6

黎曼積分理論

這一章要介紹黎曼積分理論, 單元 6.1 會從極限精確定義的方式了解函數在有界閉區間上定積分的意義。各位可能在微積分課程中學到函數在有界閉區間上的定積分關於定義域的分割是採用等分的方式處理, 實際上將區間等分這件事情並非必要的; 也就是說, 我們可以探討一般的分割, 即針對分割後的區間寬窄不一的情況下討論定積分, 只是微積分課程中採用等分的過程比較容易描述一些事情, 而且微積分課的重點是要讓各位快速了解各種微積分理論的結果而將焦點著重在如何確實熟練其操作與計算。若要講求數學論述的嚴謹性, 對於寬窄不一的分割之黎曼和的討論有其必要性, 這是因爲在證明定積分的變數變換法則時, 除非變換是一種線性的關係, 否則經過一個複雜的變換下不可能會保持等分的特性。而單元 6.1 也會介紹幾個定積分的性質像是線性性質還有積分的保序性。

單元 6.2 則是要給出四個有界閉區間上的有界函數定積分存在之等價敘述。欲證明這四個等價敘述, 我們將引進達布上和與達布下和的概念, 然後從中仔細探討黎曼和對於區間分割數的多寡還有樣本點選取之間的關係。這四個黎曼可積的充分必要條件都有各自的特色值得細細體會, 甚至它們將牽涉到欲證明一個有界函數在有界閉區間上是否黎曼可積時檢驗條件的難易度, 以便在單元 6.3 會根據函數的屬性而選擇適當的等價敘述證明函數是否黎曼可積。在那個部份, 我們會證明一些比較熟知的可積分函數, 像是有界閉區間上的連續函數、分段連續函數還有單調函數; 也會介紹一些不是那麼顯然的函數討論其可積性。此外, 單元 6.3 會再證明一些黎曼可積分的性質, 例如: 定積分對於區間的可加性、積分上下限互換與定積分的正負號差異、絕對可積性以及積分第一均值定理。

至於單元 6.4 的主軸是要證明微積分基本定理, 相較於微積分課程中介紹的是連續函數的版本, 這裡會把函數的條件放寬到只假設函數是黎曼可積分的時候如何建立該理論。若各位看完證明後, 將會發現到用精確定義的方式證明微積分基本定理比起微積分課程中的證明篇幅還要精簡許多, 甚至可以把問題還有觀點分得更細。至於微積分基本定理與定積分還有反導函數的關係我們也會在此全部重新檢視。而這個單元我們還會證明定積分的變數變換法則、分部積分公式以及積分第二均值定理。積分第二均值定理是爲了下一章討論瑕積分理論時而進行的前置作業。

關於定積分的應用層面很廣, 舉凡幾何量像是曲線長度、區域面積、曲面的表面積、實體體積外, 物理上也有很多觀念像是質心、轉動慣量以及施力於質點的作功問題都可轉成定積分。單元 6.5 將以曲線的弧長爲例推得其定積分的表達式。關於曲線弧長所對應到的定積分表達式並不是一個顯然的結果, 證明的過程甚至要用到函數的均勻連續性質還有可微分函數的均值定理; 另外, 各種三角不等式的建立也很微妙, 所以值得好好思考其論述上的精神。

6.1 定積分

定義 1. 給定在閉區間 $[a,b]$ 上有定義的函數 $f(x)$, 現進行以下操作:

(1) 在 $[a,b]$ 當中選取 $n+1$ 個點, 記爲 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 我們稱 P 是區間 $[a,b]$ 的一個 分割 (partition)。對於 $i = 1,2,\ldots,n$, 記 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 以及 $\|P\| = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} |\Delta x_i|$ 表示這個分割的最大寬度。

(2) 在每個小區間 $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2,\ldots,n$ 當中任選一點 ξ_i, 稱爲 樣本點 (sample point)。

(3) 定義 黎曼和 (Riemann sum): $R(f,\xi,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。

若有一實數 $A \in \mathbb{R}$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得對 $[a,b]$ 區間上的任意分割 P 與任意的樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要分割的最大寬度 $\|P\| < \delta$, 都有

$$|R(f,\xi,P) - A| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - A\right| < \varepsilon,$$

這時稱函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 黎曼可積的 (Riemann integrable), 或簡稱 可積分的 (integrable)。而實數 A 稱爲函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 定積分 (definite integral), 我們會用符號

$$A \overset{\text{記}}{=} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

表示此概念。

這裡先說明定積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 每個位置的專用術語:

(A) $f(x)$ 稱爲 被積分函數 (integrand)。

(B) $\int$ 稱爲 積分符號 (sign of integration)。

(C) a 稱爲定積分的 下限 (lower limit)。

(D) b 稱爲定積分的 上限 (upper limit)。

以下舉例說明如何利用定積分的定義證明函數在閉區間上是可積分的或是不可積分的。

例 2. 給定 $c \in \mathbb{R}$, 證明 $f(x) = c$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的。

證明: 給定 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = b - a > 0$, 對任何在 $[a,b]$ 上的分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 與任意的樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2,\ldots,n$, 只要 $\|P\| < \delta$, 都有

$$\begin{aligned}|R(f,\xi,P) - c(b-a)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - c(b-a)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i - c(b-a)\right| \\ &= \left|c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) - c(b-a)\right| = |c(b-a) - c(b-a)| = 0 < \varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $f(x) = c$ 是可積分的。 □

例 **3.** 證明 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b], a\geq 0$ 上是可積分的。

證明: 給定區間 $[a,b]$ 上的任何一個分割 $P: 0\leq a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 我們先得到取了一組特別的樣本點下之黎曼和: 考慮樣本點

$$\xi_i^*=\sqrt{\frac{x_i^2+x_ix_{i-1}+x_{i-1}^2}{3}}\in[x_{i-1},x_i],$$

則

$$\begin{aligned}R(f,\xi^*,P)&=\sum_{i=1}^n f(\xi_i^*)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2+x_ix_{i-1}+x_{i-1}^2}{3}\cdot(x_i-x_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^n\frac{1}{3}\left((x_i)^3-(x_{i-1})^3\right)=\frac{1}{3}(b^3-a^3),\end{aligned}$$

所以 $A=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$ 是函數 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b], a\geq 0$ 上一個可能的定積分值。現在要證明: 任何其它的黎曼和 $R(f,\xi,P)$ 與 A 值的差可受到控制: 若在分割 P 上選取其它的樣本點 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 計算

$$\begin{aligned}|R(f,\xi,P)-A|&=|R(f,\xi,P)-R(f,\xi^*,P)|=\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^n f(\xi_i^*)\Delta x_i\right|\\&=\left|\sum_{i=1}^n\left((\xi_i)^2-(\xi_i^*)^2\right)\Delta x_i\right|\leq\sum_{i=1}^n|\xi_i+\xi_i^*||\xi_i-\xi_i^*|\Delta x_i\\&\leq\sum_{i=1}^n 2b\|P\|\Delta x_i=2b(b-a)\|P\|,\end{aligned}$$

對任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2b(b-a)}>0$, 則對任意分割 $P: 0\leq a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 與任意樣本點 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 只要 $\|P\|<\delta$, 都有

$$|R(f,\xi,P)-A|\leq 2b(b-a)\|P\|<2b(b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{2b(b-a)}=\varepsilon,$$

因此 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b], a\geq 0$ 上是可積分的。 □

當我們回顧 例 **3** 的證明過程, 那時所採取的策略是: 給定分割後, 先找一組特別的樣本點使其黎曼和與定積分的值一致, 然後再估計其它樣本點所得之黎曼和與這個定積分值的差。由於該定積分值可寫成黎曼和的形式, 這樣能夠整理與合併以確實估計。

這時將引發以下幾個問題: (A) 由於我們先學了微積分, 才會預先知道這個定積分的值, 倘偌是其它函數, 而且不曉得其定積分的值時, 這個策略大概也行不通。此時又該怎麼辦呢? 關於這個問題, 其實在之前學數列極限或是函數極限的情況一樣, 爲了要闡述一個概念的精確定義, 所以先採用一種馬後炮的方式 — 預知極根值 — 以說明這之間的邏輯, 之後才會繼續引申極限更深刻的意涵。(B) 這個例子特別的地方在於: 我們可以找到一組樣本點使其黎曼和與定積分值一模一樣, 可是這件事情一般來說都會發生嗎? 還是說「定積分的值可以用某個黎曼和實現」這件事是需要有什麼限制或是什麼條

件下才會成立? 更進一步地問: 是否有什麼方法或判別式可以告知定積分的值會和某一組樣本點所成的黎曼和完全相等? 關於這個問題, 我們要到單元 6.4 才能解釋清楚。

其實這個例題還有一件事可以追問: 爲什麼要假定 $a \geq 0$ 呢? 難道不能隨意設定一般的 $[a, b]$ 嗎? 這個問題的解釋是: 我們當然可以討論一般的有界閉區間, 只是在這個時候討論會稍嫌複雜一此。比方說, 若討論的區間跨越到負的區域時, 那麼所選的樣本點就應選取負的平方根, 或是分割後的小區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 是 $x_{i-1} < 0, x_i > 0$ 的時候, 那麼 $\xi_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ 這件事也要小心驗證。簡單說來, 這個例題是希望大家好好體會定積分的意義, 所以不應被必須分成很多情況討論的現象而干擾。

以下我們舉一個不可積分的例子。

例 **4.** 證明狄立克萊函數 (Dirichlet function)

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \text{ 是有理數} \\ 0 & \text{若 } x \text{ 是無理數} \end{cases}$$

在 $[a, b]$ 上是不可積分的 (not integrable)。

證明: 因爲在 $[a, b]$ 上的有理數與無理數具有稠密性, 所以對任意分割 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 若在每個區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 中都選取有理數爲樣本點, 即 $\xi_i^* \in \mathbb{Q} \cap [x_{i-1}, x_i]$, 則

$$R(D, \xi^*, P) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = (b - a) > 0;$$

另一方面, 若在每個區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 中都選取無理數爲樣本點, 即 $\xi_i^{**} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [x_{i-1}, x_i]$, 則

$$R(D, \xi^{**}, P) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i^{**})\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0。$$

