7

瑕積分

這一章將以黎曼積分爲基礎探討瑕積分理論, 從中了解瑕積分的收斂或發散與函數在瑕點附近的等級之關聯, 並介紹一些判別法以證明瑕積分的收斂性。最後一節將簡介兩個瑕積分的應用, 分別是伽瑪函數與高斯積分。這一章所呈現的瑕積分理論是只最初步的觀察, 而瑕積分與無窮級數、函數項數列與函數項級數還有上、下限均帶著變量的積分理論有關。高等數學的許多理論像是偏微分方程式以及許多近代數學的發展也會經常見到瑕積分, 除了最基本的收斂性探討外還需要推導更多瑕積分的性質。

7.1 瑕積分

第六章主要是討論有界閉區間上的有界函數黎曼可積的可能性, 然而有關微積分在各種領域的發展與應用, 更多時候是在研究積分區域是無界 (unbounded interval) 或者是函數在某些點是無窮不連續點 (infinite discontinuity) 的情形下之積分。若要談論這兩種情況的積分, 首先可以確定的是: 我們無法直接用與黎曼積分一模一樣的定義討論積分值。以積分區域是無界的情況來說, 比方說我們想要探討函數 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 的積分值, 給定 $[a,\infty)$ 區間的一個分割 P, 因爲分割點的個數有限, 將分割點由小到大排列後, 最大的分割點右邊仍爲無界的區間, 所以 $\|P\|=\infty$; 也就是說, 我們無法讓分割的寬度達到任意小。對於函數具有無窮不連續點的情況來說, 我們曾經證明過: 若函數在有界閉區間上是可積分的, 則函數必有界, 於是它的否逆命題告知: 若函數在有界閉區間上無界, 則函數在這個閉區間上是不可積分的。

有關積分區域無界或是函數具有無窮不連續點的積分理論, 數學上稱爲 *瑕積分* (improper integral) 或是 *廣義積分* (generalized integral)。既然它們無法使用原始定積分的定義進行討論, 那麼要如何思考這類的問題呢? 以下要介紹的是數學上常見的一種分析方法, 它是以定積分爲基礎, 調整積分的上限或下限, 透過對於上、下限取極限的方式研究積分值。

這裡我們先約定 *瑕點* (singularity) 的意思: 若函數 $f(x)$ 的定義域無界, 像是 $[a,\infty),(-\infty,b]$ 或是 $(-\infty,\infty)$, 我們說函數 $f(x)$ 具有瑕點 $x=\infty$ 或 $x=-\infty$, 此時我們把帶有瑕點 $x=\infty$ 或 $x=-\infty$ 的瑕積分稱爲 *第一類瑕積分* (type I improper integral)。若函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 處是無窮不連續點, 則說函數 $f(x)$ 具有瑕點 $x=x_0$, 這時帶有瑕點 $x=x_0$ 的瑕積分稱爲 *第二類瑕積分* (type II improper integral)。

首先我們定義函數在瑕點 $x=\infty$ 或 $x=-\infty$ 的瑕積分。

定義 1 (第一類瑕積分, type I improper integral).

(A) 假設函數 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 有定義, 並且函數 $f(x)$ 在任意有界閉區間 $[a,t]\subset[a,\infty)$ 上是可積分的, 定義 *瑕積分* (improper integral)

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,$$

若極限存在, 則稱瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *收斂* (convergent)。

(B) 假設函數 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 有定義, 並且函數 $f(x)$ 在任意有界閉區間 $[t,b]\subset(-\infty,b]$ 上是可積分的, 定義 *瑕積分* (improper integral)

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

若極限存在, 則稱瑕積分 $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *收斂* (convergent)。

(C) 若上述定義的瑕積分極限不存在, 則稱瑕積分 *發散* (divergent)。

(D) 若函數 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 有定義, 瑕積分 $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 以及 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收斂, 則定義

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{定義}}{=\!=} \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x,$$

這裡的 a 可以取任意實數。

關於第一類瑕積分, 以下例子是最經典的標準模型, 務必要非常清楚。

例 **2.** 試就 $p\in\mathbb{R}$ 討論瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 的收斂性。

解. 直接計算

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}\right]\Bigg|_{x=1}^{x=t} & \text{若 } p\neq 1\\ \displaystyle\lim_{t\to\infty}\Big[\ln|x|\Big]\Big|_{x=1}^{x=t} & \text{若 } p=1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{t^{p-1}}-1\right) & \text{若 } p\neq 1\\ \displaystyle\lim_{t\to\infty}\ln t & \text{若 } p=1。\end{cases}$$

(A) <u>若 $p>1$</u>, 則 $\lim_{t\to\infty}t^{p-1}=\infty$, 得到 $\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{t^{p-1}}-1\right)=\frac{1}{p-1}$ 極限存在。

(B) <u>若 $p=1$</u>, 則 $\lim_{t\to\infty}\ln t=\infty$ 極限不存在。

(C) <u>若 $p<1$</u>, 則 $\lim_{t\to\infty}t^{p-1}=0$, 得到 $\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{t^{p-1}}-1\right)$ 極限不存在。

由上討論得知: 瑕積分 $\int_1^\infty\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 若 $p>1$ 收斂, 若 $p\leq 1$ 發散。

再來要給出函數具有無窮不連續點的瑕積分定義。

定義 3 (第二類瑕積分, type II improper integral).

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 連續, 而且在 $x=b$ 處是無窮不連續點, 定義 瑕積分 (improper integral)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,$$

若極限存在, 則稱瑕積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂 (convergent)。

(B) 若 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 連續, 而且在 $x=a$ 處是無窮不連續點, 定義 瑕積分 (improper integral)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

若極限存在, 則稱瑕積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂 (convergent)。

(C) 若上述定義的瑕積分極限不存在, 則稱瑕積分 發散 (divergent)。

(D) 若函數 $f(x)$ 在 $x=c, c\in[a,b]$ 是一個無窮不連續點, 而且瑕積分 $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 與 $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收斂, 則定義

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{定義}}{=\!=} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x。$$

在這類型的瑕積分, 以下例子也是標準模型, 務必先熟悉之。

例 4. 試就 $p\in\mathbb{R}$ 討論瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 的收斂性。

解. 直接計算

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\lim_{t\to 0^+}\left[-\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}\right]\Bigg|_{x=t}^{x=1} & \text{若 } p\neq 1 \\ \displaystyle\lim_{t\to 0^+}\Big[\ln|x|\Big]\Big|_{x=t}^{x=1} & \text{若 } p=1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{t^{p-1}}\right) & \text{若 } p\neq 1 \\ \displaystyle\lim_{t\to 0^+} -\ln t & \text{若 } p=1, \end{cases}$$

(A) <u>若 $p>1$</u>, 則 $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{p-1}=0$, 得到 $\lim\limits_{t\to 0^+} -\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{t^{p-1}}\right)$ 極限不存在。

(B) <u>若 $p=1$</u>, 則 $\lim\limits_{t\to 0^+} -\ln t=\infty$ 極限不存在。

(C) <u>若 $p<1$</u>, 則 $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{p-1}=\infty$, 得到 $\lim\limits_{t\to 0^+} -\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{t^{p-1}}\right)=\frac{1}{1-p}$ 極限存在。

由上討論得知: 瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 若 $p<1$ 收斂, 若 $p\geq 1$ 發散。

這裡要注意是: 當 $p\leq 0$ 的時候, $x=0$ 並非瑕點。

有些人在學習瑕積分理論時, 學到這個地方就已經頭昏了。比較前面兩個例子, 瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 在 $p>1$ 時收斂; 而瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 在 $p<1$ 時收斂, 雖然這兩類瑕積分收斂或發散的臨界點是 $p=1$, 但是若沒有認真思考這兩個例子的話, 很容易搞不清楚什麼時候是大於 1 什麼時候是小於 1。實際上, 這兩個例子只是一體的兩面。我們不妨從幾何圖形的方式進行觀察。這裡只看 $p>0$ 的情況, 令 $f_p(x)=\frac{1}{x^p}$, 則 $f_p(x)$ 在 $[1,\infty)$ 與 $f_q(x)$ 在 $(0,1]$ 當 $p\cdot q=1$ 時互為反函數。如圖 7.1 所示:

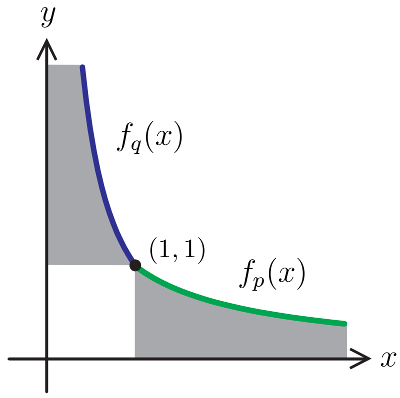

圖 7.1: 函數 $f_p(x)=\frac{1}{x^p}$ 與 $f_q(x)=\frac{1}{x^q}$ 在 $p\cdot q=1$ 時互為反函數, 所以灰色區域面積一樣。

瑕積分 $\int_1^\infty f_p(x)\,\mathrm{d}x$ 的幾何意義可理解成函數 $f_p(x)$ 圖形與 x-軸之間在 $x=1$ 右側所圍出的區域面積, 而瑕積分 $\int_0^1 f_q(x)\,\mathrm{d}x$ 的幾何意義可理解成函數 $f_q(x)$ 圖形與 x-軸之間在 $x=0$ 與 $x=1$ 之間的區域面積, 當 $f_p(x)=\frac{1}{x^p}$ 與 $f_q(x)=\frac{1}{x^q}$ 在 $p\cdot q=1$ 時互為反函數之下, 在圖 7.1 中灰色區域面積 (無限延伸) 是一樣的, 則 $\int_0^1 f_q(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^\infty f_p(x)\,\mathrm{d}x+1$, 瑕積分同時收斂或同時發散。

除了用函數與反函數的觀點聯繫兩類瑕積分的收斂或發散, 我們也可以用變數變換的方式理解。仔細地說, 我們有如下討論:

(A) 若函數 $f(x)$ 定義於 $(a,b]$ 區間, 而 $x=a$ 為瑕點, 考慮變數變換 $x=a+\frac{1}{y}$ 或寫成 $y=\frac{1}{x-a}$, 則 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$, 於是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{b-a}} -\frac{1}{y^2}f\left(a+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y\\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{y^2}f\left(a+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{1}{y^2}f\left(a+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y。\end{aligned}$$

(B) 若函數 $f(x)$ 定義於 $[a,b)$ 區間, 而 $x=b$ 為瑕點, 考慮變數變換 $x=b-\frac{1}{y}$ 或寫成 $y=\frac{1}{b-x}$, 則 $\mathrm{d}x=\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$, 於是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{y^2}f\left(b-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{1}{y^2}f\left(b-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y。$$

因為兩類瑕積分都可以用上述方式進行轉換 (其實轉換方式可以更多元), 以下我們不妨就先以第一類瑕積分、也就是瑕點 $x=\infty$ 的情況仔細討論, 而第二類瑕積分基本上都可以逐一類比。

7.2 第一類瑕積分的收斂理論

關於第一類瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, 如果可以順利求得 $f(x)$ 的某個反導函數 $F(x)$ 之明確表達式, 那麼瑕積分收斂或發散的問題就可以完全轉換成極限 $\lim_{t\to\infty} F(t)-F(a)$ 是否存在。然而一般來說, 我們不太可能總是能夠把 $F(x)$ 寫得一清二楚, 其中一部份原因是來自於各位的積分技巧成熟度不足 (或是你的微積分老師教得太爛?), 但是更大一部份是在於有些積分是「積不出來」的; 也就是說, 反導函數雖然存在, 但是反導函數無法用初等函數經過有限步驟的四則運算與合成組成。既然反導函數無法明確表示, 上述招式就無法使用, 但是這並不代表我們就無從得知其瑕積分的收斂或發散之性質。瑕積分理論就是在尋找各種可能的判別法以確定瑕積分是收斂或是發散。

說到瑕積分理論, 首先我們給出非負函數的比較判別法。

定理 1 (比較判別法, Comparison Test). 假設在 $[a,\infty)$ 區間上有 $0\le f(x)\le g(x)$, 函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[a,t], t\in[a,\infty)$ 上都是黎曼可積。

(A) 若 $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 則 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(B) 若 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 則 $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 發散。

證明: 記 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 與 $G(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$。

(A) 因爲 $f(x)\ge 0$, 所以 $F(x)$ 遞增。因爲 $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 所以極限 $\lim_{x\to\infty} G(x)=L$ 存在。而 $f(x)\le g(x)$ 告知 $F(x)$ 有上界, 所以 $\lim_{x\to\infty} F(x)$ 存在, 即 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(B) 因爲 $f(x)\le g(x)$, 所以 $F(x)\le G(x)$。因爲 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 即 $\lim_{x\to\infty} F(x)=\infty$, 得到 $\lim_{x\to\infty} G(x)=\infty$, 即 $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 發散。

□

例 2. 判斷瑕積分 (A) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ (B) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$ 的收斂性。

解.

(A) 因爲 $0\le \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\le\frac{\sqrt{x}}{x^2}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, 而 $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(B) 因爲 $\sqrt{x}\le x$, 得到 $\sqrt{x+\sqrt{x}}\le\sqrt{x+x}=\sqrt{2x}$, 所以 $0\le\frac{1}{\sqrt{2x}}\le\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$。因爲 $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x$ 發散, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$ 發散。

若將比較判別法這個觀念想清楚, 便會發現瑕積分的收斂或發散問題和函數的等級 (order) 具有密切的關聯。回想第二章與第五章介紹過數列還有函數的等級:

$$c\ll \ln x\ll x^p(p>0)\ll a^x(a>1)\ll\Gamma(x+1)\ll x^x \quad \text{當 } x\to\infty,$$

若函數是一個分式的樣子, 因爲 $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收斂或發散是以 $p=1$ 爲臨界點, 那麼比 x^1 更高階的無窮大量若置於分母, 那麼瑕積分就會有更好的收斂性。

以下我們試著用函數等級的觀點再檢視一次上面兩個例子, 由此便能很容易判斷出瑕積分是收斂或是發散, 甚至可以知道要和哪個函數比較以進行正式論述。

(A) 當 $x \to \infty$ 時, $1 \ll x^2$, 所以 x^2+1 的主要部份是 x^2, 於是瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ 的收斂性和 $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 相當, 因此預期瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(B) 當 $x \to \infty$ 時, $\sqrt{x} \ll x$, 所以 $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 的主要部份是 $\sqrt{x}$, 於是瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$ 的收斂性和 $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 相當, 因此預期瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$ 發散。

在學習瑕積分理論, 除了要學會完整的數學寫作之外, 也要學會從等級的觀點把一個函數最重要的部份找出來, 然後由此預判瑕積分是收斂或是發散。這兩個層面都很重要, 前者是在訓練如何將事情說明清楚, 後者則是在培養對數學的感覺。以下的內容會盡量把處理問題的思維說明清楚, 並給出完整的數學論述。

例 **3.** 對於 $p \in \mathbb{R}$, 試論瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 的收斂性。

在進行正式論述前, 我們試著分析這個瑕積分。首先, 基於對標準模型的認識, 也就是若分子是 1 而不是 $\ln x$ 的時候, 我們知道若 $p > 1$ 時瑕積分收斂, 若 $p \le 1$ 時瑕積分發散。而當 $x \to \infty$ 的時候, 我們知道 $\ln x \to \infty$, 可見得現在這個問題的收斂性絕對不會比標準模型來得好, 至少可以確定的是: 由比較判別法可以得知當 $p \le 1$ 時瑕積分發散。

至於在 $p > 1$ 時, 分子 $\ln x \to \infty$ 影響瑕積分收斂的程度有多大呢? 從等級的意義來看, 我們知道: 對任何 $p > 0$, $\ln x \ll x^p$ 當 $x \to \infty$; 也就是說, 雖然 $\ln x$ 會趨近於無限大, 但是它跑到無限大的程度是遠遠不及 x^p 的程度。所以說 $\frac{\ln x}{x^p}$ 的行爲預測仍然是由分母的 x^p 在主宰, 並預判在 $p > 1$ 時瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收斂。

以下給出關於這個問題的數學論述, 然後再回過頭來研究這個論述的關鍵以及要注意的事情。

解. 首先注意到: 對任意 $p > 0$ 都有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} \overset{(\frac{\infty}{\infty}, L')}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{px^p} = 0。$$

記 $f(x) = \frac{\ln x}{x^p}$, 現分以下兩種情況討論:

(A) <u>若 $p > 1$</u>, 記 $p = 1 + p_0$, 其中 $p_0 > 0$。現將函數 $f(x)$ 拆解:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^p} = \frac{\ln x}{x^{1+p_0}} = \frac{\ln x}{x^{\frac{p_0}{2}}} \cdot \frac{1}{x^{1+\frac{p_0}{2}}},$$

因爲 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{p_0}{2}}} = 0$, 所以取 $\varepsilon = 1 > 0$, 存在 $X \in \mathbb{R}$ 使得對所有 $x > X$ 都有 $\left|\frac{\ln x}{x^{\frac{p_0}{2}}}\right| < 1$。記 $g(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{p_0}{2}}}$, 則對所有 $x > X$ 都有 $0 \le f(x) \le g(x)$。因爲瑕積分 $\int_X^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知瑕積分 $\int_X^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。因此 $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x + \int_X^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(B) <u>若 $p \le 1$</u>, 記 $g(x) = \frac{1}{x^p}$, 因爲對所有 $x > \mathrm{e}$ 都有 $0 \le g(x) \le f(x)$, 而瑕積分 $\int_\mathrm{e}^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知瑕積分 $\int_\mathrm{e}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 因此 $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\mathrm{e} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\mathrm{e}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 發散。

各位是否注意到上面論述的關鍵? 因爲瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收斂或發散是以 $p=1$ 爲臨界點, 所以我們就以 1 爲分界, 對於 $p>1$, 記 $p=1+p_0$, x^p 比 x^1 來說總是多了一個正的次方 x^{p_0}, 然後套用數學家常說的一句行話「跟 x^p 借一點點把 $\ln x$ 吃掉」, 把多出來的 x^{p_0} 分成兩半, 其中一半 $x^{\frac{p_0}{2}}$ 用來控制 $\ln x$ 的增長, 而另外一半與 x^1 結合以確保瑕積分的收斂性。對於 x^{p_0}, 你可以有不同的分配方式, 像是 $x^{\frac{1}{4}p_0}$ 與 $x^{\frac{3}{4}p_0}$, 或是 $x^{\frac{1}{3}p_0}$ 與 $x^{\frac{2}{3}p_0}$ 之類的都可以, 所以將指數 p_0 分兩半的做法純粹是爲了方便起見, 總之這個問題的一個重要原則是: 向 x^p 借一些量控制 $\ln x$。

從這個例子也可以看到第一類瑕積分主要是在觀察當 x 趨近於無限大時函數的行爲, 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可積分的, 那麼 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 就是一個有限的值; 也就是說, 關於比較判別法的使用, 應以一個較爲宏觀的眼光看待它。就以 例 **3** (A) 爲例, 我們先從 x 很大的地方著手而得到在 $x>X$ 的部份可以使用比較判別法, 至於 $\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ 的部份, 因爲函數 $f(x)$ 在 $[1,X]$ 上連續, 所以它是黎曼可積的, 這部份並不會影響瑕積分的收斂性。

比較判別法是設法用一個函數控制另外一個函數, 對於兩個非負函數, 大的函數瑕積分收斂可以確定小的函數瑕積分收斂, 而小的函數瑕積分收斂無法確定大的函數瑕積分是收斂或是發散。同樣地, 小的函數瑕積分發散可以確定大的函數瑕積分發散, 而大的函數瑕積分發散斂無從得知小的函數瑕積分是收斂或是發散。這件事若用面積的觀點去思考應該很容易理解。

此外, 比較判別法的適用時機是函數必須要有一個符號。這裡 定理 **1** 所述的條件必須要求函數非負, 實際上我們也可以處理函數非正的情況; 也就是說, 若遇到 $g(x)\le f(x)\le 0$ 的情況, 那麼就先將不等式同乘負號得到 $0\le -f(x)\le -g(x)$, 然後透過比較判別法確定 $\int_a^\infty -f(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^\infty -g(x)\,\mathrm{d}x$ 是收斂或是發散, 那麼 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 也具有同樣的收斂或是發散性質。

至於瑕點是 $x=-\infty$ 的情況, 由上述定理的呈現應該很容易推理出要如何套用到這個情況, 往後的內容也不再重覆寫出這種情形的判別法則。

以下要介紹的是極限比較判別法。這個判別法更能突顯函數等級與瑕積分的關係, 而且在用法上會比起比較判別法來說要更自在一些。

定理 4 (極限比較判別法, Limit Comparison Test). 假設在 $[a,\infty)$ 區間上 $f(x)>0, g(x)>0$, 而且對任何有界閉區間 $[a,t]$ 上 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是黎曼可積的。若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=C>0$, 則瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 與 $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 具有同樣的收斂或發散性質。

證明: 因爲 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=C>0$, 考慮 $\varepsilon=\frac{C}{2}>0$, 則存在 $X\in\mathbb{R}$ 使得對所有 $x>X$ 都有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-C\right|<\frac{C}{2}\Rightarrow \frac{1}{2}C<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3}{2}C\Rightarrow 0<\frac{1}{2}C\cdot g(x)<f(x)<\frac{3}{2}C\cdot g(x),$$

(A) 若 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 知: $\int_a^\infty \frac{1}{2}C\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 得到 $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(B) 若 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 由比較判別法 (Comparison Test) 知: $\int_a^\infty \frac{3}{2}C\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 得到 $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 發散。

□

例 5. 判斷瑕積分 (A) $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+3}}\,\mathrm{d}x$ (B) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}\,\mathrm{d}x$ 的收斂性。

解.

(A) 令 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^5+3}}$ 與 $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$。兩函數在 $[1,\infty)$ 皆非負, 而且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^5+3}}\cdot x^{\frac{3}{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^5}}}=1,$$

因爲瑕積分 $\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 故由極限比較判別法 (Limit Comparison Test) 得知瑕積分 $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+3}}\,\mathrm{d}x$ 收斂, 而 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^5+3}}\,\mathrm{d}x$ 是定積分, 所以 $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+3}}\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(B) 令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}$ 與 $g(x)=\frac{1}{x}$, 因爲

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}\cdot x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}=1,$$

而瑕積分 $\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 故由極限比較判別法 (Limit Comparison Test) 得知瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}\,\mathrm{d}x$ 發散。

相較於比較判別法, 各位在處理極限的求值通常會比使用不等式來説容易上手, 所以多數人偏好極限比較判別法, 但是不等式的熟練仍然是必要的, 因爲極限比較判別法是基於兩函數的比值之極限存在且爲正值的時候才可以使用, 如果極限不存在的話, 兩函數的收斂或發散性就沒有必然的結果, 這個時候也就只能從比較判別法去思考了。此外, 不等式是分析的基礎, 其它數學問題也需要使用不等式的估計, 所以也無法逃避。

一般說來, 一個函數不見得在 x 很大的時候都有一個符號, 對於函數 $f(x)$ 當 $x\to\infty$ 時始終有正有負的情況下, 比較判別法與極限比較判別法就無法使用, 這時瑕積分又該如何判定呢? 以下將介紹另外幾個判別法則。首先, 因爲瑕積分是透過對於積分的上、下限取極限定義其收斂性, 所以從反導函數的觀點配合極限的柯西收斂準則可得以下判別法:

定理 6 (瑕積分的柯西收斂準則, Cauchy Convergence Criterion for Improper Integrals). 瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂的充分必要條件是*:* 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $T>a$ 使得對任意 $t''>t'>T$ 都有

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon。$$

證明: 記 $F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 瑕積分收斂表示極限 $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)$ 存在, 由極限的柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得到: 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $T>a$ 使得對所有 $t''>t'>T$ 都有

$$|F(t'')-F(t')|<\varepsilon\Rightarrow\left|\int_a^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{t'} f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon。$$

□

根據瑕積分的柯西收斂準則, 我們可得以下結論:

定理 7. 若瑕積分 $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收斂, 則瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收斂。

證明: 因爲瑕積分 $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收斂, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > a$ 使得對任意 $t'' > t' > T$ 都有 $\left|\int_{t'}^{t''} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right| = \int_{t'}^{t''} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$, 所以

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{t'}^{t''} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

因此瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。 □

由 定理 7, 現在要將瑕積分收斂的情況再做一個仔細的分類。

定義 8. 對於瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$,

(A) 若瑕積分 $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收斂, 則稱瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 絕對收斂 (absolutely convergent)。

(B) 若瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 而 $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 發散, 則稱瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 條件收斂 (conditionally convergent)。

由 定理 7 與 定義 8 得知: 若瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 絕對收斂, 則瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

