4

函數的極限與連續函數

這一章將探討函數的極限理論, 主要目標是要證明有界閉區間上連續函數的三大定理: 最大最小值定理、中間值定理與均勻連續定理。我們將從函數與極限的關係出發, 包括極限的精確定義、函數與極限的各種性質, 並用極限的方式定義連續函數, 最後證明連續函數的各種性質。特別地, 我們將介紹初等函數, 並證明初等函數在定義域內都是連續函數。

4.1 函數的極限

當兩個變量 x 與 y 之間利用函數 $y = f(x)$ 建立關係時, 我們自然要問的是自變量 x 在變動的時候應變量 y 是如何變化。數學上我們試圖先從函數的極限開始了解問題。若按照前面的章節介紹過數列極限的精確定義下, 這裡可以類似地定義函數在無窮遠處的漸近行為:

定義 **1.** 給定函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(a) 若有 $L \in \mathbb{R}$ 滿足以下性質:

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $X \in \mathbb{R}$ 使得對所有 $x > X$ 都有 $|f(x) - L| < \varepsilon$,

則稱函數 $f(x)$ 在 *x 趨近於無窮時極限存在* (limit exists at infinity), 記為 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$。而 $y = L$ 稱為函數 $f(x)$ 的圖形 *在 x 趨近於無窮時的水平漸近線* (horizontal asymptote at infinity)。

(b) 若有 $L \in \mathbb{R}$ 滿足以下性質:

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $X \in \mathbb{R}$ 使得對所有 $x < X$ 都有 $|f(x) - L| < \varepsilon$,

則稱函數 $f(x)$ 在 *x 趨近於負無窮時極限存在* (limit exists at minus infinity), 此時用 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ 表示。而 $y = L$ 稱為函數 $f(x)$ 的圖形 *在 x 趨近於負無窮時的水平漸近線* (horizontal asymptote at minus infinity)。

若函數 $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 給定, 而且在 x 趨近於無窮時極限存在, 那麼將函數限制在正整數集合上 $f(x)|_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 即為無窮數列 $\{a_n = f(n)\}_{n=1}^{\infty}$。比較這個無窮數列的收斂性與函數在 x 趨近於無窮的極限, 兩者的差別只是把要討論的主體從離散的點換成變數 x 而已。

例 2. 證明函數 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的圖形在 $x\to\pm\infty$ 有水平漸近線 $y=0$。

證明: 對任意 $\varepsilon>0$, 取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$, 則對所有 $|x|>X$, 都有

$$|f(x)-0|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon,$$

因此函數 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的圖形在 $x\to\pm\infty$ 有水平漸近線 $y=0$。 □

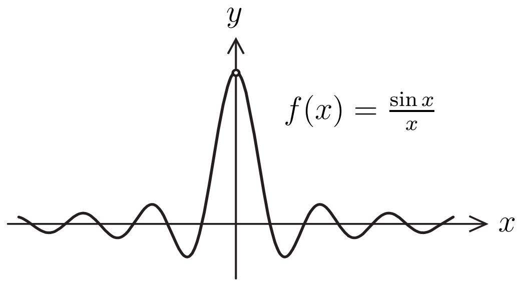

圖 4.1: 函數 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的圖形在趨近於正、負無窮時有水平漸近線 $y=0$。

這裡要注意的是: 函數 $f(x)$ 的圖形在 x 趨近於正無窮與負無窮時可能會有兩條不同的水平漸近線, 也可能不存在水平漸近線。這個例子比較特別, 兩條水平漸近線相同。

除了研究函數在正負無窮遠處的漸近行爲外, 我們也對函數在某一點 $x=x_0$ 附近的行爲感興趣, 這時我們採用以下 *函數極限的精確定義* (ε-δ language):

定義 **3.** 給定函數 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 以及 $x_0\in(a,b)$, 若有一數 $L\in\mathbb{R}$ 滿足以下性質:

對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得所有滿足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的點都有 $|f(x)-L|<\varepsilon$,

則稱函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 處 *極限* (limit) 存在, 記爲 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$; 此時 L 稱爲函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的極限值。

特別注意: 當研究函數 $f(x)$ 在某一點 $x=x_0$ 的極限時, 我們並不理會 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 這一點的值, 不論 $f(x_0)$ 有意義或是無意義都不打緊; 換言之, 函數的極限要研究的是 x_0 附近的行爲。從定義來看, 在 $0<|x-x_0|<\delta$ 這個範圍當中, 即約定了 $x\neq x_0$ 這件事。

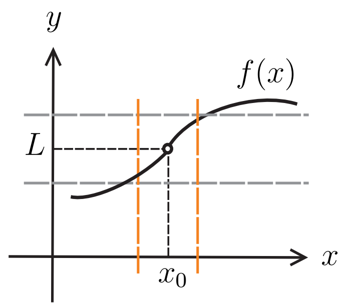

圖 4.2: 函數極限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ 的精確定義示意圖。

以下將舉例說明如何用函數極限的精確定義證明函數在某一點的極限存在。

例 **4.** 證明 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$。

證明: 對任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon>0$, 則對所有滿足 $0<|x-3|<\delta$ 的點, 都有