上面的討論欲說明: 任何分割 P 總是可以取到一種黎曼和是 $(b - a)$ 以及另一種黎曼和是 0。若狄立克萊函數在 $[a, b]$ 上是可積分的, 記 $A = \int_a^b D(x)\,\mathrm{d}x$。

(A) <u>若 $A \geq \frac{b-a}{2}$</u>, 取 $\varepsilon_0 = \frac{b-a}{2} > 0$, 對任意 $\delta > 0$, 取分割 P 滿足 $\|P\| < \delta$ 以及樣本點 ξ^{**}, 則

$$|R(D, \xi^{**}, P) - A| = |0 - A| = |-A| = A \geq \frac{b-a}{2} = \varepsilon_0,$$

(B) <u>若 $A < \frac{b-a}{2}$</u>, 取 $\varepsilon_0 = \frac{b-a}{2} > 0$, 對任意 $\delta > 0$, 取分割 P 滿足 $\|P\| < \delta$ 以及樣本點 ξ^*, 則

$$|R(D, \xi^*, P) - A| = |b - a - A| = b - a - A > b - a - \left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{b-a}{2} = \varepsilon_0,$$

(C) 綜合 (A) 與 (B) 的結果得知: 不存在實數 A 滿足定積分的條件, 因此狄立克萊函數 $D(x)$ 在 $[a, b]$ 上是不可積分的。

□

由 例 **4**, 除了告知存在一些不可積分的函數之外, 還可以再進一步知道: 一個有界的函數不一定是可積分的。但是以下定理將證明若函數是可積分的, 則函數必有界。

定理 5. 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界函數。

證明: 記 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定積分爲 A, 則對 $\varepsilon = 1 > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得對任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 與任意的樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\|P\| < \delta$, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - A\right| < 1,$$

由此先得到一個黎曼和的估計式:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - A + A\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - A\right| + |A| < 1 + |A|。 \tag{1}$$

若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是無界的函數, 則存在 $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ 使得函數 $f(x)$ 在區間 $[x_{j-1}, x_j]$ 上無界, 所以對於 $i \neq j$, 對任意取定的 $\xi_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, 必存在一個樣本點 $\xi_j^* \in [x_{j-1}, x_j]$ 使得

$$|f(\xi_j^*)| > \frac{\left|\sum\limits_{i\neq j} f(\xi_i^*)\Delta x_i\right| + 1 + |A|}{\Delta x_j},$$

由上述條件選到的樣本點所得之黎曼和有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta x_i\right| &= \left|f(\xi_j^*)\Delta x_j + \sum_{i\neq j} f(\xi_i^*)\Delta x_i\right| \ge \left|\left|f(\xi_j^*)\Delta x_j\right| - \left|\sum_{i\neq j} f(\xi_i^*)\Delta x_i\right|\right| \\ &= \left|f(\xi_j^*)\Delta x_j\right| - \left|\sum_{i\neq j} f(\xi_i^*)\Delta x_i\right| > 1 + |A|,\end{aligned}$$

這和 (1) 所得的不等式矛盾。因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界函數。 □

這裡應注意的是: 現階段不要把上面定理和瑕積分 (improper integral) 的討論混爲一談, 這裡純粹是討論函數在有界閉區間上定積分的性質。瑕積分是另外一個延伸的概念, 我們會到定積分的理論都介紹完畢之後才會研究瑕積分。

接下來要介紹兩個定積分的性質:

定理 6 (定積分的線性性質). 若函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都是可積分的, 則對任何 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 函數 $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是可積分的, 並且

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x。$$

證明: 因爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的, 所以存在實數 A_f, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$ 使得對任何在 $[a,b]$ 區間上的分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 與任意樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\|P\| < \delta_1$, 都有

$$|R(f,\xi,P) - A_f| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - A_f\right| < \varepsilon,$$

因爲 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的, 所以存在實數 A_g, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$ 使得對任何在 $[a,b]$ 區間上的分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 與任意樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\|P\| < \delta_2$, 都有

$$|R(g,\xi,P) - A_g| = \left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - A_g\right| < \varepsilon。$$

給定 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, 則對 $[a,b]$ 區間上的任何分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 與任意樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\|P\| < \delta$, 都有

$$\begin{aligned}
&|R(c_1 f + c_2 g, \xi, P) - (c_1 A_f + c_2 A_g)| \\
&= |c_1 R(f,\xi,P) + c_2 R(g,\xi,P) - (c_1 A_f + c_2 A_g)| \\
&= |c_1(R(f,\xi,P) - A_f) + c_2(R(g,\xi,P) - A_g)| \\
&\le |c_1|\,|R(f,\xi,P) - A_f| + |c_2|\,|R(g,\xi,P) - A_g| < (|c_1| + |c_2|)\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

因此 $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是可積分的, 並且

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x。$$

□

若以線性代數的語言描述這個定理, 則可以說明: 定積分是在可積分函數空間當中的一個線性泛函 (linear functional)。

定理 7 (定積分的保序性). 若函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都是可積分的, 而且對所有 $x \in [a,b]$ 都有 $f(x) \le g(x)$, 則

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x。$$

證明:

(A) 首先證明: 若 $h(x) \ge 0$ 是在 $[a,b]$ 上的可積分函數, 則 $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$。因爲在 $[a,b]$ 上都有 $h(x) \ge 0$, 則對任意的分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 與任意的樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都有

$$\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\Delta x_i \ge 0,$$

若 $A = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x < 0$, 取 $\varepsilon = -\frac{A}{2} > 0$, 則存在 $\delta > 0$ 使得對任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 與任意的樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\|P\| < \delta$, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\Delta x_i - A\right| < -\frac{A}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\Delta x_i < \frac{A}{2} < 0$$

矛盾, 所以 $A = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$。

(B) 對於可積分函數 $f(x)$ 與 $g(x)$, 若 $f(x) \le g(x)$, 令 $h(x) = g(x) - f(x) \ge 0$, 由 **定理 6** 知: $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的函數, 而且

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

因此 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$。

□

6.2 黎曼可積的充要條件

前一節定義了函數是可積分的意思, 並得到在有界閉區間上的函數 $f(x)$ 如果是可積分的, 則函數 $f(x)$ 一定是有界函數; 換言之, 對於一個在要討論的範圍內是無界的函數, 其定積分一定不存在。於是以下的討論, 我們就可以將焦點放在有界函數, 繼續追問其定積分是否存在。這一節將給出有界閉區間上的有界函數是黎曼可積分的四個等價敘述。

假設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 即存在 $m, M \in \mathbb{R}$ 使得對所有 $x \in [a,b]$ 都有 $m \le f(x) \le M$。給定一個分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 記 M_i 與 m_i 分別表示在區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上函數 $f(x)$ 的上確界 (supremum) 與下確界 (infimum); 也就是說,

$$M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \text{ 其中 } i = 1, 2, \ldots, n。$$

由實數完備性 (completeness of real number system) 知: 對所有 $i = 1, 2, \ldots, n$, $M_i, m_i \in \mathbb{R}$。

現考慮函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上對於分割 P 的兩個實數:

- 達布上和 (upper Darboux sum): $\overline{S}(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$。
- 達布下和 (lower Darboux sum): $\underline{S}(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$。

注意到達布上和與達布下和分別是拿 M_i 與 m_i 與 Δx_i 相乘再取和, 因爲上確界與下確界不一定是函數在某一點的取值, 所以它們不見得是一種黎曼和;但是達布上和與達布下和提供了一個對於黎曼和初步的估計。

引理 1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 對於一個分割 P 所得之黎曼和 $R(f,\xi,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 都有

$$m(b-a) \le \underline{S}(P) \le R(f,\xi,P) \le \overline{S}(P) \le M(b-a)。$$

證明: 因爲對任何樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都有 $m \le m_i \le f(\xi_i) \le M_i \le M$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i,$$

得到 $m(b-a) \le \underline{S}(P) \le R(f,\xi,P) \le \overline{S}(P) \le M(b-a)$。 □

以下引理將告知達布上和與達布下和也可以用另外的方式重現:

引理 2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 對於一個分割 P, 其達布上和 $\overline{S}(P)$ 與達布下和 $\underline{S}(P)$ 分別與另外兩個值相同:

$$\overline{S}(P) = \sup_{\xi} R(f,\xi,P) \overset{\text{定義}}{=\!=} \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,\middle|\, \xi_i \in [x_{i-1},x_i], i=1,2,\ldots,n \right\}$$
$$\underline{S}(P) = \inf_{\xi} R(f,\xi,P) \overset{\text{定義}}{=\!=} \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,\middle|\, \xi_i \in [x_{i-1},x_i], i=1,2,\ldots,n \right\}。$$

在證明引理之前, 各位應該要先體會這些記號的意義。以達布上和爲例, 給定好分割 P 之後, 達布上和 $\overline{S}(P)$ 是先在每個小區間上得到函數的上確界, 然後乘上寬度後再加總。而 $\sup\limits_{\xi} R(f,\xi,P)$ 則是先選取樣本點之後得到黎曼和, 再對所有的黎曼和考慮其上確界。於是 引理 **2** 是要證明這兩個概念對應到的實數會相同。

證明: 由 引理 **1** 知道 $\overline{S}(P)$ 是對於分割 P 所得黎曼和 $R(f,\xi,P)$ 的一個上界。以下欲證明: 對任意 $\varepsilon>0$, $\overline{S}(P)-\varepsilon$ 不再是 $R(f,\xi,P)$ 的上界: 因爲 $M_i = \sup\{f(x)|x\in[x_{i-1},x_i]\}$, 由上確界的定義得知: 對任意 $\varepsilon>0$, 對所有 $i=1,2,\ldots,n$, 存在 $\xi_i^* \in [x_{i-1},x_i]$ 使得 $f(\xi_i^*) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$, 所以

$$\begin{aligned} R(f,\xi^*,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta x_i > \sum_{i=1}^{n}\left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \overline{S}(P)-\varepsilon。 \end{aligned}$$

因此

$$\overline{S}(P) = \sup_{\xi} R(f,\xi,P) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,\middle|\, \xi_i \in [x_{i-1},x_i], i=1,2,\ldots,n \right\}。$$