對於比較複雜的函數之瑕積分, 以下提供兩個判別法: 阿貝爾判別法 (Abel's Test) 與狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test)。這兩個判別法的特色是設法將被積函數分解成 $f(x)g(x)$ 的形式, 分別對 $f(x)$ 與 $g(x)$ 有不同的約束條件, 則可判定瑕積分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 的收斂性。在證明當中也將看到積分第二均值定理 (Second Mean Value Theorem for Integrals, General Version) 派上用場。

定理 9 (阿貝爾判別法, Abel's Test). 若瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, $g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 單調有界, 則瑕積分 $\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

證明: 因爲 $g(x)$ 有界, 所以存在 $M > 0$ 使得對所有 $x \in [a,\infty)$ 都有 $|g(x)| \le M$。因爲瑕積分 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 所以由瑕積分的柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion for Improper Integrals) 得知: 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T \ge a$ 使得對任意 $t'' > t' > T$ 都有

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2M}。$$

根據積分第二均值定理 (Second Mean Value Theorem for Integrals, General Version) 得知: 存在 $\xi \in [t', t'']$ 使得

$$\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(t')\int_{t'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(t'')\int_{\xi}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

於是對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > a$ 使得對所有 $t'' > t' > T$ 都有

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left|g(t')\right|\left|\int_{t'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|g(t'')\right|\left|\int_{\xi}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

因此瑕積分 $\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。 □

定理 10 (狄立克萊判別法, Dirichlet's Test). 若函數 $F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,\infty)$ 有界, $g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 單調且 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$, 則瑕積分 $\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

證明: 因爲 $F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 有界, 所以存在 $M>0$ 使得對所有 $t\in[a,\infty)$ 都有 $|F(t)|\le M$, 此時對任意 $d>c\ge a$

$$\left|\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le 2M。$$

因爲 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$, 所以對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $T>a$ 使得對所有 $x>T$ 都有 $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}$。對任意 $t''>t'>T$, 由積分第二均值定理 (Second Mean Value Theorem for Integrals, General Version) 得知: 存在 $\xi\in[t',t'']$ 使得

$$\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(t')\int_{t'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x+g(t'')\int_{\xi}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

於是對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $T>a$ 使得對所有 $t''>t'>T$ 都有

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\big|g(t')\big|\left|\int_{t'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\big|g(t'')\big|\left|\int_{\xi}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M=\varepsilon,$$

因此瑕積分 $\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。 □

例 11. 判斷瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 的收斂性。

解. 令 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 與 $g(x)=\tan^{-1}x$。因爲瑕積分 $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收斂, 而 $g(x)$ 遞增有上界 (上界爲 $\frac{\pi}{2}$), 由阿貝爾判別法 (Abel's Test) 得知: 瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收斂。

例 12. 判斷瑕積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 是絕對收斂、條件收斂、或是發散。

這個瑕積分說來也是棘手, 先看瑕點 $x=\infty$, 若不看分子 $\sin x$ 的部份, 那麼函數是以 $\frac{1}{x^p}, p=1$ 的方式呈現, 它是瑕積分收斂或發散的臨界值。因爲 $|\sin x|\le 1$, 那麼在這樣讓函數值變小的情況有辦法影響瑕積分的收斂性嗎? 這個例子利用狄立克萊判別法可以獲得一個很好的解釋。

另一方面, 初看之下 $x=0$ 是一個瑕點, 但是仔細討論後便會發現它並非瑕點。

解. 因爲 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 所以 $x=0$ 並非瑕點, 於是我們只需處理瑕點是 $x=\infty$ 的瑕積分即可。這裡我們將瑕積分拆解成 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, 然後只要研究 $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的收斂性即可。

(A) 證明: $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 發散。首先觀察在 $[1,\infty)$ 上有不等式

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

(A1) 首先證明 $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收斂: 因爲

$$F(t)=\int_1^t \cos 2x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]\Bigg|_1^t=\frac{1}{2}(\sin 2t-\sin 2),$$

得到 $|F(t)|=|\frac{1}{2}(\sin 2t-\sin 2)|\le\frac{1}{2}(|\sin 2t|+|\sin 2|)\le 1$ 有界。因爲函數 $\frac{1}{2x}$ 在 $[1,\infty)$ 上遞減, 而且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$, 由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知: $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(A2) 以下證明: $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ 發散。利用反證法, 假設 $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收斂, 因爲 $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收斂, 所以

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \left(\frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos 2x}{2x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$$

收斂, 這與 $\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ 發散矛盾。

(A3) 由 (A1) 與 (A2) 還有比較判別法 (Comparison Test) 得知: $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 發散。

(B) 證明: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收斂。因爲

$$F(t) = \int_1^t \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]\Big|_1^t = -\cos t + \cos 1,$$

得到 $|F(t)| = |-\cos t + \cos 1| \le |\cos t| + |\cos 1| \le 2$ 有界。因爲函數 $\frac{1}{x}$ 在 $[1,\infty)$ 上遞減, 而且 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, 由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收斂, 因此 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(C) 綜合 (A) 和 (B) 的討論得知: 瑕積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 條件收斂。

7.3 第二類瑕積分的收斂理論

這一節要探討第二類瑕積分。由單元 7.1 的討論, 若要回答第二類瑕積分的收斂性, 可以先把問題轉換成第一類瑕積分之後再進行判斷, 但有時在做兩類瑕積分的轉換是有一些鎖碎的, 若能直接從函數的原貌判斷瑕積分的收斂或發散其實還是最理想的, 所以這一節會詳細介紹與第二類瑕積分相關理論。

對於非負函數的第二類瑕積分, 這裡先給出比較判別法還有極限比較判別法的定理敘述與證明。

定理 1 (比較判別法, Comparison Test). 假設在 $[a,b)$ 區間上有 $0 \le f(x) \le g(x)$, 而且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=b$ 爲瑕點。

(A) 若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 則 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(B) 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 則 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 發散。

證明: 記 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 與 $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$。

(A) 因爲 $f(x) \ge 0$, 所以 $F(x)$ 遞增。因爲 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 所以極限 $\lim\limits_{x\to b^-} G(x) = L$ 存在。而 $f(x) \le g(x)$ 告知 $F(x)$ 有上界, 所以 $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ 存在, 即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(B) 因爲 $f(x) \le g(x)$, 所以 $F(x) \le G(x)$。因爲 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 即 $\lim\limits_{x\to b^-} F(x) = \infty$, 得到 $\lim\limits_{x\to b^-} G(x) = \infty$, 即 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 發散。

□

定理 2 (極限比較判別法, Limit Comparison Test). 假設在 $[a,b)$ 區間上 $f(x)>0, g(x)>0$, 而且兩函數在 $x=b$ 爲瑕點。若 $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=C>0$, 則瑕積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 與 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 具有同樣的收斂或發散性質。

證明: 因爲 $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=C>0$, 考慮 $\varepsilon=\frac{C}{2}>0$, 則存在 $\delta>0$ 使得對所有滿足 $0<b-x<\delta$ 的點都有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-C\right|<\frac{C}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}C<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3}{2}C\Rightarrow 0<\frac{1}{2}C\cdot g(x)<f(x)<\frac{3}{2}C\cdot g(x),$$

(A) 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 知: $\int_a^b \frac{1}{2}C\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 得到 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

(B) 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 由比較判別法 (Comparison Test) 知: $\int_a^b \frac{3}{2}C\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 得到 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 發散。

□

雖然定理的敘述和證明幾乎和第一類瑕積分是一模一樣的, 但要特別注意的是: 在處理實際問題時, 因爲兩類瑕積分標準模型的機制不同, 所以應小心觀察函數的等級。

例 3. 試論瑕積分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ 的收斂性。

首先觀察函數 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$, 它在 $x=1$ 的地方產生瑕點。當 $x\to 1$ 的時候, 函數 $f(x)$ 趨近於無限大的等級是什麼呢? 以下從三種觀點來解讀函數的等級並預測瑕積分的收斂性。

(A) 將 $1-x^4$ 進行因式分解, 得到

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(1+x^2)(1+x)(1-x)}},$$

關於瑕點 $x=1$ 附近, 實際上只有 $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$ 這個部份會讓函數趨近於無限大, 其它部份都是有界函數。所以函數在瑕點 $x=1$ 附近的等級是 $\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$, 而 $\frac{1}{4}<1$, 所以瑕積分預期是收斂的。