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon,$$

因此 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$。 □

例 **5.** 證明 $\lim_{x\to 2}x^3=8$。

想法**.** 觀察以下式子:

$$|x^3-8|=|(x-2)(x^2+2x+4)|=|x^2+2x+4||x-2|,$$

關於 $|x-2|$ 的部份, 基本上可以用 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 有關的方式控制, 但是 $|x^2+2x+4|$ 會隨著 x 變動而改變, 甚至初看之下, 在 x 很大的時候 $|x^2+2x+4|$ 也會愈來愈大, 根本無法掌控函數值的大小, 導致這個問題似乎有一點棘手。然而, 我們觀察的重點是在 $\underline{x=2\text{ 的附近}}$是否有一個很好的行爲, 即使 x 很大的時候函數亂亂跑其實也無關緊要, 因爲這並非現在觀察的重點; 換言之, 討論函數在 $x=2$ 的極限問題時, 我們可以對於要討論的範圍先進行約束, 比方說我們只要專心研究滿足 $|x-2|<1$ 的點即可, 這時會有 $1<x<3$, 進而得到 $|x^2+2x+4|<19$ 而有所控制。

證明: 對任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min(1,\frac{\varepsilon}{19})>0$, 則對所有滿足 $0<|x-2|<\delta$ 的點, 都有

$$|x^3-8|=|(x-2)(x^2+2x+4)|=|x^2+2x+4||x-2|\overset{(*)}{<}19\cdot\frac{\varepsilon}{19}=\varepsilon,$$

其中 $(*)$ 成立是因爲 $0<|x-2|<1$ 得到 $1<x<3$, 因此 $7<x^2+2x+4<19$ 而有 $|x^2+2x+4|<19$; 另一方面, 我們也有 $0<|x-2|<\frac{\varepsilon}{19}$。因此 $\lim_{x\to 2}x^3=8$。 □

例 **6.** 證明 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x^2-7x+2}=\frac{4}{5}$。

想法**.** 觀察以下式子:

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2-4}{3x^2-7x+2}-\frac{4}{5}\right|&=\left|\frac{(x+2)(x-2)}{(3x-1)(x-2)}-\frac{4}{5}\right|=\left|\frac{x+2}{3x-1}-\frac{4}{5}\right|=\left|\frac{-7x+14}{5(3x-1)}\right|\\&=\frac{|7x-14|}{|5(3x-1)|}=\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{|3x-1|}\cdot|x-2|\end{aligned}$$

關於 $|x-2|$ 的部份, 基本上可以用 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 有關的量控制, 但是 $\frac{1}{|3x-1|}$ 這個部份該如何約束呢?

這裡不妨先觀察一下 $g(x)=\frac{1}{|3x-1|}$ 這個函數, 這個函數在 $x=\frac{1}{3}$ 是沒有定義的, 而 $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 附近函數值是非常大的, 所以我們討論的範圍必須<u>遠離</u> $x=\frac{1}{3}$ 函數值才有可能控制。換言之, 只要我們限定 $|x-2|<1$ 的話, 則有 $1<x<3$, 所以 $2<3x-1<8$ 得到 $\frac{1}{|3x-1|}<\frac{1}{2}$。

證明: 給定任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min(1, \frac{10}{7}\varepsilon) > 0$, 則對所有滿足 $0 < |x-2| < \delta$ 的點, 都有

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2-4}{3x^2-7x+2} - \frac{4}{5}\right| &= \left|\frac{(x+2)(x-2)}{(3x-1)(x-2)} - \frac{4}{5}\right| = \left|\frac{x+2}{3x-1} - \frac{4}{5}\right| = \left|\frac{-7x+14}{5(3x-1)}\right| \\ &= \frac{|7x-14|}{|5(3x-1)|} = \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{|3x-1|}\cdot|x-2| \overset{(*)}{<} \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{7}\varepsilon = \varepsilon,\end{aligned}$$

其中由 $|x-2| < 1$ 得到 $2 < 3x-1 < 8$, 所以 $\frac{1}{|3x-1|} < \frac{1}{2}$; 另一方面, 我們也有 $|x-2| < \frac{10}{7}\varepsilon$。因此 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3x^2-7x+2} = \frac{4}{5}$。 ☐

若將函數極限的定義對於不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的絕對值拆解, 得到 $0 < x - x_0 < \delta$ 或 $-\delta < x - x_0 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_0 - x < \delta$ 這兩個部份, 現將極限的概念分成左極限與右極限兩個部份:

定義 **7.** 給定一正數 $\rho > 0$,

(a) 假設 $f(x)$ 在 $(x_0-\rho, x_0)$ 處有定義。若存在 $L \in \mathbb{R}$ 滿足以下性質:

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得所有滿足 $0 < x_0 - x < \delta$ 的點都有 $|f(x) - L| < \varepsilon$,