至於達布下和的討論也是類似的。由 引理 **1** 知道 $\underline{S}(P)$ 是對於分割 P 所得黎曼和 $R(f,\xi,P)$ 的一個下界, 以下欲證明: 對任意 $\varepsilon>0$, $\underline{S}(P)+\varepsilon$ 不再是 $R(f,\xi,P)$ 的下界: 因爲 $m_i = \inf\{f(x)|x\in[x_{i-1},x_i]\}$, 由下確界的定義得知: 對任意 $\varepsilon>0$, 對所有 $i=1,2,\ldots,n$, 存在 $\xi_i^{**} \in [x_{i-1},x_i]$ 使得 $f(\xi_i^{**}) < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}$, 所以

$$\begin{aligned} R(f,\xi^{**},P) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{**})\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n}\left(m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i + \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \underline{S}(P)+\varepsilon, \end{aligned}$$

因此

$$\underline{S}(P) = \inf_{\xi} R(f,\xi,P) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,\middle|\, \xi_i \in [x_{i-1},x_i], i=1,2,\ldots,n \right\}。$$

□

引理 **2** 是在討論達布上和與達布下和在固定一個分割 P 下對於樣本點選取不同之關係, 以下要觀察的是在不同的分割之下達布上和與達布下和之關係:

引理 **3.** 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 給定 $[a,b]$ 的一個分割 P, 若從分割 P 當中再增加 k 個新的分割點而形成分割 P_k, 其中 $k \in \mathbb{N}$, 則它們的達布上和與達布下和有以下關係:

$$\underline{S}(P) \le \underline{S}(P_k) \le \overline{S}(P_k) \le \overline{S}(P);$$

更進一步地說, 我們有以下估計式:

$$\begin{aligned}\overline{S}(P) - k(M-m)\|P\| &\le \overline{S}(P_k) \le \overline{S}(P),\\ \underline{S}(P) \le \underline{S}(P_k) &\le \underline{S}(P) + k(M-m)\|P\|。\end{aligned}$$

證明: 先看 $k=1$ 的情況。給定分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 假設 y 是增加的分割點, 則存在 $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ 使得 $y \in (x_{j-1}, x_j)$。記 $M_j' = \sup\limits_{[x_{j-1},y]} f(x)$ 與 $M_j'' = \sup\limits_{[y,x_j]} f(x)$, 則

$$\begin{aligned} m \le M_j' \le M_j \le M\\ m \le M_j'' \le M_j \le M。\end{aligned}$$

比較分割 P 和 P_1, 除了區間 $[x_{j-1}, x_j]$ 之外都一樣, 而 $[x_{j-1}, x_j]$ 分成 $[x_{j-1}, y] \cup [y, x_j]$, 因此從達布上和的定義得知:

$$\begin{aligned}\overline{S}(P) - \overline{S}(P_1) &= M_j(x_j - x_{j-1}) - M_j'(y - x_{j-1}) - M_j''(x_j - y)\\ &= M_j(x_j - y) + M_j(y - x_{j-1}) - M_j'(y - x_{j-1}) - M_j''(x_j - y)\\ &= (M_j - M_j'')(x_j - y) + (M_j - M_j')(y - x_{j-1}) \ge 0。\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\overline{S}(P) - \overline{S}(P_1) &= (M_j - M_j'')(x_j - y) + (M_j - M_j')(y - x_{j-1})\\ &\le (M-m)(x_j - y) + (M-m)(y - x_{j-1}) = (M-m)\Delta x_j \le (M-m)\|P\|,\end{aligned}$$

因此 $\overline{S}(P) - (M-m)\|P\| \le \overline{S}(P_1)$。

對於 $k \in \mathbb{N}, k > 1$, 則 P_k 可以看成是由分割 P 開始, 一次增加一個分割點, 增加 k 次而得; 也就是說, 逐次考慮 $P, P_1, P_2, \ldots, P_k$, 則 $\overline{S}(P_k) \le \cdots \le \overline{S}(P_2) \le \overline{S}(P_1) \le \overline{S}(P)$, 並且 $\|P_k\| \le \cdots \le \|P_2\| \le \|P_1\| \le \|P\|$。因爲

$$\begin{aligned}\overline{S}(P) - (M-m)\|P\| &\le \overline{S}(P_1)\\ \overline{S}(P_1) - (M-m)\|P_1\| &\le \overline{S}(P_2)\\ &\cdots\\ \overline{S}(P_{k-1}) - (M-m)\|P_{k-1}\| &\le \overline{S}(P_k),\end{aligned}$$

加總之後則有

$$\overline{S}(P) - k(M-m)\|P\| \le \overline{S}(P) - (M-m)\left(\|P\| + \|P_1\| + \cdots \|P_{k-1}\|\right) \le \overline{S}(P_k)。$$

而達布下和的情況也是類似的。先看 $k=1$ 的情況。給定分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 假設 y 是增加的分割點, 則存在 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 使得 $y \in (x_{j-1}, x_j)$。記 $m'_j = \inf\limits_{[x_{j-1}, y]} f(x)$ 與 $m''_j = \inf\limits_{[y, x_j]} f(x)$, 則

$$\begin{aligned} m \le m_j \le m'_j \le M \\ m \le m_j \le m''_j \le M, \end{aligned}$$

比較分割 P 和 P_1, 除了區間 $[x_{j-1}, x_j]$ 之外都不變, 而 $[x_{j-1}, x_j]$ 分成 $[x_{j-1}, y] \cup [y, x_j]$, 因此從達布下和的定義得知:

$$\begin{aligned} \underline{S}(P_1) - \underline{S}(P) &= m'_j(y - x_{j-1}) + m''_j(x_j - y) - m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= m'_j(y - x_{j-1}) + m''_j(x_j - y) - m_j(x_j - y) - m_j(y - x_{j-1}) \\ &= (m''_j - m_j)(x_j - y) + (m'_j - m_j)(y - x_{j-1}) \ge 0。 \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \underline{S}(P_1) - \underline{S}(P) &= (m''_j - m_j)(x_j - y) + (m'_j - m_j)(y - x_{j-1}) \\ &\le (M-m)(x_j - y) - (M-m)(y - x_{j-1}) = (M-m)\Delta x_j \le (M-m)\|P\|, \end{aligned}$$

因此 $\underline{S}(P_1) \le \underline{S}(P) + (M-m)\|P\|$。

對於 $k \in \mathbb{N}, k > 1$, 則 P_k 可以看成是由分割 P 開始, 一次增加一個分割點, 增加 k 次而得, 也就是說, 逐次考慮 $P, P_1, P_2, \ldots, P_k$, 則 $\underline{S}(P) \le \underline{S}(P_1) \le \underline{S}(P_2) \le \cdots \le \underline{S}(P_k)$, 並且 $\|P_k\| \le \cdots \le \|P_2\| \le \|P_1\| \le \|P\|$。因爲

$$\begin{aligned} \underline{S}(P_1) &\le \underline{S}(P) + (M-m)\|P\| \\ \underline{S}(P_2) &\le \underline{S}(P_1) + (M-m)\|P_1\| \\ &\cdots \\ \underline{S}(P_k) &\le \underline{S}(P_{k-1}) + (M-m)\|P_{k-1}\|, \end{aligned}$$

加總之後則有

$$\underline{S}(P_k) \le \underline{S}(P) + (M-m)\left(\|P\| + \|P_1\| + \cdots \|P_{k-1}\|\right) \le \underline{S}(P) + k(M-m)\|P\|。$$

□

這裡應注意的是: 若兩個分割之間有包含的關係時, 兩者的達布上和才有大小關係 — 分割數較多的達布上和小於等於分割數較少的達布上和, 而它們的達布下和才有: 分割數較多的達布下和大於等於分割數較少的達布下和。

現在要得到任何分割之下達布上和與達布下和的關係。

引理 4. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 對任意兩分割 P' 與 P'' 都有 $\underline{S}(P') \le \overline{S}(P'')$。

證明: 將 P' 與 P'' 的分割點取出並將分割點由小到大依序排列後得到對於 $[a,b]$ 區間新的分割 P, 由 引理 **3** 可得:

$$\underline{S}(P') \le \underline{S}(P) \le \overline{S}(P) \le \overline{S}(P'')。$$

□

給定在 $[a,b]$ 上的有界函數 $f(x)$, 考慮以下兩實數:

- 函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間的 上積分 (upper integral): $L = \inf\limits_P\{\overline{S}(P)\}$。
- 函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間的 下積分 (lower integral): $l = \sup\limits_P\{\underline{S}(P)\}$。

因爲 $m(b-a) \le \underline{S}(P) \le \overline{S}(P) \le M(b-a)$ 表示 $\{\overline{S}(P)\}$ 與 $\{\underline{S}(P)\}$ 有界, 又兩集合都是非空集合, 所以 $L, l \in \mathbb{R}$。

以下定理將說明函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間的上積分與下積分有另外的詮釋。

定理 5. 關於函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上積分 L 與下積分 l 可以改成對於分割的寬度取極限的形式:

$$L \overset{\text{記}}{=} \inf_P\{\overline{S}(P)\} = \lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(P) \quad 與 \quad l \overset{\text{記}}{=} \sup_P\{\underline{S}(P)\} = \lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(P)。$$

證明: 先看上積分的情況。給定任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 L 是 $\{\overline{S}(P)\}$ 的下確界, 則 $L + \frac{\varepsilon}{2}$ 不再是 $\{\overline{S}(P)\}$ 的下界, 所以存在一個分割 $P' = a = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_k = b$ 使得 $L \le \overline{S}(P') < L + \frac{\varepsilon}{2}$, 即 $0 \le \overline{S}(P') - L < \frac{\varepsilon}{2}$。

對此 $\varepsilon > 0$, 考慮 $\delta = \frac{\varepsilon}{2(k-1)(M-m)} > 0$, 以下將證明: 對任意一個分割 P, 只要 $\|P\| < \delta$, 則 $\overline{S}(P) \le L + \varepsilon$。這麼一來, 得到 $|\overline{S}(P) - L| < \varepsilon$ 則表示 $L = \inf\limits_P\{\overline{S}(P)\} = \lim\limits_{\|P\|\to 0} \overline{S}(P)$。