(B) 考慮變數變換 $y=1-x$。當 $x\to 1$ 的時候 $y\to 0$。而

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1-(1-y)^4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4y-6y^2+4y^3-y^4}}$$

四次根號內的每一項都趨近於零, 但是它們有等級的區別, 我們要找出最低階的無窮小量。因爲當 $y\to 0$ 的時候 $y^4\ll y^3\ll y^2\ll y$, 所以函數在 $y=0$ 附近的行爲是由 $\frac{1}{\sqrt[4]{4y}}=\frac{1}{(4y)^{\frac{1}{4}}}$ 主宰, 而 $\frac{1}{4}<1$, 所以瑕積分預期是收斂的。我們可以從因式分解 $4y-6y^2+4y^3-y^4=y(4-6y+4y^2-y^3)$ 的方式再次確認當 $y\to 0$ 時, 括號內的量不會趨近於零, 所以函數在 $y\to 0$ 的行爲主要是 $\frac{1}{(4y)^{\frac{1}{4}}}$ 影響全局。

(C) 利用變數變換 $x=1-\frac{1}{y}$ 將瑕積分改寫成

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}\,\mathrm{d}x=\int_1^\infty \frac{1}{y^2}\frac{1}{\sqrt[4]{1-\left(1-\frac{1}{y}\right)^4}}\,\mathrm{d}y=\int_1^\infty \frac{1}{y^2}\frac{y}{\sqrt[4]{y^4-(y-1)^4}}\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^\infty \frac{1}{y\sqrt[4]{4y^3-6y^2+4y-1}}\,\mathrm{d}y,$$

所以函數在 $y=\infty$ 的瑕點具有等級 $\frac{1}{y^p}$, 其中 $p=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$, 所以瑕積分預期是收斂的。

經過上述的分析後, 現在要確實論述瑕積分的收斂性。

證明: 因爲

$$0\le \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(1+x^2)(1+x)(1-x)}}\le \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}},$$

而且

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to 1}\int_0^t -\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\,\mathrm{d}(1-x)=\lim_{t\to 1}\left[-\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{4}}\right]\bigg|_0^t$$
$$=\lim_{t\to 1}-\frac{4}{3}\left((1-t)^{\frac{3}{4}}-1\right)=\frac{4}{3}$$

收斂, 所以由比較判別法 (Comparison Test) 得知瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ 收斂。 □

我們也可以用極限比較判別法來驗證瑕積分的收斂性。

證明: 令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ 與 $g(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$, 因爲

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1^-}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1-x^4}}=\lim_{x\to 1^-}\sqrt[4]{\frac{1}{1+x+x^2+x^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4}}>0,$$

而

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to 1}\int_0^t -\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\,\mathrm{d}(1-x)=\lim_{t\to 1}\left[-\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{4}}\right]\bigg|_0^t$$
$$=\lim_{t\to 1}-\frac{4}{3}\left((1-t)^{\frac{3}{4}}-1\right)=\frac{4}{3}$$

收斂, 故由極限比較判別法 (Limit Comparison Test) 得知瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ 收斂。 □

上面兩種證明方法都說明了: 無論你用哪一種判別法, 勢必要先找到進行比較的函數, 所以終究還是要先徹底了解等級的概念才有可能徹底認識瑕積分的理論。

再來要介紹一般函數 (不見得恆正或恆負) 第二類瑕積分之判別法則, 包括瑕積分的柯西收斂準則、阿貝爾判別法與狄立克萊判別法。

定理 4 **(瑕積分的柯西收斂準則, Cauchy Convergence Criterion for Improper Integrals).** 若函數 $f(x)$ 在 $x=b$ 是瑕點, 則瑕積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂的充分必要條件是: 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得對任意 $t',t''\in(b-\delta,b), t'<t''$, 都有

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon。$$

證明: 記 $F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 瑕積分收斂表示極限 $\lim\limits_{t\to b^-}F(t)$ 存在, 極限的柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得到: 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得對所有 $t',t''\in(b-\delta,b)$ 且 $t'<t''$ 都有

$$|F(t'')-F(t')|<\varepsilon \Rightarrow \left|\int_a^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{t'} f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon。$$

□

定理 5 **(阿貝爾判別法, Abel's Test).** 假設 $f(x)$ 在 $x=b$ 是瑕點, 若瑕積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上單調有界, 則瑕積分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

證明: 因爲 $g(x)$ 有界, 所以存在 $M>0$ 使得對所有 $x\in[a,b)$ 都有 $|g(x)|\le M$。因爲瑕積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 所以由瑕積分的柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion for Improper Integrals) 得知: 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得對任意 $t',t''\in(b-\delta,b), t'<t''$ 都有

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2M}。$$

根據積分第二均值定理 (Second Mean Value Theorem for Integrals, General Version) 得到: 存在 $\xi\in[t',t'']$ 使得

$$\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(t')\int_{t'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x+g(t'')\int_{\xi}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

於是對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得對所有 $t',t''\in(b-\delta,b), t'<t''$ 都有

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\left|g(t')\right|\left|\int_{t'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|g(t'')\right|\left|\int_{\xi}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon,$$

因此瑕積分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。 □

定理 6 **(狄立克萊判別法, Dirichlet's Test).** 假設 $f(x)$ 在 $x=b$ 是瑕點, 若 $F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,b)$ 上有界, $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上單調並且 $\lim\limits_{x\to b^-}g(x)=0$, 則瑕積分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。

證明: 因爲 $F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 有界, 所以存在 $M>0$ 使得對所有 $t\in[a,b)$ 都有 $|F(t)|\le M$, 此時對任意 $d>c\ge a$ 都有

$$\left|\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le 2M。$$

因爲 $\lim_{x\to b^-} g(x)=0$, 所以對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得對所有 $x\in(b-\delta,b)$ 都有 $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}$。對任意 $t''>t'>T$, 由積分第二均值定理 (Second Mean Value Theorem for Integrals, General Version) 得知: 存在 $\xi\in[t',t'']$ 使得

$$\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(t')\int_{t'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(t'')\int_{\xi}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

於是對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得對所有 $t',t''\in(b-\delta,b), t'<t''$ 都有

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left|g(t')\right|\left|\int_{t'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|g(t'')\right|\left|\int_{\xi}^{t''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M = \varepsilon,$$

因此瑕積分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂。 □

例 **7.** 試就 p 值, 其中 $p\in(0,2)$, 判斷瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$ 是絕對收斂、條件收斂、或是發散。

這裡先對瑕積分進行大致分析, 然後預判結果再進行論述。首先, 我們知道瑕點是 $x=0$, 所以它是第二類瑕積分。再看函數 $\frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 它是由 $\frac{1}{x^p}$ 以及 $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 兩類函數相乘, 就 $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 而言, 雖然當 $x\to 0$ 時函數不斷地振盪, 但函數值始終是有界的, 對於 $\frac{1}{x^p}$ 來說, 它是瑕積分標準模型, 所以整體而言, 在 $p\in(0,1)$ 的時候, 瑕積分預判會有好的收斂性, 可利用標準模型的瑕積分收斂還有對於正弦函數的有界性證明瑕積分是絕對收斂的。

當 $p\in[1,2)$, 標準模型的瑕積分是不好的, 若是要問函數加了絕對值後的瑕積分是否收斂, 那要看 $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ 和 1 之間減少的量是否足以影響瑕積分的收斂。另一方面, 若是問原始的瑕積分是否收斂, 則是要觀察 $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 有正有負的現象使得積分相消的效應和標準模型的函數是否能夠抗衡讓瑕積分變好, 這時就要思考函數如何適當地分配, 也就是要將 $\frac{1}{x^p}$ 進行拆解使得狄立克萊判別法得以實現。

解.