則稱函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處的 *左極限* (left-hand limit) 存在, 記爲 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$。

(b) 假設 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0+\rho)$ 處有定義。若存在 $L \in \mathbb{R}$ 滿足以下性質:

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得所有滿足 $0 < x - x_0 < \delta$ 的點都有 $|f(x) - L| < \varepsilon$,

則稱函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處的 *右極限* (right-hand limit) 存在, 記爲 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$。

(c) 函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 極限存在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ 等價於 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$。

刻意將極限分成左極限與右極限的原因是有時我們需要討論函數在端點的極限, 比方說函數 $f(x)$ 只有在 (a, b) 上有定義時, 對於 $x = a$ 與 $x = b$ 的地方, 我們也只能探討 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 單邊的極限。此外, 在某一點的左、右兩側函數的表示法不同時, 利用左極限與右極限將問題分情況討論當然有其方便性。

例 **8.** 證明: $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$。

證明: 首先注意到函數 $f(x) = |x|$ 的意義如下: 若 $x \geq 0$, 則 $f(x) = x$; 若 $x < 0$, 則 $f(x) = -x$, 這裡不妨分成左極限與右極限各別討論。

(A) 給定 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 則對所有滿足 $0 < x - 0 < \delta$ 的點, 都有 $||x| - 0| = x - 0 < \varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} |x| = 0$。

(B) 給定 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 則對所有滿足 $0 < 0 - x < \delta$ 的點, 都有 $||x| - 0| = |-x-0| = -x < \varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = 0$。

由 (A) 和 (B) 得知: $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$。 ☐

從前一個例題的經驗, 我們再做一次類似的討論:

例 9. 證明: $\lim_{x\to x_0}|x-x_0|=0$。

證明: 首先注意到函數 $f(x)=|x-x_0|$ 的意義如下: 若 $x\geq x_0$, 則 $f(x)=x-x_0$; 若 $x<x_0$, 則 $f(x)=x_0-x$, 這裡不妨分成左極限與右極限各別討論。

(A) 給定 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon>0$, 則對所有滿足 $0<x-x_0<\delta$ 的點, 都有 $||x-x_0|-0|=x-x_0<\varepsilon$, 所以 $\lim_{x\to x_0^+}|x-x_0|=0$。

(B) 給定 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon>0$, 則對所有滿足 $0<x_0-x<\delta$ 的點, 都有 $||x-x_0|-0|=|x_0-x-0|=x_0-x<\varepsilon$, 所以 $\lim_{x\to x_0^-}|x-x_0|=0$。

由 (A) 和 (B) 得知: $\lim_{x\to x_0}|x-x_0|=0$。 □

這一節最後將說明函數極限不存在的精確定義。

定義 10. 若函數 $f(x)$ 滿足以下性質:

> 對所有 $L\in\mathbb{R}$, 存在 $\varepsilon_0>0$ 使得對任意 $\delta>0$, 總是存在 x' 滿足 $0<|x'-x_0|<\delta$ 而 $|f(x')-L|\geq\varepsilon_0$,

則稱 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 不存在。

定義 11 (狄立克萊函數)**.** 考慮 狄立克萊函數 (Dirichlet function) $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 其中

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{如果 } x \text{ 是有理數}\\ 0 & \text{如果 } x \text{ 是無理數,}\end{cases}$$

試證: 狄立克萊函數在任何一點的極限都不存在。

證明: 對所有 $L\in\mathbb{R}$,

(A) <u>若 $L\geq\frac{1}{2}$</u>, 考慮 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$, 對所有 $x_0\in\mathbb{R}$ 來說, 任何 $\delta>0$, 由無理數的稠密性知: $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 內必有無理數 x' 使得 $|f(x')-L|=L\geq\frac{1}{2}$。

(B) <u>若 $L<\frac{1}{2}$</u>, 考慮 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$, 對所有 $x_0\in\mathbb{R}$ 來說, 任何 $\delta>0$, 由有理數的稠密性知: 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 內必有有理數 x'' 使得 $|f(x'')-L|=1-L>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$。

由 (A) 與 (B) 得知: 狄立克萊函數在任何一處的極限都不存在。 □

狄立克萊函數在數學理論上帶來很大的衝擊, 是因爲以往我們會利用畫圖的方式了解數學, 但是這個函數是無法精確地畫出函數圖形, 所以這個函數將體認到畫圖存在著一些限制性。

4.2 函數極限的性質

函數極限的性質大體上和數列極限的性質類似, 在熟悉 ε-N 的語言下, 是可以很順利地轉變成 ε-δ 語言。這裡爲了完整起見, 我們還是將定理及其證明全部寫清楚, 各位在看證明的時候, 除了確實理解每個證明的步驟外, 應再花時間比較數列極限與函數極限的異同。

定理 1 (極限唯一性)**.** 若函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處極限存在, 則極限值唯一。