給定 P 滿足 $\|P\| < \delta$, 現將 P 和 P' 的分割點取出並將分割點由小到大依序排列後得到對於 $[a,b]$ 區間新的分割 P'', 則 P'' 的分割點個數比起分割 P 來說多了 k_0 個分割點, 其中 $k_0 \le k-1$, 則

$$\overline{S}(P) - k_0(M-m)\|P\| \le \overline{S}(P'') \le \overline{S}(P),$$

於是

$$\begin{aligned} L \le \overline{S}(P) &\le \overline{S}(P'') + k_0(M-m)\|P\| \\ &< \overline{S}(P') + k_0(M-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(k-1)(M-m)} < L + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = L + \varepsilon。 \end{aligned}$$

再看下積分的情況。給定任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 l 是 $\{\underline{S}(P)\}$ 的上確界, 則 $l - \frac{\varepsilon}{2}$ 不再是 $\{\underline{S}(P)\}$ 的上界, 所以存在一個分割 $P' = a = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_k = b$ 使得 $l - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(P') \le l$, 即 $-\frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(P') - l \le 0$。

對此 $\varepsilon > 0$, 考慮 $\delta = \frac{\varepsilon}{2(k-1)(M-m)} > 0$, 以下將證明: 對任意一個分割 P, 只要 $\|P\| < \delta$, 則 $-\varepsilon < \underline{S}(P) - l \leq 0$。這麼一來, 得到 $|\underline{S}(P) - l| < \varepsilon$ 則表示 $l = \sup\limits_{P}\{\underline{S}(P)\} = \lim\limits_{\|P\|\to 0} \underline{S}(P)$。

給定 P 滿足 $\|P\| < \delta$, 現將 P 和 P' 的分割點取出並將分割點由小到大依序排列後得到對於 $[a,b]$ 區間新的分割 P'', 則 P'' 的分割點個數比起分割 P 來說多了 k_0 個分割點, 其中 $k_0 \leq k-1$, 則

$$\underline{S}(P) \leq \underline{S}(P'') \leq \underline{S}(P) + k_0(M-m)\|P\|,$$

於是

$$\begin{aligned} l \geq \underline{S}(P) &\geq \underline{S}(P'') - k_0(M-m)\|P\| \\ &> \underline{S}(P'') - k_0(M-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(k-1)(M-m)} > l - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = l - \varepsilon。 \end{aligned}$$

□

對於達布上和與達布下和以及上積分還有下積分的充分討論後, 現在要證明函數黎曼可積分的第一充要條件。

定理 6 (黎曼可積的第一充要條件). 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積分的充分必要條件是

$$\lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(P) = \lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(P), \quad 也就是 \quad \inf_{P}\{\overline{S}(P)\} = \sup_{P}\{\underline{S}(P)\} \quad 或是 \quad L = l。$$

證明: $(\Rightarrow)$ 因爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的, 記 $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 爲其定積分, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得對任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 與任意樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\|P\| < \delta$, 都有

$$|R(f,\xi,P) - A| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - A\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

因爲 $\overline{S}(P) = \sup\limits_{\xi}\{R(f,\xi,P)\}$, 所以存在 ξ' 使得 $\overline{S}(P) - \frac{\varepsilon}{2} \leq R(f,\xi',P)$, 所以

$$\begin{aligned} \left|\overline{S}(P) - A\right| &= \left|\overline{S}(P) - R(f,\xi',P) + R(f,\xi',P) - A\right| \\ &\leq \left|\overline{S}(P) - R(f,\xi',P)\right| + \left|R(f,\xi',P) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

因爲 $\underline{S}(P) = \inf\limits_{\xi}\{R(f,\xi,P)\}$, 所以存在 ξ'' 使得 $R(f,\xi'',P) \leq \underline{S}(P) + \frac{\varepsilon}{2}$, 所以

$$\begin{aligned} |\underline{S}(P) - A| &= \left|\underline{S}(P) - R(f,\xi'',P) + R(f,\xi'',P) - A\right| \\ &\leq \left|\underline{S}(P) - R(f,\xi'',P)\right| + \left|R(f,\xi'',P) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \overline{S}(P) = \lim\limits_{\|P\|\to 0} \underline{S}(P) = A$。

($\Leftarrow$) 由 $\overline{S}(P)$ 及 $\underline{S}(P)$ 的定義: 對任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 以及任意樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 都有

$$\underline{S}(P) \leq R(f, \xi, P) \leq \overline{S}(P),$$

因爲 $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \overline{S}(P) = \lim\limits_{\|P\|\to 0} \underline{S}(P)$, 所以

$$\lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(P) = \lim_{\|P\|\to 0} R(f, \xi, P) = \lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(P),$$

得到函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可積分的。 □

關於 定理 **6**, 函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可積分的充要條件可以理解爲

$$\lim_{\|P\|\to 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0;$$

也就是說, 上式的精確定義表示爲:

> 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得對任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,
> 若 $\|P\| < \delta$, 則 $\overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \varepsilon$。

這個條件可以改寫成以下形式: 記 $\omega_i = M_i - m_i$, 稱爲 $f(x)$ 在區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的 振幅 (oscillation)。

定理 **7** (黎曼可積的第二充要條件)**.** 若函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可積分的充分必要條件是

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0。$$

若將這個式子用極限的精確定義描述, 則爲

> 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得對任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,
> 若 $\|P\| < \delta$, 則 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$。

證明: 因爲在分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 之下,

$$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \Rightarrow \lim_{\|P\|\to 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i,$$

所以由黎曼可積的第一充要條件得知 $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$ 是另一個等價敘述。 □

在這個等價敘述中, 我們必須檢查所有滿足 $\|P\| < \delta$ 的分割都要 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$。若要拿這個條件驗證定積分的存在性實際上是有難度的, 主因是在於分割 P 的任意性會讓 ω_i 的大小無法確實估計。但是這個條件我們可以把它放弱, 得到以下黎曼可積的第三充要條件:

定理 8 (黎曼可積的第三充要條件). 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積分的充分必要條件是:

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$。

證明: $(\Rightarrow)$ 由黎曼可積第二充要條件的必要性之證明得到現在的討論是其中一個特例。
$(\Leftarrow)$ 對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲存在分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$, 則

$$0 \le L - l \le \overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

因此 $L = l$, 於是由黎曼可積的第一充要條件可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的。 □

這裡各位可以看到黎曼可積的第三充要條件在驗證定積分的存在就容易許多, 我們只要專心研究是否可以找到一個分割, 好好計算 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$ 是否受控, 不用對所有滿足分割寬度都很小的黎曼和估計。

最後, 我們還要再給出黎曼可積的第四充要條件。

定理 9 (黎曼可積的第四充要條件). 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積分的充分必要條件是:

對任意 $\varepsilon > 0$ 與 $\eta > 0$, 存在分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 使得所有振幅 $\omega_k \ge \varepsilon$ 的區間 $[x_{k-1}, x_k]$ 之總寬度 $\sum\limits_{\omega_k \ge \varepsilon} \Delta x_k < \eta$。

證明: $(\Rightarrow)$ 因爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的, 所以對任意 $\varepsilon > 0$ 與 $\eta > 0$, 存在分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \eta\varepsilon$, 於是

$$\varepsilon \sum_{\omega_k \ge \varepsilon} \Delta x_k = \sum_{\omega_k \ge \varepsilon} \varepsilon \Delta x_k \le \sum_{\omega_k \ge \varepsilon} \omega_k \Delta x_k \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \eta\varepsilon,$$

所以 $\sum\limits_{\omega_k \ge \varepsilon} \Delta x_k < \eta$。
$(\Leftarrow)$ 因爲函數在 $[a,b]$ 上有界, 所以存在 $m, M \in \mathbb{R}$ 使得所有 $x \in [a,b]$ 都有 $m \le f(x) \le M$。記 $\overline{M} = \max(|m|, |M|)$, 則對所有 $x \in [a,b]$ 都有 $|f(x)| \le \overline{M}$。

對任意 $\varepsilon > 0$ 與 $\eta \overset{取}{=} \varepsilon > 0$, 因爲存在分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 使得所有振幅 $\omega_k \ge \varepsilon$ 的區間之總寬度 $\sum\limits_{\omega_k \ge \varepsilon} \Delta x_k < \varepsilon$, 於是

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{\omega_k < \varepsilon} \omega_k \Delta x_k + \sum_{\omega_k \ge \varepsilon} \omega_k \Delta x_k < \sum_{\omega_k < \varepsilon} \varepsilon \Delta x_k + \sum_{\omega_k \ge \varepsilon} 2\overline{M} \Delta x_k < ((b-a) + 2\overline{M})\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的。 □

至於黎曼可積的第四充要條件也有其特色, 概念上是說: 若要說許多矩形面積的和很小, 只需要觀察那些寬度太大的矩形, 要求它們的高度不能太大即可。

6.3 可積分的函數與黎曼可積的性質

前一節介紹了有界閉區間上的有界函數是黎曼可積的四個等價敘述, 我們可以利用這些等價敘述得到許多可積分函數的例子。

定理 1. 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可積的。

證明: 因爲函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是均勻連續的 (uniformly continuous); 則對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得對所有 $x',x''\in[a,b]$ 並且 $|x'-x''|<\delta$ 都有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$。

給定任意分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 滿足 $\|P\|<\delta$, 由極值定理 (Extreme Value Theorem) 得知: 對所有 $i=1,2,\ldots,n$, 函數在每個小區間 $[x_{i-1},x_i]$ 上存在最大值 $M_i=\max\limits_{[x_{i-1},x_i]}f(x)=f(x_i')$ 與最小值 $m_i=\min\limits_{[x_{i-1},x_i]}f(x)=f(x_i'')$, 因此 $\omega_i=M_i-m_i=f(x_i')-f(x_i'')\le\frac{\varepsilon}{b-a}$, 所以

$$\overline{S}(P)-\underline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i\le\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon,$$