(A) 證明: 若 $p\in(0,1)$, 瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 絕對收斂。這是因爲

$$\left|\frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \frac{1}{x^p},$$

而且當 $p\in(0,1)$ 時瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 收斂, 故由比較判別法 (Comparison Test) 得知瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 絕對收斂。

(B) 證明: 若 $p\in[1,2)$, 則瑕積分 $\int_0^1 \left|\frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$ 發散。

(B1) 因爲

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^p}\right| \ge \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^p} = \frac{1}{x^p}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{2}\right) = \frac{1}{2x^p} - \frac{\cos(\frac{2}{x})}{2x^p},$$

首先證明瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{2x^p}\cos\left(\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{1}{4x^{p-2}}\cdot\cos\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ 收斂: 因爲

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int_t^1 \cos\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_t^1 \cos\left(\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{2}{x}\right) = \left[\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right]\Bigg|_t^1 \\
&= \sin 2 - \sin\left(\frac{2}{t}\right),
\end{aligned}
$$

得到

$$
|F(t)| = \left|\sin 2 - \sin\left(\frac{2}{t}\right)\right| \le |\sin 2| + \left|\sin\left(\frac{2}{t}\right)\right| \le 1+1=2
$$

有界, 而函數 $-\frac{1}{4x^{p-2}} = -\frac{1}{4}x^{2-p}$ 當 $2-p>0$, 也就是 $p<2$ 的時候在 $(0,1]$ 上遞減且 $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{4x^{p-2}} = 0$, 故由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知: 瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{2x^p}\cos\left(\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$ 在 $p\in[1,2)$ 時收斂。

(B2) 以下證明: 若 $p\in[1,2)$, $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 發散。利用反證法, 假設 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 收斂, 因爲 $\int_0^1 \frac{1}{2x^p}\cos\left(\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$ 在 $p\in[1,2)$ 時收斂, 所以

$$
\int_0^1 \frac{1}{2x^p}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^p} + \frac{\cos(\frac{2}{x})}{2x^p}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^p}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\cos(\frac{2}{x})}{2x^p}\,\mathrm{d}x
$$

收斂, 這與 $\int_0^1 \frac{1}{2x^p}\mathrm{d}x$ 在 $p\in[1,2)$ 發散矛盾。

(B3) 由 (B1) 和 (B2) 還有比較判別法 (Comparison Test) 得知 $\int_0^1 \left|\frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$ 發散。

(C) 證明: 若 $p\in[1,2)$, 瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{1}{x^{p-2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x$ 收斂。因爲

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int_t^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_t^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \left[-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]\Bigg|_t^1 \\
&= -\cos 1 + \cos\left(\frac{1}{t}\right),
\end{aligned}
$$

得到 $|F(t)| = \left|-\cos 1 + \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right| \le |\cos 1| + \left|\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right| \le 1+1=2$ 有界, 而函數 $-\frac{1}{2x^{p-2}} = -\frac{1}{2}x^{2-p}$ 當 $2-p>0$, 也就是 $p<2$ 的時候在 $(0,1]$ 上遞減且 $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x^{p-2}} = 0$, 故由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知: 瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 在 $p\in[1,2)$ 時收斂。

(D) 綜合前面所有討論, 得到瑕積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 在 $p\in(0,1)$ 是絕對收斂, 在 $p\in[1,2)$ 是條件收斂。

我們也可以把這個問題轉換成第一類瑕積分。令 $y=\frac{1}{x}$, 則 $\mathrm{d}y = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, 即 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y$, 當 $x=1$, 則 $y=1$;當 $x\to 0$, 則 $y\to\infty$。所以瑕積分可改寫成

$$
\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_\infty^1 y^p\sin y\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_1^\infty y^{p-2}\sin y\,\mathrm{d}y = \int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{2-p}}\,\mathrm{d}y。
$$

在這樣的表達之下, 正弦函數內的變數是單純的 y, 這樣看起來會比較平易近人一些, 而且在 $p=1$ 的情況, 我們在 7.2 節的 例 **12** 已經討論過了。以下我們再討論一次瑕積分的收斂或發散, 各位應花時間好好體會並比較這兩種論述上的異同。

證明:

(A) 證明: 若 $p \in (0,1)$, 瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 絕對收斂。因爲

$$\left|\frac{\sin y}{y^{2-p}}\right| \le \frac{1}{y^{2-p}}$$

若 $0 < p < 1$, 則 $1 < 2-p < 2$, 因爲瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 收斂, 故由比較判別法 (Comparison Test) 得知: $\int_1^\infty \left|\frac{\sin y}{y^{2-p}}\right|\mathrm{d}y$ 收斂, 即 $\int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 絕對收斂。

(B) 證明: 若 $p \in [1,2)$, 瑕積分 $\int_1^\infty \left|\frac{\sin y}{y^{2-p}}\right|\mathrm{d}y$ 發散。

(B1) 因爲

$$\left|\frac{\sin y}{y^{2-p}}\right| \ge \frac{\sin^2 y}{y^{2-p}} = \frac{1}{y^{2-p}}\left(\frac{1-\cos 2y}{2}\right) = \frac{1}{2y^{2-p}} - \frac{\cos 2y}{2y^{2-p}}$$

這裡先證明瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\cos 2y}{2y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 是收斂的。因爲

$$F(t) = \int_1^t \cos 2y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}\sin 2y\right]\Big|_1^t = \frac{1}{2}\left(\sin 2t - \sin 2\right),$$

得到

$$|F(t)| = \left|\frac{1}{2}\left(\sin 2t - \sin 2\right)\right| \le \frac{1}{2}\left(|\sin 2t| + |\sin 2|\right) \le \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

有界, 而函數 $\frac{1}{2y^{2-p}}$ 在 $p \in [1,2)$ 在 $[1,\infty)$ 上遞減並且 $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{1}{2y^{2-p}} = 0$, 故由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知: 瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\cos 2y}{2y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 在 $p \in [1,2)$ 時收斂。

(B2) 以下欲證明: 若 $p \in [1,2)$, 瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\sin^2 y}{y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 發散。利用反證法, 假設 $\int_1^\infty \frac{\sin^2 y}{y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 收斂, 因爲瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\cos 2y}{2y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 在 $p \in [1,2)$ 時收斂, 所以

$$\int_1^\infty \frac{1}{2y^{2-p}}\,\mathrm{d}y = \int_1^\infty \left(\frac{\sin^2 y}{y^{2-p}} + \frac{\cos 2y}{2y^{2-p}}\right)\mathrm{d}y = \int_1^\infty \frac{\sin^2 y}{y^{2-p}}\,\mathrm{d}y + \int_1^\infty \frac{\cos 2y}{2y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$$

收斂, 這與 $\int_1^\infty \frac{1}{2y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 在 $p \in [1,2)$ 發散矛盾。

(B3) 由 (B1) 和 (B2) 還有比較判別法 (Comparison Test) 得知瑕積分 $\int_1^\infty \left|\frac{\sin y}{y^{2-p}}\right|\mathrm{d}y$ 發散。

(C) 證明: 若 $p \in [1,2)$, 瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 收斂。因爲

$$F(t) = \int_1^t \sin y\,\mathrm{d}y = \Big[-\cos y\Big]\Big|_1^t = -\cos t + \cos 1,$$

得到

$$|F(t)| = |-\cos t + \cos 1| \le |\cos t| + |\cos 1| \le 1 + 1 = 2$$

有界, 而函數 $\frac{1}{y^{2-p}}$ 在 $p \in [1,2)$ 在 $[1,\infty)$ 上遞減並且 $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{1}{y^{2-p}} = 0$, 故由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知: 瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 在 $p \in [1,2)$ 時收斂。

(D) 綜合前面所有討論, 得到瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{2-p}}\,\mathrm{d}y$ 在 $p \in (0,1)$ 是絕對收斂, 在 $p \in [1,2)$ 是條件收斂。

$\square$

7.4 伽瑪函數與高斯積分

這一節要介紹兩個瑕積分的應用: 伽瑪函數與高斯積分, 並探討兩者之間的關聯。

7.4.1 伽瑪函數

例 **1.** 試就 $p \in \mathbb{R}$ 探討瑕積分 $\Gamma(p+1) \overset{\text{定義}}{=\!=} \int_0^\infty x^p \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的收斂性。

解**.** 首先確定瑕積分的的位置。(A) 若 $p<0$, 則 $x=0$ 是瑕點。(B) 對所有 $p \in \mathbb{R}$, $x=\infty$ 是瑕點。將瑕積分拆解成兩部份

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^p \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^p \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathtt{I} + \mathtt{II},$$

現分別討論 $\mathtt{I}$ 和 $\mathtt{II}$ 的收斂性。

(A) <u>若 $p \geq 0$</u>, 則 $\mathtt{I}$ 是定積分。
<u>若 $p<0$</u>, 因爲在 $x \in [0,1]$ 上有不等式 $\mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{e}^{-x} \leq 1$, 所以

$$0 \leq x^p \mathrm{e}^{-1} \leq x^p \mathrm{e}^{-x} \leq x^p\text{。}$$

(A1) <u>若 $-1<p<0$</u>, 因爲 $\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$ 收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知 $\mathtt{I}$ 收斂。