證明: 假設 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = M$ 並且 $L \neq M$, 不妨假設 $L < M$。考慮 $\varepsilon_0 = \frac{M-L}{2} > 0$, 則函數在 $x = x_0$ 的極限存在告知:

(A) 對於 $\varepsilon_0 > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$ 使得所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 的點都有 $|f(x) - L| < \frac{M-L}{2}$。

(B) 對於 $\varepsilon_0 > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$ 使得所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 的點都有 $|f(x) - M| < \frac{M-L}{2}$。

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, 對所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的點, 都有

$$f(x) < L + \frac{M-L}{2} = \frac{M+L}{2} = M - \left(\frac{M-L}{2}\right) < f(x)$$

矛盾。同理在 $M < L$ 的情況下也會得到矛盾 (將 L 與 M 的符號互換即可), 因此 $L = M$。 □

定理 2 (局部有界性)**.** 若函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 極限存在, 則函數 $f(x)$ 在某個不包含 $x = x_0$ 的區間內 $I - \{x_0\} = (a, b) - \{x_0\}$ 是有界的。

證明: 假設 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, 考慮 $\varepsilon_0 = 1 > 0$, 則存在 $\delta_0 > 0$ 使得所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta_0$ 的點都有 $|f(x) - L| < 1$, 取 $I - \{x_0\} = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) - \{x_0\}$, 則對所有 $x \in I - \{x_0\}$ 都有 $|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$, 記 $M = 1 + |L|$, 則在 $I - \{x_0\}$ 上 $|f(x)| \leq M$ 表示函數 $f(x)$ 局部有界。 □

以下兩個定理也是說明兩函數在 $x = x_0$ 處的極限值大小與函數在 $x = x_0$ 附近有一些大小的關係, 主要目的是要建立函數極限的夾擠定理。

定理 3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$, 且 $L < M$, 則存在 $x = x_0$ 的一個區間 $I - \{x_0\}$ 都有 $f(x) < g(x)$。

證明: 對於 $\varepsilon = \frac{M-L}{2} > 0$, 因爲 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, 所以存在 $\delta_1 > 0$ 使得對所有滿足 $0 < |x-x_0| < \delta_1$ 的點都有 $|f(x)-L| < \frac{M-L}{2}$。因爲 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$, 所以存在 $\delta_2 > 0$ 使得對所有滿足 $0 < |x-x_0| < \delta_2$ 的點都有 $|g(x) - M| < \frac{M-L}{2}$。

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, 則對所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的點都滿足

$$f(x) < L + \frac{M-L}{2} = \frac{M+L}{2} = M - \left(\frac{M-L}{2}\right) < g(x),$$

於是 $I - \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ 即爲所求。 □

定理 4. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$, 而且存在某個扣除 x_0 的區間上滿足 $f(x)\le g(x)$, 則 $L\le M$。

證明: 利用反證法。假設 $M<L$, 則由 定理 **3** 得知, 存在 $\delta>0$ 使得所有 $0<|x-x_0|<\delta$ 的點都有 $g(x)<f(x)$, 這與前提矛盾。 □

定理 5 (極限的四則運算)**.** 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在, 則

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, 則 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$。

證明: 記 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1$ 與 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2$,

(A) 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$ 使得所有滿足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 的點都有 $|f(x)-L_1|<\varepsilon$, 也存在 $\delta_2>0$ 使得所有滿足 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 的點都有 $|g(x)-L_2|<\varepsilon$。取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$, 則所有滿足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的點都有

$$\begin{aligned}|(f(x)\pm g(x))-(L_1\pm L_2)|&=|(f(x)-L_1)\pm(g(x)-L_2)|\\&\le|f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=L_1\pm L_2=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

(B) 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$ 使得所有滿足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 的點都有 $|f(x)-L_1|<\varepsilon$。特別取 $\varepsilon=1$, 則存在 $\delta_2>0$ 使得所有滿足 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 的點都有 $|f(x)-L_1|<1$, 由此得到

$$L_1-1<f(x)<L_1+1\Rightarrow|f(x)|\le\max(|L_1-1|,|L_1+1|),$$

記 $M=\max(|L_1-1|,|L_1+1|)$。另一方面, 對於 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_3>0$ 使得所有滿足 $0<|x-x_0|<\delta_3$ 的點都有 $|g(x)-L_2|<\varepsilon$。取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)>0$, 則所有滿足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的點都有

$$\begin{aligned}|f(x)\cdot g(x)-L_1\cdot L_2|&=|f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot L_2+f(x)\cdot L_2-L_1\cdot L_2|\\&\le|f(x)||g(x)-L_2|+|f(x)-L_1||L_2|\le|M|\varepsilon+|L_2|\varepsilon=(|M|+|L_2|)\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

(C) 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$ 使得所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 的點都有 $|f(x) - L_1| < \varepsilon$, 也存在 $\delta_2 > 0$ 使得所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 的點都有 $|g(x) - L_2| < \varepsilon$。因爲 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2 \neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)\cdot L_2) = L_2 \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2^2 > \frac{(L_2)^2}{2}$, 存在 $\delta_3 > 0$ 使得所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta_3$ 的點都有 $|g(x)\cdot L_2| > \frac{(L_2)^2}{2}$。