所以有界閉區間上的連續函數是黎曼可積的。 □

定理 2. 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限個數的第一類不連續點; 也就是說, 若 $f(x)$ 是分段連續函數 (piecewise continuous function), 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可積的。

證明: 假設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 N 個第一類不連續點, 記爲 $y_1,y_2,\ldots,y_N$, 則對任意 $\varepsilon>0$ 與 $\eta>0$, 取 $\delta>0$ 使得 $\delta<\frac{\eta}{2N}$。先選一組滿足 $\|P\|<\delta$ 的分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 因爲不含有任何 $y_j, j=1,2,\ldots,N$ 的區間 $[x_{k-1},x_k]$ 上函數 $f(x)$ 連續, 所以可在區間 $[x_{k-1},x_k]$ 再做分割使得在更小的區間上函數之振幅皆小於 ε。另一方面, 振幅 $\omega_k\ge\varepsilon$ 的區間至多 $2N$ 個, 其寬度總和 $\sum\limits_{\omega_k\ge\varepsilon}\Delta x_k<\sum\limits_{\omega_k\ge\varepsilon}\frac{\eta}{2N}\le\frac{\eta}{2N}\cdot 2N=\eta$, 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可積的。 □

例 **3.** 黎曼函數 (Riemann function)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{若 } x \text{ 是有理數, 且 } x=\frac{p}{q},(p,q)=1\\ 0 & \text{若 } x \text{ 是無理數}\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 區間上是黎曼可積的, 並且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$。

證明: 給定 $\varepsilon>0$ 與 $\eta>0$, 滿足 $f(x)\ge\varepsilon$ 的點只有有限多個, 記爲 $y_1,y_2,\ldots,y_N$。取 $\delta=\frac{\eta}{2N}$, 則任取一組滿足 $\|P\|<\delta$ 的分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 因爲函數的振幅具有 $\omega_k\ge\varepsilon$ 的區間 $[x_{k-1},x_k]$ 只會發生在包含 $y_j, j=1,2,\ldots,N$ 的區間, 而這些區間至多 $2N$ 個, 且每一個區間的寬度 $\Delta x_k\le\|P\|<\delta=\frac{\eta}{2N}$, 於是

$$\sum_{\omega_k\ge\varepsilon}\Delta x_k=\sum_{\omega_k\ge\varepsilon}\frac{\eta}{2N}<\frac{\eta}{2N}\cdot 2N=\eta,$$

所以黎曼函數在 $[0,1]$ 區間上是可積分的。

因爲對所有的分割 P, 黎曼函數在 $[0,1]$ 區間上的達布下和 $\underline{S}(P)\equiv 0$, 所以 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$。 □

定理 4. 有界閉區間上的單調函數是黎曼可積的。

證明: 這裡只證明函數是遞增的情況, 對於遞減函數同理可證。假設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是遞增函數, 若 $f(b)=f(a)$, 則 $f(x)$ 爲常數函數。由單元 6.1 的 例 **2** 得知函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的。

若 $f(b)>f(a)$, 對任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}>0$, 對任意分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 滿足 $\|P\|<\delta$, 對於 $i=1,2,\ldots,n$, 記 $M_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ 與 $m_i=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, 因爲 $f(x)$ 遞增, 所以 $M_i=f(x_i)$ 且 $m_i=f(x_{i-1})$, 於是

$$\begin{aligned}0<\overline{S}(P)-\underline{S}(P)&=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\cdot\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\\&=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot(f(b)-f(a))=\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可積的。 □

定理 5. 若函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可積的, 則 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是黎曼可積的。

證明: 因爲 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可積的, 所以 $f(x)$ 與 $g(x)$ 有界, 於是存在 $M>0$ 使得對所有 $x\in[a,b]$ 都有 $|f(x)|\le M$ 以及 $|g(x)|\le M$。

首先, 我們觀察: 若 x^*,x^{**} 是 $[a,b]$ 上的任意兩點, 則

$$\begin{aligned}|f(x^*)g(x^*)-f(x^{**})g(x^{**})|&\le|f(x^*)g(x^*)-f(x^{**})g(x^*)+f(x^{**})g(x^*)-f(x^{**})g(x^{**})|\\&\le|f(x^*)-f(x^{**})||g(x^*)|+|f(x^{**})||g(x^*)-g(x^{**})|\\&\le M\left(|f(x^*)-f(x^{**})|+|g(x^*)-g(x^{**})|\right)。\end{aligned}$$

給定 $[a,b]$ 上的一個分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 對於 $i=1,2,\ldots,n$, 記 ω_i',ω_i'' 與 ω_i 分別是函數 $f(x),g(x)$ 與 $f(x)g(x)$ 在小區間 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 則上面的討論得知: $\omega_i\le M(\omega_i'+\omega_i'')$, 因此

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le M\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i''\Delta x_i\right),$$

因爲 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都是黎曼可積的, 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得對任意分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 只要滿足 $\|P\|<\delta$, 則有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i<\varepsilon$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i''\Delta x_i<\varepsilon$, 於是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le M\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i''\Delta x_i\right)<2M\varepsilon,$$

因此 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是黎曼可積的。 □

前面介紹的定理都是在討論黎曼可積的函數之性質, 下面要觀察的是黎曼可積的函數在不同區間上的關聯性。

定理 6 (定積分對於區間的可加性). 函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可積的, 其等價條件是對任意 $c\in[a,b]$, $f(x)$ 在 $[a,c]$ 與 $[c,b]$ 上都是黎曼可積的。此外, 我們有以下定積分的結果:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x。\tag{2}$$

證明: ($\Rightarrow$) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積分的, 則對任意 $\varepsilon>0$, 存在分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$, 其中 ω_i 是函數 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅。

若 c 是 P 的一個分割點, 即 $c=x_j$, 其中 $j\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, 則 $P': a=x_0<x_1<\cdots<x_{j-1}<x_j=c$ 是 $[a,c]$ 的一個分割, 而 $P'': c=x_j<x_{j+1}<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 是 $[c,b]$ 的一個分割, 對於分割 P' 與 P'' 有

$$\sum_{i=1}^{j}\omega_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\quad\text{以及}\quad\sum_{i=j+1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon,$$

因此函數 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 與 $[c,b]$ 上都是黎曼可積的。

若 c 不是 P 的分割點, 則 $c\in(x_{j-1},x_j)$, 其中 $j\in\{1,2,\ldots,n\}$。現將 c 納入分割 P 之後得到一個新的分割, 然後記 $P': a=x'_0<x'_1<\cdots<x'_{n_1-1}<x'_{n_1}=c$ 與 $P'': c=x''_0<x''_1<\cdots<x''_{n_2-1}<x''_{n_2}=b$, 則 P' 與 P'' 分別是 $[a,c]$ 與 $[c,b]$ 的分割。記 ω'_i 與 ω''_i 爲函數 $f(x)$ 在 $[x'_{i-1},x'_i]$ 與 $[x''_{i-1},x''_i]$ 的振幅, 注意到

$$\begin{aligned}\omega_j\Delta x_j&=\omega_j(x_j-x_{j-1})=\omega_j(x_j-c+c-x_{j-1})=\omega_j(x''_1-x''_0)+\omega_j(x'_{n_1}-x'_{n_1-1})\\&\ge\omega''_1(x''_1-x''_0)+\omega'_{n_1}(x'_{n_1}-x'_{n_1-1})=\omega''_1\Delta x''_1+\omega'_{n_1}\Delta x'_{n_1},\end{aligned}$$

得到 $\omega'_{n_1}\Delta x'_{n_1}\le\omega_j\Delta x_j$ 並且 $\omega''_1\Delta x''_1\le\omega_j\Delta x_j$, 於是

$$\sum_{i=1}^{n_1}\omega'_i\Delta x'_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\quad\text{以及}\quad\sum_{i=1}^{n_2}\omega''_i\Delta x''_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon,$$

因此函數 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 與 $[c,b]$ 上都是黎曼可積的。

至於 (2) 式的成立, 可透過黎曼和的估計而得。因爲函數 $f(x)$ 在 $[a,b],[a,c],[c,b]$ 上可積分的, 所以對任意 $\varepsilon>0$,

(A) 存在 $\delta_1>0$ 使得對任意帶有 c 爲分割點之分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 與任意樣本點 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 只要 $\|P\|<\delta_1$ 都有 $\left|R(f,\xi,P)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$。

(B) 存在 $\delta_2>0$ 使得對任意分割 $P': a=x'_0<x'_1<\cdots<x'_{n_1-1}<x'_{n_1}=c$ 與任意樣本點 $\xi'_i\in[x'_{i-1},x'_i]$, 只要 $\|P'\|<\delta_2$ 都有 $\left|R(f,\xi',P')-\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$。

(C) 存在 $\delta_3>0$ 使得對任意分割 $P'': c=x''_0<x''_1<\cdots<x''_{n_2-1}<x''_{n_2}=b$ 與任意樣本點 $\xi''_i\in[x''_{i-1},x''_i]$, 只要 $\|P''\|<\delta_3$ 都有 $\left|R(f,\xi'',P'')-\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$。

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$, 則對任意分割 P, 只要 $\|P\| < \delta$, 透過上述的討論而得分割 P' 與 P'' 之下, 都有 $\|P'\| < \delta$ 以及 $\|P''\| < \delta$, 並將樣本點重新標記爲 ξ_i' 與 ξ_i'' 之下, 則有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \\
&= \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - R(f,\xi,P) + R(f,\xi',P') + R(f,\xi'',P'') - \left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \\
&\le \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - R(f,\xi,P)\right| + \left|R(f,\xi',P') - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|R(f,\xi'',P'') - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

因此

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

成立。

($\Leftarrow$) 若 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 與 $[c,b]$ 上都是黎曼可積的, 則對任意 $\varepsilon > 0$, 分別存在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 的分割: $P' : a = x_0' < x_1' < x_2' < \cdots < x_{n_1}' = c$ 和 $P'' : c = x_0'' < x_1'' < x_2'' < \cdots < x_{n_2}'' = b$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n_1} \omega_i' \Delta x_i' < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{以及} \quad \sum_{i=1}^{n_2} \omega_i'' \Delta x_i'' < \frac{\varepsilon}{2},$$