(A2) <u>若 $p \leq -1$</u>, 因爲 $\int_0^1 x^p \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{d}x$ 發散, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知 $\mathtt{I}$ 發散。

(B) 這裡先證明: 對所有 $p \in \mathbb{R}$, 極限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{p+2}\mathrm{e}^{-x} = 0$。現分成以下兩種情況討論:

(B1) <u>若 $p+2 \leq 0$</u>, 則

$$\lim_{x\to\infty} x^{p+2}\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-(p+2)}\mathrm{e}^x} = 0\text{。}$$

(B2) <u>若 $p+2>0$</u>,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^{p+2}\mathrm{e}^{-x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{p+2}}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{p+2}}}\right)^{p+2} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{p+2}}}\right)^{p+2} \\ &\overset{(\frac{\infty}{\infty},L')}{=\!=\!=} \left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{p+2}\mathrm{e}^{\frac{x}{p+2}}}\right)^{p+2} = 0\text{。}\end{aligned}$$

因爲 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{p+2}\mathrm{e}^{-x} = 0$, 所以存在 $X = X(p) > 1$ 使得對所有 $x > X$ 都有 $x^{p+2}\mathrm{e}^{-x} < 1$, 得到在 $x > X$ 有不等式 $0 \leq x^p\mathrm{e}^{-x} < \frac{1}{x^2}$。因爲 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收斂, 所以由比較判別法 (Comparison Test) 得知: 對所有 $p \in \mathbb{R}$, 瑕積分 $\mathtt{II}$ 收斂。

(C) 綜合 (A) 與 (B) 的討論得到瑕積分 $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 在 $p > -1$ 時收斂。

回顧上面的討論, 由於在 $p \in (-1, \infty)$ 時瑕積分 $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 收斂; 也就是說, 每個 $p \in (-1, \infty)$ 都對應到瑕積分的收斂值 $\Gamma(p+1)$, 於是 p 和 $\Gamma(p+1)$ 之間形成函數關係, 我們稱這個對應關係 (以 p 爲函數的變數) 爲 *伽瑪函數* (gamma function)。

這裡注意到: 若想要強調伽瑪函數有關「函數」的意義, 由於我們習慣上會把一個函數以 x 當作變數, 所以這裡將瑕積分式重新改寫成 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, 此時伽瑪函數 $\Gamma(x)$ 的定義域是 $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$。至於前面的討論, 我故意把伽瑪函數寫成 $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, 在幾何上的解釋是將函數 $\Gamma(x)$ 的圖形向左平移 1 單位之後的結果。會以 $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 的方式呈現之用意是希望各位此時此刻專心於瑕積分收斂與發散的討論, 因爲這樣被積分函數的表達 $t^x\mathrm{e}^{-t}$ 較爲單純。此時, 平移後的伽瑪函數 $\Gamma(x+1)$ 定義域則爲 $D = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\}$; 換言之, 例 **1** 的討論可理解爲探討伽瑪函數的定義域。

不曉得各位對於伽瑪函數是否感到困惑, 爲什麼伽瑪函數是定義成 $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 而不直接記成 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 呢? 若你對這個問題感興趣的話, 可從數學史的方面繼續考究, 而我查到的資料如下: 實際上, 數學家歐拉 (Leonhard Euler, 1707–1783) 在引進伽瑪函數時的確是定義成 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, 而歐拉在討論伽瑪函數的目的是想同時了解另一類積分型式: $\int_0^1 t^x(1-t)^y\,\mathrm{d}t$。直到法國數學家勒讓德 (Adriean-Marie Legendre, 1752–1833) 不僅把伽瑪函數修正了一單位, 也一併將上述所說的另一類函數調整一單位記成 $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$, 這類函數稱爲 *貝塔函數* (beta function), 此後就被廣泛地採納而沿用。

勒讓德做這樣的調整, 有一說是爲了數學的美感: 若以現在所採用的貝塔函數與伽瑪函數定義, 兩類函數之間滿足以下較爲漂亮的對稱式:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)};$$

也就是說, 原先沒有經過修正的兩類函數關係式比較醜陋。在文獻 [1] 中另外又提出兩個爲什麼要把伽瑪函數重新定義的理由, 基本上也是在於修正後的結果可以將伽瑪函數中的代數結構看得更清楚, 這部份就留給各位自行延伸閱讀。

伽瑪函數在很多地方都會見到它的蹤跡, 像是工程數學使用微分方程處理問題時, 幾何領域要計算 n-維球的體積或表面積, 機率與統計常用的一些分佈 (distribution) 之認識等。在數學上, 伽瑪函數是將階乘連續化 (光滑化) 的一種方法, 透過分部積分 (integration by parts) 可推出 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, 所以特別把 x 代入非負整數 n 再配合 $\Gamma(0) = 1$ 的結果就形成階乘, 即 $\Gamma(n+1) = n!$。此外, 從這個遞迴關係式也說明: 對於伽瑪函數 $\Gamma(x+1)$, 只要知道函數在 $-1 < x \le 0$ 上的值, 就可以推出函數在 $x > 0$ 的值。

伽瑪函數還有很多性質值得探討, 這裡只是先將伽瑪函數的收斂性還有基本概念做一個通盤的討論, 日後若各位有遇到伽瑪函數時便能很快地進入狀況。

參考文獻

[1] 神奇的伽瑪函數, 靳志輝著, 高等教育出版社, 2018。

7.4.2 高斯積分

這一小節的主要目的是要認識 高斯積分 (Gaussian integral):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

我們除了要證明高斯積分收斂, 還要進一步求出瑕積分的值。

例 **2.** 證明: 高斯積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 收斂。

證明: 先將瑕積分拆解成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathtt{I} + \mathtt{II},$$

令 $y = -x$, 則 $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$, 當 $x = 0$, 則 $y = 0$;當 $x \to -\infty$, 則 $y \to \infty$, 於是

$$\mathtt{I} = \int_{x=-\infty}^{x=0} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{y=\infty}^{y=0} \mathrm{e}^{-y^2}\cdot(-1)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{x=\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

最後一式成立是因爲 啞吧變數 (dummy variable) 所致, 所以 $\mathtt{I}$ 可以完全表示成 $\mathtt{II}$ 的樣子, 因此兩積分同時收斂或發散。以下驗證 $\mathtt{II}$ 的收斂性: 因爲

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

當 $x \in [1,\infty)$ 有不等式 $0 \le \mathrm{e}^{-x^2} \le \mathrm{e}^{-x}$, 而且

$$\int_{1}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]\Big|_{1}^{t} = \lim_{t\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-1}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

收斂, 故由比較判別法 (Comparison Test) 得知: $\int_{1}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 收斂, 而 $\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 是定積分, 因此 $\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 與 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 都收斂。 $\square$

接下來要討論高斯積分的值。在此之前我們先回顧積分的理論: 關於函數 e^{-x^2}, 它的反導函數是「積不出來」的; 也就是說, 由於函數 e^{-x^2} 是連續函數, 其反導函數 $F(x) = \int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 存在, 但是 $F(x)$ 無法表示成初等函數經過有限步驟的四則運算與合成組成。所以欲求高斯積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的值, 需要利用其它方法處理。

若各位有印象的話, 高斯積分的結果曾經在微積分課程提過, 那時是透過多變數重積分理論、建立直角坐標與極坐標的二次積分轉換關係以及瑕積分理論求得。這裡因爲我們尚未提及任何多變數微積分的理論, 所以在此試圖直接用單變數微積分的方法討論。當然, 以下介紹各位會看到論述的篇幅較長, 但是這並非壞事, 因爲我們可以從中看到很多以前不曾想過或不曾留意的現象, 像是三角積分與多項式以及有理函數積分之間的關聯, 還有定積分的值對於三角函數的次方取極限之後的結果, 另外也用到凸函數的理論, 這些都是可以仔細體會的數學之美。

在介紹高斯積分之前, 我們先對三角積分進行一些討論。

例 **3.** 設 m 為非負整數, 試求定積分 $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, \mathrm{d}x$ 的遞迴關係式 (recurrence formula)。

解.