對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$, 對所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的點都有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \left|\frac{f(x)\cdot L_2 - g(x)\cdot L_1}{g(x)\cdot L_2}\right| = \frac{|f(x)\cdot L_2 - L_1\cdot L_2 + L_1\cdot L_2 - g(x)\cdot L_1|}{|g(x)\cdot L_2|}\\ &\leq \frac{|f(x)-L_1||L_2| + |L_1||g(x)-L_2|}{|g(x)L_2|} < \frac{(|L_1|+|L_2|)\varepsilon}{\frac{(L_2)^2}{2}} = \frac{2(|L_1|+|L_2|)}{(L_2)^2}\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$。

□

有別於數列極限的四則運算, 函數理論當中還有一個非常重要的運算是函數的合成, 以下將探討合成函數的極限法則。

定理 6 (合成函數的極限法則)**.** 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$ 並且在 x_0 的一個鄰域內 $g(x) \neq u_0$, 若 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = L$, 則合成函數 $y(x) \overset{定義}{=\!=} f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 處極限存在, 並且

$$\lim_{x\to x_0} y(x) = \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = L。$$

證明: 對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = L$, 存在 $\eta > 0$ 使得對所有滿足 $0 < |u - u_0| < \eta$ 的點都有 $|f(u) - L| < \varepsilon$, 因爲 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$, 而且 $g(x) \neq u_0$, 對於上述的 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $0 < |x - x_0| < \delta$ 都有 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$。因此, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $0 < |x - x_0| < \delta$ 都有 $0 < |f(g(x)) - L| < \varepsilon$。 □

定理 7 (夾擠定理, Squeeze Theorem)**.** 若函數在某個不包含 $x = x_0$ 的區間 $(a,b) - \{x_0\}$ 中滿足 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 並且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$, 則 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$。

證明: 對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, 存在 $\delta_1 > 0$ 使得對所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 的點都有 $|f(x) - L| < \varepsilon$。因爲 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$, 存在 $\delta_2 > 0$ 使得對所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 的點都有 $|h(x) - L| < \varepsilon$。取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, 則對所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的點都有

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$。 □

推論 8. 若函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在某個不包含 $x = x_0$ 的區間 $(a,b) - \{x_0\}$ 中滿足 $|f(x)| \leq |g(x)|$ 並且 $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = 0$, 則 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$。

證明: 在 $(a,b) - \{x_0\}$ 中都有 $-|g(x)| \leq f(x) \leq |g(x)|$, 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = 0$ 與 $\lim\limits_{x\to x_0} -|g(x)| = -\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = 0$, 由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$。 □

雖然從理論的建立以及證明的過程中看到函數極限與數列的極限有共通性, 但是函數理論的實際應用比起數列來說更複雜也更豐富。我們會花很多篇幅比較各種函數, 像是下面的例子是在說明正弦函數、正切函數與多項式之間在 $x = 0$ 附近的關係。

例 **9.** 證明在 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中 $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$; 而且等號成立時若且唯若 $x = 0$。

證明: 這裡我們根據 x 的正負號分成三種情況討論。如圖 4.1 的左圖, 首先在第一象限畫一個半徑為 1 的圓弧, 圓弧與 x 軸交於 A, 標註坐標中心 O 之後, 畫出通過 O 且具有廣義角為 x 弧度的射線, 其中 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 射線與圓弧交於 B, 最後再作圓弧在 A 點的切線, 切線與射線 OB 的延長線交於 C。至於圖 4.1 的右圖作法類似, 只是現在廣義角變成 $x, x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 所以射線與三角形的關係是落在第四象限。

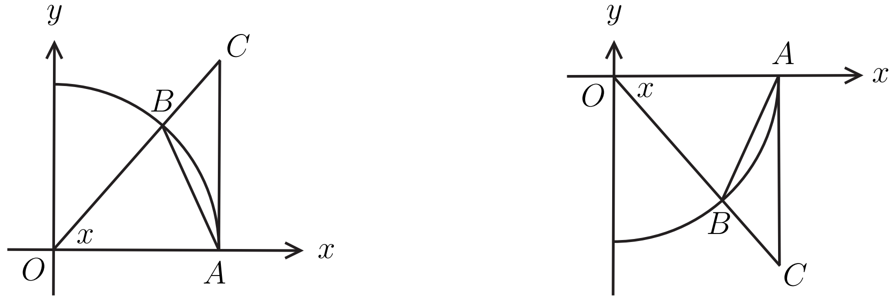

圖 4.1: 建立 $\sin x, x$ 與 $\tan x$ 的關係。

(A) <u>若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$</u>: 根據圖 4.1 的左圖, 由三角形與扇形之間的面積關係式可得

$$\triangle AOB \text{ 面積} < \text{扇形 } AOB \text{ 面積} < \triangle AOC \text{ 面積},$$