其中 ω_i' 與 ω_i'' 分別爲函數 $f(x)$ 在區間 $[x_{i-1}', x_i']$ 與 $[x_{i-1}'', x_i'']$ 上的振幅。現將 P' 與 P'' 合併成爲 $[a,b]$ 上的一個分割 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 記 ω_i 爲 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 的振幅, 則

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n_1} \omega_i' \Delta x_i' + \sum_{i=1}^{n_2} \omega_i'' \Delta x_i'' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

因此函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可積的。 □

我們之前的所有討論都是處理定積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $a < b$ 的情況, 現在要約定當積分下限大於積分上限時定積分的記號; 也就是說, 在 $a < b$ 的時候,

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{定義}}{=\!=} -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

若是將定積分 $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 用精確定義的方式寫下時, 則是對於 $[a,b]$ 的任意一個分割 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 記 $\overline{\Delta} x_i = x_{i-1} - x_i$, 那麼對任意樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 定義黎曼和爲

$$\overline{R}(f,\xi,P) \overset{\text{定義}}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\overline{\Delta} x_i = -\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = -R(f,\xi,P),$$

所以

$$\begin{aligned}
\overline{R}(f,\xi,P) - \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\overline{\Delta} x_i - \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -R(f,\xi,P) + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\left(R(f,\xi,P) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right),
\end{aligned}$$

這麼一來得到

$$\left|\overline{R}(f,\xi,P)-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|R(f,\xi,P)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|。$$

由上述討論得知: 在積分下限大於積分上限的情況, 雖然所有證明也可以利用定義的方式討論, 但實際上只要利用上述轉換式, 先把所有資訊轉換成積分下限小於積分上限, 也就是 $\Delta x_i>0$ 的情況, 再好好地用定義討論即可。這麼做也是比較理想的, 因爲寫成 $\Delta x_i>0$ 的樣子可以避免不等式的符號判斷錯亂而產生錯誤率大增的情況。

此外, 透過上述的記號, 對於 $a<b<c$ 的情況, 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b],[b,c]$ 及 $[a,c]$ 上都是黎曼可積的, 則有

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

於是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

也就是說, 定積分對於區間的可加性, 我們可以將 c 選在 $[a,b]$ 區間的外面而公式仍然成立。

再來要觀察的是函數 $f(x)$ 以及函數取絕對值 $|f(x)|$ 後黎曼可積的關聯性。

定理 7 (絕對可積性). 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可積, 則 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也是黎曼可積, 並且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x。$$

證明: 首先注意到在 $[a,b]$ 上的任意兩點 x^* 和 x^{**}, 由三角不等式 (Triangle Inequality) 可得

$$||f(x^*)|-|f(x^{**})||\le|f(x^*)-f(x^{**})|。$$

對任意 $\varepsilon>0$, 因爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的, 所以存在分割 $P:a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^n\omega_f^i\Delta x_i<\varepsilon$, 其中 ω_f^i 是函數 $f(x)$ 在區間 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅。記 $\omega_{|f|}^i$ 爲函數 $|f(x)|$ 在區間 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 則前面討論的不等式得知 $\omega_{|f|}^i\le\omega_f^i$, 所以

$$\sum_{i=1}^n\omega_{|f|}^i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^n\omega_f^i\Delta x_i<\varepsilon,$$

因此 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也是黎曼可積的。

因爲對所有 $x\in[a,b]$ 都有 $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$, 由單元 6.1 的 **定理 6** 與 **定理 7** 得知:

$$-\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x。$$

□

這一節的最後要介紹的是積分第一均值定理。

定理 8 (積分第一均值定理, First Mean Value Theorem for Integrals). 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可積的, 並且 $g(x) \geq 0$。記 $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, 則存在 $C \in [m,M]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = C\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x。$$

更進一步地, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 則存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x。$$

證明: 因爲 $m \leq f(x) \leq M$ 且 $g(x) \geq 0$, 所以 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, 於是

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x。$$

<u>若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$</u>, 則任選 $C \in [m,M]$ 之下等式皆成立。<u>若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$</u>, 則取

$$C = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

即爲所求。若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 則由中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 得知: 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = C$, 所以

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x。$$

□

這裡不妨用幾個例子說明積分第一均值定理的幾個面向。比方說有一個密度不均勻的橫桿, 設定坐標使得橫桿位於 $[a,b]$ 的地方。橫桿的密度函數爲 $g(x)$, 然後設定 $f(x) = x$ 之下, 積分第一均值定理得到的 $C = f(C)$ 表示這個橫桿質心 (center of mass) 的位置, 而 $x = C$ 會介在 $[a,b]$ 之間。各位在未來若是學到了機率論 (probability theory), 若 $g(x)$ 是在 $[a,b]$ 上某個隨機變數的連續型機率密度函數, 則有 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 1$, 再設定 $f(x) = x$, 那麼所得的 C 值會是這個隨機變數的期望值 (expectation value)。

爲什麼這個式子會被稱爲積分第一均值定理呢? 其中一個解釋是來自於在 $g(x) \equiv 1$ 之下, 當 $f(x)$ 爲 $[a,b]$ 上的連續函數時, 則有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \Rightarrow f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

在這樣的表達下, 等式右邊意味著函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值 (average), 而且平均值可由函數 $f(x)$ 在某一點 $x = \xi$ 的取值達到。若用幾何的方式說明, 則表示介於函數 $f(x)$ 的圖形與 x-軸還有 $x = a$ 與 $x = b$ 之間的區域面積與以 $b - a$ 爲寬、以 $f(\xi)$ 爲高的矩形面積一致。

上面介紹了積分第一均值定理, 可想而知會有積分第二均值定理, 不然就不需要將它編號。然而積分第二均值定理的證明需要用到微積分基本定理中的一部份結果, 所以我們留到下一節再介紹。

6.4 微積分基本定理與積分技巧的證明

這一節主要目的是要證明微積分基本定理還有積分過程中常用的變數變換技巧與分部積分公式。相較於微積分課程的討論, 這裡著重於函數只有黎曼可積的假設下所衍伸出的性質。

定理 1 (微積分基本定理第一部份, Fundamental Theorem of Calculus, Part I). 假設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積分的, 對於 $x \in [a,b]$, 考慮

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

則有以下結論:

(A) 函數 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上是連續函數。

(B1) 若函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處右連續, 則 $F'_+(x_0) = f(x_0)$。

(B2) 若函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處左連續, 則 $F'_-(x_0) = f(x_0)$。

證明: 因爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的, 所以 $f(x)$ 有界, 即存在 $M > 0$ 使得對所有 $x \in [a,b]$ 都有 $|f(x)| \le M$。

(A) 給定 $x_0 \in [a,b]$, 都有

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_{x_0}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_{x_0}^x M\,\mathrm{d}t\right| = M|x - x_0|,$$

給定 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$, 則對所有 $x \in [a,b]$ 且 $|x - x_0| < \delta$, 都有 $|F(x) - F(x_0)| \le M|x - x_0| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, 因此 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續。

(B1) 假設 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處右連續, 則對任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得對所有滿足 $0 < x - x_0 < \delta$ 的點都有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。於是

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right| = \frac{1}{x - x_0}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t < \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $F'_+(x_0) = f(x_0)$。

(B2) 假設 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處左連續, 則對任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得對所有滿足 $-\delta < x - x_0 < 0$ 的點都有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。於是

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right| = \frac{\left|-\int_x^{x_0} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right|}{x_0 - x} \\ &\le \frac{1}{x_0 - x}\int_x^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t < \frac{1}{x_0 - x}\int_x^{x_0} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $F'_-(x_0) = f(x_0)$。

□

在微積分的課程中, 主要是在討論 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是連續函數的情況, 此時, 將 (B1) 與 (B2) 的結果合併得到函數 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上是可微分函數, 並且最後的結果可寫成以下式子:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)=f(x)。\tag{3}$$

式子 (3) 的另一個詮釋爲: 若 $f(x)$ 是連續函數, 則積分與微分是互逆的操作。

第五章我們曾經介紹過反導函數的意義, 這裡我們再做一個複習。給定在 $[a,b]$ 上的函數 $f(x)$, 若存在可微分函數 $F(x)$ 使得對所有 $x\in[a,b]$ 都有 $F'(x)=f(x)$ (端點處只考慮單側導數), 那麼稱 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個 *反導函數* (antiderivative)。另外一個結果是: 若對所有 $x\in[a,b]$ 滿足 $g'(x)=0$, 則 $g(x)$ 爲常數函數。將這兩件事合併, 則得知: 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數, 那麼 $F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的反導函數, 其中 $C\in\mathbb{R}$。於是, 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 區間上的連續函數, 則 (3) 式說明了 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+C$ 是一個 $f(x)$ 的反導函數。

特別注意, 上面兩段文字一直強調著 $f(x)$ 是連續函數的情形。現在我們要問的是: 若 $f(x)$ 只是一個在 $[a,b]$ 上的可積分函數, 那麼 $f(x)$ 的反導函數存在嗎? 爲了回答這個問題, 我們先觀察單位階梯函數的情況。

例 **2.** *考慮 單位階梯函數* (unit step function)

$$f(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<0\\ 1 & 若\ x\geq 0,\end{cases}$$

若取 $a<0$, 則

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & 若\ x\leq 0\\ x & 若\ x>0。\end{cases}$$

由此, 再計算

$$F'(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<0\\ 不存在 & 若\ x=0\\ 1 & 若\ x>0,\end{cases}$$

得到 $F'(x)\neq f(x)$。

由上面的例子, 我們發現到: 只要 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一個不連續點, 那麼就無法利用 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的方法得到 $f(x)$ 的反導函數。實際上, 這件事呼應第 5 章證明過的一個定理: 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可微分函數, 則導函數 $f'(x)$ 不存在跳躍不連續點 (jump discontinuity)。所以它的否逆命題告知: 任何在 $[a,b]$ 上處處有定義且具有跳躍不連續點的函數之反導函數不存在。

仔細觀察單位階梯函數 $f(x)$ 以及 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 所得 $F'(x)$ 的結果, 其實也只有 $F'(0)\neq f(0)$ 而已, 其它地方都是一樣的。這就有如一顆老鼠屎壞了一鍋粥一般, 只不過是一個點的不連續性就破壞了整個理論, 回過頭來想, 我們好像對於函數與其反導函數這件事過於要求。如果函數 $f(x)$ 只是一個在 $[a,b]$ 上的可積分函數, 由微積分基本定理的第一部份只能得知 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是在 $[a,b]$ 上的連續函數, 此外就沒辦法再多說些其它的事情了嗎?

