對所有 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$。

例 **10.** 試證: 對所有 $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$。

解. 令 $f(x) = \sin x$, 則對 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

$$\begin{array}{llll} f^{(4k)}(x) = \sin x & f^{(4k+1)}(x) = \cos x & f^{(4k+2)}(x) = -\sin x & f^{(4k+3)}(x) = -\cos x \\ f^{(4k)}(0) = 0 & f^{(4k+1)}(0) = 1 & f^{(4k+2)}(0) = 0 & f^{(4k+3)}(0) = -1, \end{array}$$

所以函數 $f(x) = \sin x$ 對應到的馬克勞林級數爲 $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$。

以下欲證明: 對所有 $x \in \mathbb{R}$, 餘項 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。由拉格朗日餘項 (Lagrange remainder) 知:

$$|R_{2n+2}(x)| = \left| \frac{f^{(2n+3)}(\theta x)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \right| = \left| \frac{\cos(\theta x) \cdot (-1)^{n-1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \right| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

其中 $\theta \in [0,1]$。取 $N = [\![2|x|]\!]$, 當 $n \ge N$ 時,

$$0 \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \le \frac{|x|}{2n+3} \cdot \cdots \cdot \frac{|x|}{N+1} \cdot \frac{|x|}{N} \cdot \cdots \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3-N} \cdot \frac{|x|^N}{N!},$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3-N} \cdot \frac{|x|^N}{N!} = 0$, 所以由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 知道 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} = 0$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} = 0$, 所以對所有 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$。

例 **11.** 試證: 對所有 $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$。

解. 各位可以仿照 $\sin x$ 的方式重新再證一次 $\cos x$ 的情形。然而, 我們也可以這麼想: 既然對所有 $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, 而且冪級數的逐點收斂就可以推得它是均勻收斂的, 所以由冪級數的逐項求導定理 (Term-by-Term Differentiation Theorem for Power Series), 兩邊對 x 求導之後即得 $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$。

最後, 我們要探討的是函數 $(1+x)^m$, 其中 $m \in \mathbb{R}$。

例 **12.** 給定 $m \in \mathbb{R}$, 試求函數 $f(x) = (1+x)^m$ 的馬克勞林級數。

解. 計算

- 因爲 $f(0) = 1^m = 1$, 所以 $c_0 = f(0) = 1$。
- 對於 $n \in \mathbb{N}$, 因爲 $f^{(n)}(x) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$, 得到 $f^{(n)}(0) = m(m-1)\cdots(m-n+1)$, 於是 $c_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$。

於是 $f(x) = (1+x)^m$ 的馬克勞林級數是

$$M(x) = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots。$$

定義 **13.** 給定 $m \in \mathbb{R}$, 而 n 爲非負整數, 定義 組合數 (combination number) 或 二項式係數 (binomial coefficient) 爲

$$C_n^m = \begin{cases} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} & 若\ n \in \mathbb{N} \\ 1 & 若\ n = 0。 \end{cases}$$

於是關於 $(1+x)^m$ 的馬克勞林級數可以寫成 $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n$, 稱爲 二項式級數 (binomial series)。

這裡解釋 C_n^m 的記號。在中學的時候各位學到的組合數是針對 m 爲自然數的情況, 即

$$C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!},$$

關於中間的記號 $\frac{m!}{n!(m-n)!}$, 因爲階乘的記號專門用在非負整數的情況, 而這個式子經過化簡後得到右式的寫法就不需要限定 m 是非負整數了, 故以右式重新定義組合數以將此概念推廣至一般實數 m。

從 $f(x) = (1+x)^m$ 得到了馬克勞林級數 $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n$, 現在要觀察的是 $M(x)$ 的定義域。由比值判別法 (Ratio Test) 得知:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}^m x^{n+1}}{C_n^m x^n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{m(m-1)\cdots(m-n+1)}\right|\cdot|x| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right|\cdot|x| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}\right|\cdot|x| = |x|, \end{aligned}$$

若 $|x| < 1$, 則 $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n$ 絕對收斂; 若 $|x| > 1$, 則 $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n$ 發散。

以下將討論二項式級數在端點的收斂性。端點的收斂性與 m 有關, 分成以下幾種情況討論:

(A) 若 $m \le -1$, 則

$$\begin{aligned}|C_n^m x^n| = |C_n^m (\pm 1)^n| = |C_n^m| &= \left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}\right| \\ &= \frac{|m||(m-1)||(m-2)|\cdots|(m-n+1)|}{n!} \ge \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{n!} = 1,\end{aligned}$$

所以由發散判別法 (Test of Divergence) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n$ 在 $x = \pm 1$ 處發散。

(B_{-1}) 若 $-1 < m < 0$ 且 $x = -1$, 則 $0 < -m < 1$, 且

$$\begin{aligned}C_n^m x^n &= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}(-1)^n \\ &= \frac{(-m)(1-m)(2-m)\cdots(n-1-m)}{n!} \\ &= \frac{(-m)}{n}\cdot\frac{(1-m)}{1}\cdot\frac{(2-m)}{2}\cdots\frac{(n-1-m)}{n-1} \ge -\frac{m}{n}。\end{aligned}$$

因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{m}{n}$ 發散(p-級數, $p=1$), 所以由比較判別法 (Comparison Test) 得知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n$ 在 $x = -1$ 處發散。

(B_1) 若 $-1 < m < 0$ 且 $x = 1$, 則 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}$ 形成交錯級數。計算

$$\begin{aligned}|C_n^m| &= \left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}\right| \\ &\ge \left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}\right|\left|\frac{m-n}{n+1}\right| = |C_{n+1}^m|,\end{aligned}$$