利用面積公式將上述關係替換成代數不等式:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x \Rightarrow \sin x < x < \tan x。$$

(B) <u>若 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$</u>: 由圖形中的三角形與扇形之間的面積關係式可得

$$\triangle AOB \text{ 面積} < \text{扇形 } AOB \text{ 面積} < \triangle AOC \text{ 面積}$$

利用面積公式將上述關係替換成代數不等式 (注意這時 $x < 0$ 所以 $-x > 0$):

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(-x) < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-x) < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan(-x) \Rightarrow \tan x < x < \sin x,$$

因為 $\tan x < x < \sin x < 0$, 所以再取絕對值之後得到 $|\sin x| < |x| < |\tan x|$。

(C) <u>若 $x = 0$</u>, 則 $\sin x = x = \tan x = 0$。

綜合 (A), (B), (C) 得到在 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中 $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$。 □

例 **10.** 證明對任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$。

證明: 利用和差化積公式:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \le 2\cdot 1\cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|$$
$$|\cos x - \cos x_0| = \left|-2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \le 2\cdot 1\cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|,$$

因爲 $\lim\limits_{x\to x_0} |x-x_0| = 0$ (詳見單元 4.1 例 **9**), 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$。 □

上一個例子告知正弦函數與餘弦函數都是 連續函數 (continuous function), 也就是說, 函數在任何一點的極限值與函數值都相同。連續函數的理論是這一章的重點, 我們會在下一節做進一步地闡述。

在微積分的理論中, 下面這個極限可說是重要性排名前三名的極限。回想單元 2.5 介紹過無窮大數列、無窮小數列以及等級 (order) 的關聯, 對於函數來說也可以討論類似的概念。若以這個角度看問題, 下面的極限是告知: 正弦函數與 x 在 $x \to 0$ 的時候是等量無窮小量。

例 **11.** 證明: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$。

證明: 由於我們要討論的是函數 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 的極限, 所以首先將範圍限制在 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$。

(A) <u>若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$</u>: 因爲 $\sin x < x < \tan x$, 三邊同時除以 $\sin x$ 得到

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

因爲 $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$, 故由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$。

(B) <u>若 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$</u>: 因爲 $\tan x < x < \sin x$, 三邊同時除以 $\sin x$ 得到

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

因爲 $\lim\limits_{x\to 0^-} \cos x = 1$, 故由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$。

綜合 (A) 與 (B) 的結果得到 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$。 □

以下想要花一點時間討論 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 與 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 這兩個極限問題。關於前者的極限相對來說是容易的, 這裡就先直接完成論述。

例 **12.** 考慮 $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 試證: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$。

證明: 因爲

$$\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| = \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|,$$

而且 $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ (詳見單元 4.1 例 **8**), 故由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$。 □

至於該如何處理 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$? 這裡先建立一個函數極限與數列極限之間的定理:

定理 13. 若函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近有定義, 則函數有極限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ 的充分必要條件是: 對任意在鄰域中收斂至 $x=x_0$ 的數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n\neq x_0$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$。

證明: $(\Rightarrow)$ 已知: 給定任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得所有滿足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的點都有 $|f(x)-L|<\varepsilon$。現在任給數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $x_n\neq x_0$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, 對於 $\delta>0$ 這個正數來說, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $n>N$ 都有 $0<|x_n-x_0|<\delta$, 於是 $|f(x_n)-L|<\varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$。
$(\Leftarrow)$ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq L$, 則存在 $\varepsilon_0>0$, 對任意 $\delta>0$, 存在 $x=x_\delta$ 滿足 $0<|x_\delta-x_0|<\delta$ 而 $|f(x_\delta)-L|\geq\varepsilon_0$。由此依序考慮 $\delta=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}$, 則得到數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$, 而 $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon_0$。此時, 數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq L$ 矛盾, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$。 □

例 14. 考慮 $g(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, 試證: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在。

證明: 考慮數列 $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}\}_{n=1}^{\infty}$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=0$ 而且 $g(x_n')=\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\equiv 1$, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n')=1$; 另外考慮數列 $\{x_n''\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+n\pi}\}_{n=1}^{\infty}$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n''=0$ 而且 $g(x_n'')=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+n\pi\right)\equiv -1$, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n'')=-1$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n')\neq\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n'')$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 不存在。 □

這裡不妨將 $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 與 $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 的示意圖畫出來再進行比較。就如狄立克萊函數一樣, 實際上我們無法將這兩個函數在 $x=0$ 的附近精確地畫出函數圖形, 所以這圖 4.2 也只是一個示意圖。當 x 愈來愈靠近 0 的時候, 這兩個函數都會無限次的上下振盪, 但是前者的振幅愈來愈小, 後者振幅始終都是 1。這兩個例題必須透過前面的討論才得以有一個嚴謹的數學論述。