或許各位也不應對於積分理論過於失望, 我們不妨從微積分基本定理第二部份重想上面的問題。

定理 3 (微積分基本定理第二部份, Fundamental Theorem of Calculus, Part II). 假設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上是連續函數, 並且除了有限個點以外都有 $F'(x)=f(x)$, 則

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)。$$

證明: 將 $F'(x)\neq f(x)$ 的點記爲 $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$, 注意到這些點有可能是導數 $F'(x_j^*)$ 不存在。考慮在 $[a,b]$ 上的分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 並且要求所有 $x_j^*, j=1,2,\ldots,m$ 都是 P 的分割點。因爲 $F(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上連續, 在 (x_{i-1},x_i) 上是可微分的, 由均值定理 (Mean Value Theorem) 得知: 存在 $c_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i-x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i,$$

因此

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i)-F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i,$$

因爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的, 所以對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得對於分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 與樣本點 $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ 的選取下, 只要 $\|P\|<\delta$ 都有

$$\left|F(b)-F(a)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

因此 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$。 □

當這個公式建立之後, 我們對於尋找不是太糟糕的函數在某個閉區間上定積分的問題就幾乎不再使用定義的方式處理, 取而代之的是努力思考如何尋求一個函數的反導函數。這是因爲使用定義處理問題時, 基本上只是在回答定積分的存在性, 至於定積分的值是多少通常不太有明確的結果。此外, 在微積分的課程裡, 我們如實地將常見函數之反導函數確實求得, 並引出很多的積分技巧幫助尋找反導函數的明確表達式。在高等微積分的課程中, 主要著重在理論的層面, 關於各式各樣如何求出定積分的技巧就不再多述。

而 **定理 3** 的結果是放寬到被積分函數允許有限個不連續點的情況也成立。由前面的討論知道: 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間上在 $x=x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$ 產生不連續點, 雖然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反導函數不存在, 但是分段來看, 函數 $f(x)$ 在 (x_{j-1}^*, x_j^*) 上的反導函數 $F_j(x)+C_j, j=1,2,\ldots,m,m+1$ 是存在的, 其中記 $a=x_0^*, b=x_{m+1}^*$ 以及 $C_j\in\mathbb{R}$。當我們對於函數 $f(x)$ 在不連續點 $x=x_j^*$ 的地方要求左、右兩側的反導函數 $F_j(x)+C_j$ 與 $F_{j+1}(x)+C_{j+1}$ 在 $x=x_j^*$ 處連續, 比方說 C_1 先給定, 而 C_2 的值由反導函數在 $x=x_1^*$ 的連續性可以被決定; 也就是說, 從

$$\lim_{x\to(x_1^*)^+}(F_1(x)+C_1) = \lim_{x\to(x_1^*)^-}(F_2(x)+C_2)$$

解出 C_2, 然後依序確定 $C_3, C_4, \ldots, C_{m+1}$ 的值, 那麼就有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\lim_{x\to b^-} F_{m+1}(x)+C_{m+1}\right) - \left(\lim_{x\to a^+} F_1(x)+C_1\right)。$$

回顧微積分課程時學到處理定積分的技巧, 主要的方法有五類: 變數變換法 (Substitution Rule)、分部積分法 (Integration by Parts)、三角積分法 (Trigonometric Integration)、部份分式法 (Partial Fraction Method) 與三角代換法 (Trigonometric Substitution)。關於後面三種積分技巧, 主要是介紹某些類型的函數之反導函數可以確實找出, 並且告知如何找出, 但是這些技巧都是源自於變數變換法與分佈積分法。於是以下將確實證明這兩個積分技巧。

定理 4 (變數變換法則, Substitution Rule). 若 $\phi(x) \in C^1([a,b])$, 並且 $\phi'(x) \neq 0$, 而函數 $f(x)$ 在 $[c,d] = \phi([a,b])$ 上是可積分的, 則

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x。$$

證明: 因爲 $\phi'(x) \neq 0$ 是連續函數, 所以 $\phi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上恆正或恆負。這裡只討論 $\phi'(x) > 0$ 的情形, 關於 $\phi'(x) < 0$ 的情況同理可證。因爲 $\phi'(x) > 0$, 所以函數 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上是嚴格遞增的函數, 並且 $[c,d] = [\phi(a), \phi(b)]$, 而且 $\phi^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ 也是嚴格遞增的函數。

現分成以下幾個步驟完成論述:

(A) 給定在 $[a,b]$ 上的一個分割 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 因爲 $\phi(x)$ 是嚴格遞增的函數, 令 $u_i = \phi(x_i)$, 其中 $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, 則得在 $[c,d]$ 上的一個分割 $P' : c = u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-1} < u_n = d$, 對任意的樣本點 $\zeta_i \in [u_{i-1}, u_i]$, 函數 $f(u)$ 在 $[c,d]$ 上對於分割 P' 的黎曼和爲

$$R(f, \zeta, P') = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta u_i = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}))。$$

因爲定積分 $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$ 存在, 所以對任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\eta > 0$ 使得對於分割 P' 與任意樣本點 $\zeta_i \in [u_{i-1}, u_i]$, 只要 $\|P'\| < \eta$, 則

$$\left| R(f, \zeta, P') - \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \right| < \varepsilon。$$

(B) 因爲反函數 $\phi^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ 存在, 所以對於 $i = 1, 2, \ldots, n$, 每個 ζ_i 都存在 c_i 使得 $\zeta_i = \phi(c_i)$;另一方面, 因爲 $\phi(x) \in C^1([a,b])$, 由均值定理 (Mean Value Theorem) 得知: 存在 $c_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得 $\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}) = \phi'(c_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \phi'(c_i^*)\Delta x_i$, 於是在 (A) 的討論中, 黎曼和可以改寫爲

$$R(f, \zeta, P') = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\phi(c_i))\phi'(c_i^*)\Delta x_i。$$

現在想要將對於分割 P' 的條件改成對於分割 P 的條件。因爲 $\phi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 所以存在 $M_1 > 0$ 使得對所有 $x \in [a,b]$ 都有 $|\phi'(x)| \leq M_1$。對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta_1 = \frac{\eta}{M_1} > 0$, 則對任意分割 P 與任意樣本點 ζ_i, 只要 $\|P\| < \delta_1$, 則有 $\|P'\| \leq M_1\|P\| < M_1 \cdot \frac{\eta}{M_1} = \eta$, 那麼有

$$\left| R(f, \zeta, P') - \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\phi(c_i))\phi'(c_i^*)\Delta x_i - \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \right| < \varepsilon。$$

(C) 對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $f(u)$ 在 $[c,d]$ 上有界, 存在 $M_2 > 0$ 使得對所有 $u \in [c,d]$ 都有 $|f(u)| \leq M_2$, 因爲 $\phi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 所以 $\phi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上均勻連續 (uniformly continuous), 所以存在 $\delta_2 > 0$ 使得對所有 $t^*, t^{**} \in [a,b]$ 且 $|t^* - t^{**}| < \delta_2$ 都有

$$|\phi'(t^*) - \phi'(t^{**})| < \frac{\varepsilon}{M_2(b-a)} \Rightarrow |f(\phi(t^*))(\phi'(t^*) - \phi'(t^{**}))| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

(D) 對分割 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 而言, 對任意樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 下得到的黎曼和爲

$$R(f \circ \phi \cdot \phi', \xi, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\phi(\xi_i))\phi'(\xi_i)\Delta x_i。$$

所以對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_3 > 0$ 使得對任意分割 P 與任意樣本點 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\|P\| < \delta_3$ 都有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\phi(\xi_i))\phi'(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(\phi(x))|\phi'(x)|\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon。$$

特別地, 下面的估計將代入 $\xi_i = c_i$, 其中 c_i 是由 (B) 的討論得到的點, 也就是 $c_i = \phi^{-1}(\zeta_i)$。

(E) 對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$, 則對任意分割 P, 只要 $\|P\| < \delta$, 而由 (B) 的過程中取到的 c_i, c_i^*, 會有以下估計:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
\leq &\left| \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u - \sum_{i=1}^{n} f(\phi(c_i))\phi'(c_i^*)\Delta x_i \right| \\
&+ \left| \sum_{i=1}^{n} f(\phi(c_i))\phi'(c_i^*)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\phi(c_i))\phi'(c_i)\Delta x_i \right| \\
&+ \left| \sum_{i=1}^{n} f(\phi(c_i))\phi'(c_i)\Delta x_i - \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x \right| = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},
\end{aligned}$$

由 (A) 的討論知道 $\mathrm{I} < \varepsilon$; 由 (D) 的討論知道 $\mathrm{III} < \varepsilon$; 至於 II 的估計, 則有

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\phi(c_i))\phi'(c_i^*)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\phi(c_i))\phi'(c_i)\Delta x_i \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left| f(\phi(c_i))(\phi'(c_i^*) - \phi'(c_i)) \right| \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,
\end{aligned}$$

因此

$$\left| \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x \right| < 3\varepsilon \Rightarrow \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x。$$

□

定理 5 (分部積分公式, Integration by Parts). 假設函數 $f(x), g(x), f'(x), g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上都是可積分的, 則

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x。$$

證明: 由函數求導法則的乘法公式 (Product Rule) 知道:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

由微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus) 得知:

$$\Big[f(x)g(x)\Big]\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b (f(x)g(x))'\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x。$$

□

這一節最後想要證明積分第二均值定理, 但在證明定理之前, 我們需要先證明以下兩個引理:

引理 6 (阿貝爾變換, Abel Transformation). 對於 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$, 令 $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, 則有

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = A_nb_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1})。$$