得知數列遞減。再則, 計算

$$\begin{aligned}|C_n^m| &= \left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}\right| \\ &= \left|\frac{m}{1}\cdot\frac{(m-1)}{2}\cdot\frac{(m-2)}{3}\cdots\frac{(m-n+1)}{n}\right| \\ &= \left|\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\right| = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{m+1}{k}\right),\end{aligned}$$

因爲

$$\begin{aligned}\ln|C_n^m| = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{m+1}{k}\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{m+1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} -\frac{m+1}{k} \\ &= -(m+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$, 得到

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty}|C_n^m|\right) = \lim_{n\to\infty}\ln|C_n^m| = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|C_n^m| = 0.$$

由交錯級數判別法 (Alternating Series Test) 得知級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n$ 收斂。

(C) 若 $m > 0$, 則

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{C_n^m}{C_{n+1}^m}\right|-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\right|}{\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}\right|}-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{|m-n|}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n-m}-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(1+m)}{n-m}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+m}{1-\frac{m}{n}}\right) = (1+m) > 1,\end{aligned}$$

故由拉比判別法 (Raabe's Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n$ 收斂。

現將 $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n$ 的收斂區間做一個結論:

(A) 若 $m \le -1$, 則收斂區間爲 $(-1, 1)$。

(B) 若 $-1 < m < 0$, 則收斂區間爲 $(-1, 1]$。

(C) 若 $m \ge 0, m \notin \mathbb{N}$, 則收斂區間爲 $[-1, 1]$; 若 $m \in \mathbb{N}$, 則 $M(x)$ 是一個多項式, 所以 $M(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定義。

最後, 我們還要證明餘項極限爲零。考慮柯西餘項 (Cauchy remainder)

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}\\ &= \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}\\ &= (n+1)C_{n+1}^m x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{m-1}, \quad \text{其中 } 0 \le \theta \le 1 \text{ (或是 } -1 \le \theta \le 0),\end{aligned}$$

由於冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)C_{n+1}^m x^{n+1}$ 的收斂半徑爲 1, 所以當 $x \in (-1, 1)$ 時, 它的一般項趨近於零, 即對所有 $x \in (-1, 1)$,

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)C_{n+1}^m x^{n+1} = 0,$$

又因爲 $0 \le \theta \le 1$, 且 $-1 < x < 1$, 所以

$$0 \le \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right) \le 1 \quad \text{且} \quad 0 < (1+\theta x)^{m-1} \le \max((1+|x|)^{m-1}, (1-|x|)^{m-1}),$$

由此得到: 若 $x \in (-1, 1)$, 則

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

於是

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^m x^n, \quad x \in (-1, 1)。$$

最後, 再利用阿貝爾第二定理 (Second Abel's Theorem) 得知, 對於 $m \in \mathbb{R}$, 若二項式級數在端點 $x = 1$ 或是 $x = -1$ 收斂的話, 那麼 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m = 2^m$ 或 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^m (-1)^n = 0$ 成立。

定義 14. 設 $f: I \to \mathbb{R}$, 其中 I 爲開區間, 以及 $x_0 \in I$,

(A) 若存在 $\delta > 0$ 以及一個冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ 使得對所有 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I$ 都有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,$$

則稱函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處 解析 (analytic at $x = x_0$)。

(B) 若函數 $f(x)$ 在區間 I 上的每個點都解析, 則稱 $f(x)$ 在 I 上是一個 解析函數 (analytic function on I)。

由上面的討論, 我們可以總結以下結果:

(1) 多項式 (polynomials) $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在 $\mathbb{R}$ 上是解析函數。

(2) 有理函數 (rational functions) $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, 其中 $p(x), q(x)$ 爲多項式, 在其定義域上是解析函數。

(3) 指數函數 (exponential functions) $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上是解析函數。

(4) 對數函數 (logarithmic functions) $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ 在 $(0, \infty)$ 上是解析函數。

(5) 正弦函數 $f(x) = \sin x$ 與餘弦函數 $f(x) = \cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是解析函數。

(6) 冪函數 (power functions) $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ 在其定義域上是解析函數。

這裡補充說明冪函數的解析性質。給定 x_0 是 $f(x) = x^\alpha$ 的定義域中的一點, 因爲

$$x^\alpha = (x_0 + (x-x_0))^\alpha = (x_0)^\alpha \left(1 + \left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)\right)^\alpha,$$

由前面對於 $(1+x)^m, m \in \mathbb{R}$ 在 $|x| < 1$ 上是解析函數知道: $f(x) = x^\alpha$ 在 $|x - x_0| < |x_0|$ 上是解析函數。

以下列出解析函數具有的運算性質:

(A) 假設 $f(x), g(x)$ 在 $x = x_0$ 處解析, 而 $c \in \mathbb{R}$, 則 $f(x)+g(x), f(x)-g(x), cf(x), f(x)g(x)$ 也在 $x = x_0$ 處解析; 若 $g(x_0) \neq 0$, 則 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 也在 $x = x_0$ 處解析。

(B) 假設 $f(x), g(x)$ 在 $x = x_0$ 處解析, 而且函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x = x_0$ 的極限存在, 則 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的定義域可以擴大至包含 $x = x_0$ 這個點, 而且函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x = x_0$ 處解析。

(C) 假設 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處解析, 而函數 $g(y)$ 在 $y = f(x_0)$ 處解析, 則 $g \circ f(x) = g(f(x))$ 在 $x = x_0$ 處解析。

關於解析函數與冪級數的操作還有很多故事, 但這裡就先暫時打住, 各位可以回想當初微積分的時候學到很多有關冪級數的操作手法, 在數學上都可以證明那些操作可行。