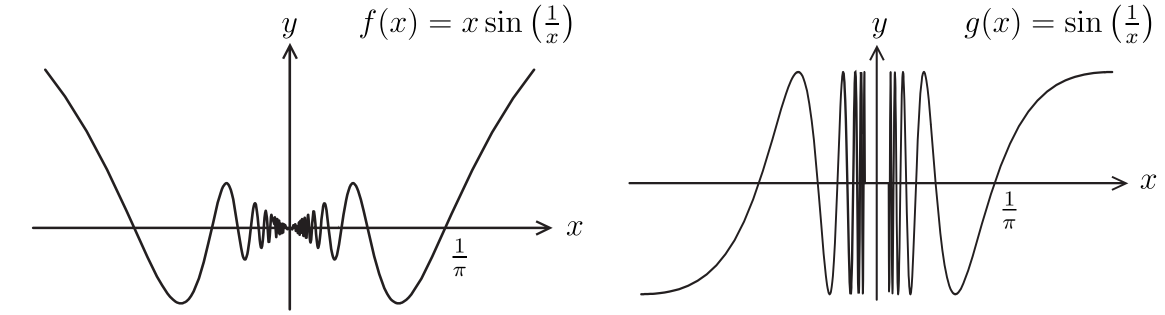

圖 4.2: 函數 $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 與 $g(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 的圖形, 兩函數在 $x=0$ 附近皆無法確實描繪。

函數的極限也有對應的柯西收斂準則, 它是指在不清楚函數的極限值之前直接透過在該點附近的任兩點之函數值可以任意地控制之下確立極限的存在。這也是基於 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 對於定義域與對應域都有實數的完備性的情形下而有的結果。

定理 15 (柯西收斂準則)**.** 若函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近有定義, 則函數有極限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要條件是: 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得對任何 $x', x''\in(x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\}$ 都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

證明: $(\Rightarrow)$ 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 記爲 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得對所有滿足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的點, 都有 $|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$。對任何 $x',x''\in(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}$, 由三角不等式 (Triangle Inequality), 得到

$$|f(x')-f(x'')|=|f(x')-L+L-f(x'')|\le|f(x')-L|+|f(x'')-L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

$(\Leftarrow)$ 假設對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得所有 $x',x''\in(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}$ 都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n\neq x_0$ 是一個收斂到 x_0 的數列, 因爲對所有 $m,n>N, x_m,x_n\in(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}$ 都有 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$, 所以 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個柯西數列, 於是 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 記 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L_x$。

若 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n\neq x_0$ 是另外一個收斂到 x_0 的數列, 欲證 $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=L_x$: 將 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 交錯地排列, 得到新數列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲

$$z_n=\begin{cases} x_k & \text{如果 } n=2k-1 \\ y_k & \text{如果 } n=2k, \end{cases}$$

則 $z_n\neq x_0, n\in\mathbb{N}$, 而且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=x_0$, 所以數列 $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=L$。因爲 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 都是 $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的子數列, 由子數列的收斂性, 得到 $L_x=L_y=L$。 □

這一節最後要再補充關於 歐拉數 (Euler number) 從數列的極限過渡至函數極限的情形。

例 **16.** 證明: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 與 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$。

證明: 由第 2 章的討論, 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 由此可推得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\mathrm{e}}{1}=\mathrm{e}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}。$$

對任意 $x\geq 1$ 都有

$$\left(1+\frac{1}{[\![x]\!]+1}\right)^{[\![x]\!]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[\![x]\!]}\right)^{[\![x]\!]+1},$$

由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$。

現在要證明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$: 令 $y=-x$, 則

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x&=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{y}\right)^y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y\\&=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\\&=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}。\end{aligned}$$

□

4.3 連續函數

各位在學微積分的時候, 對於連續函數總是以「函數的圖形是一條不間斷的曲線」這種感覺理解之, 而那時在學習上或是微積分操作上好像沒有產生任何困擾。又或者說, 在不造成嚴重困擾之下, 微積分老師其實是採用一種看似自然實則帶著含糊的說法騙過各位, 讓大家誤以爲微積分就是這麼簡單。

這裡不妨重現微積分老師上課時介紹連續函數的一種話術。首先觀察以下的函數圖形:

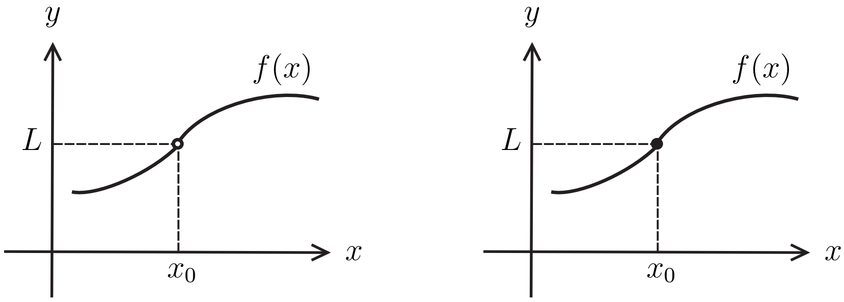

圖 4.1: 函數 $f(x)$ 若要在 $x = x_0$ 處連續的話, 必須滿足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 這個條件。