證明: 記 $A_0 = 0$, 則

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i &= \sum_{i=1}^{n}(A_i - A_{i-1})b_i = \sum_{i=1}^{n} A_ib_i - \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}b_i = \sum_{i=1}^{n} A_ib_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_ib_{i+1} \\ &= A_nb_n - A_0b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) = A_nb_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1})。\end{aligned}$$

□

引理 7. 若存在 $m, M \in \mathbb{R}$ 使得對所有 $k = 1, 2, \ldots, n$ 都有 $m \le A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \le M$, 而 $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ 非負且遞減, 則

$$mb_1 \le \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \le Mb_1。$$

證明: 因爲 $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ 非負且遞減, 即 $b_i - b_{i+1} \ge 0$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = A_nb_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) \le Mb_n + \sum_{i=1}^{n-1} M(b_i - b_{i+1}) = Mb_n + M(b_1 - b_n) = Mb_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = A_nb_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) \ge mb_n + \sum_{i=1}^{n-1} m(b_i - b_{i+1}) = mb_n + m(b_1 - b_n) = mb_1,$$

將兩者合併即得不等式。 □

定理 8 (積分第二均值定理, Second Mean Value Theorem for Integrals). 假設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積分的, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非負且遞減, 則存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x。$$

證明: 因爲 $f(x)g(x)$ 是可積分的, 所以考慮分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 將積分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 改寫成

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x)-g(x_{i-1}))\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

記 $M_{|f|} = \sup\limits_{[a,b]}|f(x)|$, 而 ω_i^g 表示 $g(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 則

$$\left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x)-g(x_{i-1}))\,\mathrm{d}x\right| \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)||g(x)-g(x_{i-1})|\,\mathrm{d}x \le M_{|f|}\sum_{i=1}^n \omega_i^g \Delta x_i,$$

因爲 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的, 所以 $\lim\limits_{\|P\|\to 0} M_{|f|}\sum\limits_{i=1}^n \omega_i^g \Delta x_i = 0$, 於是

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

另一方面, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上是連續函數, 記 $M = \max\limits_{[a,b]} F(x), m = \min\limits_{[a,b]} F(x)$, 記 $a_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x$ 與 $A_k = \sum\limits_{i=1}^k a_i = \int_a^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x_k)$, 並且記 $b_i = g(x_{i-1})$, 因爲 $g(x)$ 非負且遞減, 則 $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$, 由 **引理 7** 得到

$$mg(a) \le \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x \le Mg(a),$$

所以取極限 $\lim\limits_{\|P\|\to 0}$ 之後則有

$$mg(a) \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le Mg(a)。$$

(A) 如果 $g(a) = 0$, 則 $g(x) \equiv 0$, 任取 $\xi \in [a,b]$ 等式皆成立。

(B) 如果 $g(a) > 0$, 令 $C = \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, 因爲 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 而且 $m \le C \le M$, 由中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 得知, 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$F(\xi) = C \Rightarrow \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x。$$

□

定理 9 (積分第二均值定理, Second Mean Value Theorem for Integrals, general version**).** 假設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積分的, $g(x)$ 是單調函數, 則存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x。$$

證明: 若 $g(x)$ 遞增, 令 $G(x) = g(b) - g(x)$, 則 $G(x)$ 非負且遞減, 由 定理 **8** 得知:

$$\int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = G(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_a^b f(x)(g(b)-g(x))\,\mathrm{d}x = (g(b)-g(a))\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x,$$

整理之後得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)g(b)\,\mathrm{d}x - (g(b)-g(a))\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

若 $g(x)$ 遞減, 令 $G(x) = g(x) - g(b)$, 則 $G(x)$ 非負且遞減, 由 定理 **8** 得知:

$$\int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = G(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_a^b f(x)(g(x)-g(b))\,\mathrm{d}x = (g(a)-g(b))\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x,$$

整理之後得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)g(b)\,\mathrm{d}x + (g(a)-g(b))\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

□

關於積分第二均值定理的意義與應用或許目前還無法看出, 我們會在下一章討論瑕積分收斂或發散的時候看到這個定理的實際用處。

6.5 定積分的應用

定積分的應用層面很廣, 在數學上我們可以利用定積分求得不規則幾何形體的各種幾何量, 例如曲線的長度、區域的面積、曲面的表面積、實體的體積等。在物理上的許多物理量像是質心、轉動慣量、甚至物體沿著某個曲線作功等也都可以轉換成積分式。

這一節僅以平面曲線爲例說明如何將曲線弧長這個概念轉換成定積分的表示。爲什麼這裡選擇探討曲線弧長而略過像是不規則區域面積的討論呢? 這是因爲平面區域的面積轉換成定積分的形式幾乎就是從定積分的定義立刻得到, 同樣地, 像是利用圓盤法 (Disk Method) 計算曲線對著某個軸旋轉而得到實心物體的體積也是從定義出發就可以馬上寫出積分式, 故在此不多述。然而曲線弧長積分式的推導並不是顯而易見的, 它是比較複雜的。各位在以下的討論應多觀察的是曲線弧長積分式的推導當中困難點在哪裡? 而用了什麼方法把困難的地方解決。

給定平面中的一條曲線 $\Gamma \in \mathbb{R}^2$, 假設它是可以透過 一次微分後仍連續的映射 (C^1 smooth mapping) $\boldsymbol{\alpha} : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$ 的方式描述; 也就是說, $x(t), y(t) \in C^1([a,b])$。給定在區間 $[a,b]$ 上的一個分割 $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, 則 $\boldsymbol{\alpha}(t_i)$ 是依序分佈在曲線 Γ 上的點。如圖 6.1 所示:

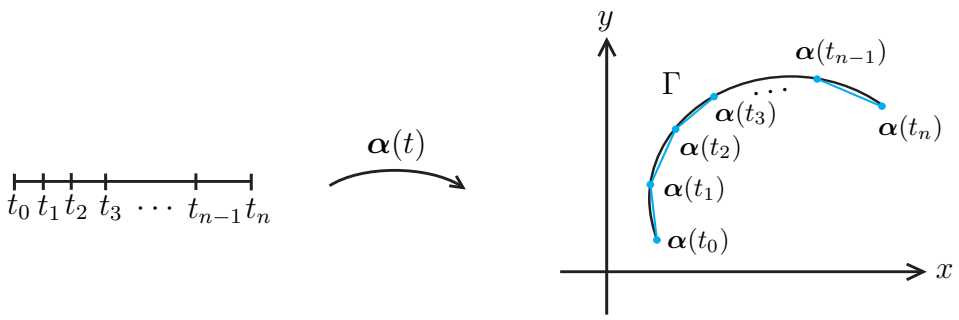

圖 6.1: 用內接折線長定義曲線長度。

考慮曲線 Γ 對於分割 P 形成的內接折線 (inscribed polygon) 長:

$$L(\boldsymbol{\alpha}, P) = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\alpha}(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2},$$

由此定義曲線 Γ 的 長度 (length) 或 弧長 (arc length) 爲 $L(\Gamma) = \lim\limits_{\|P\| \to 0} L(\boldsymbol{\alpha}, P)$。

以下將證明:

$$L(\Gamma) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{\|P\| \to 0} L(\boldsymbol{\alpha}, P) = \int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, \mathrm{d}t;$$

也就是說, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得對任意分割 $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, 只要 $\|P\| < \delta$, 都有

$$\left| \int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| \mathrm{d}t - L(\boldsymbol{\alpha}, P) \right| < \varepsilon。$$

首先, 給定 $\varepsilon > 0$, 因爲 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 所以 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 在 $[a,b]$ 上都是均勻連續的 (uniformly continuous), 於是存在 $\delta_1 > 0$ 使得對任意 $t^*, t^{**} \in [a,b]$, 只要 $|t^* - t^{**}| < \delta_1$ 都有

$$|x'(t^*) - x'(t^{**})| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{以及} \quad |y'(t^*) - y'(t^{**})| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

因爲定積分 $\int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| \, \mathrm{d}t$ 存在, 所以對於 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$ 使得對任意分割 $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ 以及任意樣本點 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 只要 $\|P\| < \delta_2$, 都有

$$\left| \int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| \, \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\alpha}'(\xi_i)\| \Delta t_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}。$$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, 現估計

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\mathrm{d}t - L(\boldsymbol{\alpha}, P)\right| &\le \left|\int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\alpha}'(\xi_i)\|\Delta t_i\right| \\ &\quad + \left|\sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\alpha}'(\xi_i)\|\Delta t_i - \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\alpha}(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})\|\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\alpha}'(\xi_i)\|\Delta t_i - \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\alpha}(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})\|\right|,\end{aligned}$$

因爲 $x(t), y(t) \in C^1([a,b])$, 由均值定理 (Mean Value Theorem) 得知: 存在 $\xi_i^*, \xi_i^{**} \in (t_{i-1}, t_i)$ 使得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\alpha}(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})\| &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\xi_i^*)(t_i - t_{i-1}))^2 + (y'(\xi_i^{**})(t_i - t_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\xi_i^*))^2 + (y'(\xi_i^{**}))^2}\Delta t_i,\end{aligned}$$

由三角不等式 (Triangle Inequality) 得到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\alpha}'(\xi_i)\|\Delta t_i - \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\alpha}(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})\|\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} - \sqrt{(x'(\xi_i^*))^2 + (y'(\xi_i^{**}))^2}\right)\Delta t_i\right| \\ &\le \sum_{i=1}^n \left|\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} - \sqrt{(x'(\xi_i^*))^2 + (y'(\xi_i^{**}))^2}\right|\Delta t_i \\ &\le \sum_{i=1}^n \left|\sqrt{(x'(\xi_i) - x'(\xi_i^*))^2 + (y'(\xi_i) - y'(\xi_i^{**}))^2}\right|\Delta t_i \\ &\le \sum_{i=1}^n \left(|x'(\xi_i) - x'(\xi_i^*)| + |y'(\xi_i) - y'(\xi_i^{**})|\right)\Delta t_i < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta t_i = \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

於是

$$\left|\int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\mathrm{d}t - L(\boldsymbol{\alpha}, P)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

因此

$$L(\Gamma) = \lim_{\|P\|\to 0} L(\boldsymbol{\alpha}, P) = \int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t。$$