(A) $\underline{當\ m=0}$, 則 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$。

(B) $\underline{當\ m=1}$, 則 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$。

(C) $\underline{當\ m \geq 2, m \in \mathbb{N}}$, 由分部積分公式 (Integration by Parts) 得到

$$\begin{aligned}
I_m &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \, \mathrm{d}\cos x = \Big[-\sin^{m-1} x \cos x\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}\sin^{m-1} x \\
&= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1-\sin^2 x) \, \mathrm{d}x \\
&= (m-1)\left(I_{m-2} - I_m\right),
\end{aligned}$$

所以 $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$。

這裡列出次方分別是奇數與偶數時的結果:

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \quad 與 \quad I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}。 \tag{1}$$

在遞迴關係式 $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$ 中, 我們可以立刻得到 $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{I_{m-2}}{I_m} = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{m}{m-1} = 1$, 這是關於奇數次方積分的比值或者是偶數次方積分的比值之極限探討。至於相臨兩項 (奇數次方的積分與偶數次方的積分) 的比值極限又為何呢? 甚至, 有什麼方法可以描述 I_{2n+1} 或 I_{2n-2} 當 n 趨近於無限大的行為呢? 以下將說明這個結果。

例 **4.**

(A) 證明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$。

(B) 證明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, I_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, I_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

證明:

(A) 因為對所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及任何 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 都有 $0 \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$, 因此積分後則有

$$0 \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} \Rightarrow 1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n},$$

因為 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, 由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$。

(B) 由 (1) 式可知 $I_{2n}I_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$, 所以

$$n\,I_{2n+1}^2=\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\Rightarrow\sqrt{n}\,I_{2n+1}=\sqrt{\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}},$$

取極限之後則有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,I_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}。$$

至於另一個極限討論如下:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,I_{2n-2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,I_{2n+1}\cdot\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\cdot\frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{\sqrt{\pi}}{2}。$$

□

現在針對奇數次方與偶數次方分別進行不同的變數變換:

(奇) 對於 $I_{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,\mathrm{d}t$, 令 $x=\cos t$, 則 $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$, 積分上限 $x=0$, 積分下限 $x=1$, 則

$$I_{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)^n\cdot(-\sin t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x。$$

(偶) 對於 $I_{2n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t\,\mathrm{d}t$, 令 $x=\cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$, 則 $1+x^2=\csc^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}$, 即 $\sin^2 t=\frac{1}{1+x^2}$, 而 $\mathrm{d}x=-\csc^2 t\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}t$, 積分上限 $x=0$, 積分下限當 $t\to 0$ 時 $x\to\infty$, 則

$$I_{2n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t\,\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t)^n\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x。$$

在經過前面的鋪陳之後, 我們現在可以求得高斯積分的值了。

例 **5 (**高斯積分**,** Gaussian Integral**).** 證明:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}。$$

證明:

(A) 首先證明不等式:

$$1-x^2\le\mathrm{e}^{-x^2}\le\frac{1}{1+x^2}。$$

(A1) 考慮 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$, 因爲 $f''(x)=\mathrm{e}^{-x}>0$, 所以 $f(x)$ 是凸函數 (convex function), 於是函數 $f(x)$ 的圖形會在任一點切線的上方。而函數 $f(x)$ 的圖形在點 $(0,1)$ 的切線方程式爲 $y-1=f'(0)(x-0)=-x$, 即 $y=1-x$, 所以對所有 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $\mathrm{e}^{-x}\ge 1-x$。將 x 替換成 x^2 則有 $\mathrm{e}^{-x^2}\ge 1-x^2$。

(A2) 考慮 $g(x) = \mathrm{e}^x$, 因爲 $g''(x) = \mathrm{e}^x > 0$, 所以 $g(x)$ 是凸函數 (convex function), 於是函數 $g(x)$ 的圖形會在任一點切線的上方。而函數 $g(x)$ 的圖形在點 $(0, 1)$ 的切線方程式爲 $y - 1 = g'(0)(x - 0) = x$, 即 $y = 1 + x$, 所以對所有 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, 得到 $\mathrm{e}^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$。最後, 將 x 替換成 x^2 則有 $\mathrm{e}^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$。

(B) 以下證明: 對於 $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x。$$

考慮變數變換 $y = \frac{1}{\sqrt{n}}x$, 則 $\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}x$。當 $x = 0$, 則 $y = 0$;當 $x \to \infty$, 則 $y \to \infty$, 於是

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ny^2} \cdot \sqrt{n}\,\mathrm{d}y = \sqrt{n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ny^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x,$$

最後一等式是基於啞巴變數所致。

(C) 由 (A) 和 (B) 可得

$$\sqrt{n}\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x,$$

即 $\sqrt{n}\,I_{2n+1} \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{n}\,I_{2n-2}$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,I_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,I_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。因此 $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$。

□

高斯積分在高等數學上的應用非常廣泛, 這裡我們先從函數開始討論。所謂 高斯函數 (Gaussian function), 它是從函數 $f_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 出發, 逐步進行平移與伸縮後的結果:

$$f_4(x) = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{b}\right)^2}。$$

這裡 a, b, c 皆爲常數, 在實際應用上會關心的是 $a > 0, b > 0, c \in \mathbb{R}$ 的情況。從函數 $f_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 轉換成 $f_4(x) = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{b}\right)^2}$ 的過程, 我們可以這麼看待:

(A) 令 $f_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, 考慮 $f_2(x) = f_1(\frac{1}{b}x) = \mathrm{e}^{-\frac{\left(\frac{1}{b}x\right)^2}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2}$, 幾何上表示將函數 $f_1(x)$ 的圖形左右伸長 b 倍。注意到這裡 $b > 1$ 表示伸長, $0 < b < 1$ 則是壓縮。

(B) 令 $f_3(x) = f_2(x - c) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{b}\right)^2}$, 幾何上表示將函數 $f_2(x)$ 的圖形向右平移 c 單位。

(C) 令 $f_4(x) = af_3(x)$, 幾何上表示將函數 $f_3(x)$ 的圖形上下伸長 a 倍。注意到這裡 $a > 1$ 表示伸長, $0 < a < 1$ 則是壓縮。

注意到對於一般的函數, 我們還可以對它進行上下平移: $f(x) + d$, 但是此時我們不這麼做, 因爲一旦經過上下平移, 那麼它的瑕積分就不會收斂。

在機率與統計的研究中會考慮 常態分佈函數 (normal distribution function):

$$N(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

和高斯函數 $f_4(x)$ 對照之下, 則爲 $a=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}, b=\sigma, c=\mu$。在常態分佈函數中使用 μ 與 σ 這兩個希臘字母已被公認爲標準的符號, 其中 $\mu\in\mathbb{R}$ 表示 期望值 (expectation), 而 $\sigma>0$ 表示 標準差 (standard deviation)。至於爲什麼 a 是 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ 呢? 因爲這樣的選取下會讓常態分佈函數的瑕積分值爲 1。以下我們從「希望常態分佈函數的瑕積分爲 1」這個條件反解 a 的值:

例 **6.** 證明:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}x=1。$$

解. 假設 $N(x)=a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ 滿足 $\int_{-\infty}^{\infty}N(x)\,\mathrm{d}x=1$, 考慮變數變換 $y=\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}$, 則 $\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}\,\mathrm{d}x$, 而 $x\to-\infty$ 時 $y\to-\infty$;當 $x\to\infty$ 時 $y\to\infty$, 所以

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}N(x)\,\mathrm{d}x&=\int_{x=-\infty}^{x=\infty}a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{y=-\infty}^{y=\infty}a\mathrm{e}^{-y^2}\cdot\sqrt{2}\,\sigma\,\mathrm{d}y=a\sqrt{2}\,\sigma\int_{y=-\infty}^{y=\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\\&=a\sqrt{2}\,\sigma\sqrt{\pi}\overset{\text{希望}}{=\!=}1,\end{aligned}$$

得到 $a=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$。

瑕積分值爲 1 的用意是常態分佈函數會是標準的 機率密度函數 (probability density function), 各位在機率或統計課會學到這個函數和統計資料上常態分佈之間的關聯。除了機率與統計的應用外, 在偏微分方程討論擴散方程式或是熱傳導方程式時, 高斯函數也具有很重要的意義, 它可以刻畫擴散方程式或是熱傳導方程式的解。

最後, 我們註記伽瑪函數與高斯積分之間的關聯。因爲

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}\Rightarrow\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

令 $y=x^2$, 則 $\mathrm{d}y=2x\,\mathrm{d}x$, 即 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$, 當 $x=0$, 則 $y=0$;當 $x\to\infty$, 則 $y\to\infty$, 所以

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

所以 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$。