從圖 4.1 的左圖來看, 函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處極限存在, 記爲 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$。若要求極限值與函數值一致, 也就是 $L = f(x_0)$ 的話, 如圖 4.1 的右圖所示, 那麼這個函數圖形原本在 $x = x_0$ 左、右兩側的線條就會在 $(x, y) = (x_0, f(x_0))$ 的地方連接起來了, 於是我們約定函數 $f(x)$ 在一點連續就是滿足極限值等於函數值這個要求。現在將這個概念寫成如下定義:

定義 1. 考慮 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, 給定 $x_0 \in (a, b)$, 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 則稱函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處是 *連續的* (continuous), 並且稱 $x = x_0$ 是函數 $f(x)$ 的 *連續點* (continuous point)。

然而, 在前面兩節介紹過的狄立克萊函數, 或者是 $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ 與 $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ 的例子得知, 數學上存在著很多無法確實將函數圖形畫出來的例子, 所以這一節必須花時間澄清一個問題:

> 利用 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 這個方式定義函數的連續性和我們直觀地認爲函數圖形是沒有斷掉的線條之間是否有一個落差?

關於這個問題的答案, 我們會留到這一節的最後回答。至少從現在開始, 我們應避免「眼見爲憑」的說詞, 而是用精確定義的方式進行論述, 而函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續的精確定義如下:

> 對任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得所有滿足 $|x - x_0| < \delta$ 的點都有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。

比較連續與極限之精確定義, 主要是把極限值 L 替換成 $f(x_0)$。此外, 因爲對任意 $\varepsilon > 0$ 都有 $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, 所以極限精確定義中的 $0 < |x - x_0| < \delta$ 可以省略成 $|x - x_0| < \delta$。

這裡我們把函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續這件事寫成以下三個條件:

(1) 函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處有定義。

(2) 函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的左極限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 與右極限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在。

(3) 極限值等於函數值, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$。

除了定義函數在一點連續, 我們也可以定義函數在端點以及一個區間內的連續性。

定義 **2.**

(a) 若函數 $f(x)$ 只定義在 $[a,b]$ 且滿足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, 則稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續。

(b) 若函數 $f(x)$ 只定義在 $[a,b]$ 且滿足 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$, 則稱函數 $f(x)$ 在 $x=b$ 連續。

(c) 函數 $f(x)$ 在某個區間 I 連續的意思是函數 $f(x)$ 在所有 $x\in I$ 的地方連續。

以下將舉例說明利用精確定義的方式證明函數的連續性。

例 **3.** 證明 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 是一個定義在所有實數 $\mathbb{R}$ 上的連續函數。

證明: 給定 $x_0\in\mathbb{R}$, 對任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min(1,\varepsilon)>0$, 則對所有滿足 $|x-x_0|<\delta$ 的點, 都有

$$\left|\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x_0^2}\right|=\left|\frac{1+x_0^2-(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x_0^2)}\right|=\frac{|x+x_0||x-x_0|}{(1+x^2)(1+x_0^2)}\le\frac{|x|+|x_0|}{(1+x^2)(1+x_0^2)}\cdot|x-x_0|$$
$$\overset{(*)}{\le}\frac{(|x_0|+1)+|x_0|}{1+x_0^2}\cdot|x-x_0|<\frac{2|x_0|+1}{1+x_0^2}\cdot\varepsilon,$$

其中 $(*)$ 式用到 $|x-x_0|<1\Rightarrow|x|=|x-x_0+x_0|\le|x-x_0|+|x_0|<1+|x_0|$。因此 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是連續函數。 □

例 **4.** 驗證 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $\mathbb{R}-\{0\}$ 的地方是連續函數。

證明: 給定 $x_0\in\mathbb{R}-\{0\}$, 對任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min(\frac{|x_0|}{2},\varepsilon)>0$, 則對所有滿足 $|x-x_0|<\delta$ 的點, 因爲 $|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$, 所以

$$\frac{|x_0|}{2}<|x_0|-|x-x_0|\le|x|\le|x_0|+|x-x_0|<\frac{3|x_0|}{2}\Rightarrow\frac{2}{3|x_0|}<\frac{1}{|x|}<\frac{2}{|x_0|},$$

於是

$$\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x_0^2}\right|=\left|\frac{x^2-x_0^2}{x^2\cdot x_0^2}\right|=\frac{|x+x_0|}{x^2\cdot x_0^2}\cdot|x-x_0|\le\frac{|x|+|x_0|}{x^2\cdot x_0^2}\cdot|x-x_0|<\frac{4(\frac{3}{2}|x_0|+|x_0|)}{x_0^4}\cdot\varepsilon,$$

所以 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $\mathbb{R}-\{0\}$ 上是連續函數。 □

以下要證明一些連續函數的基本性質。

定理 **5** (局部有界性)**.** 若函數 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 在 $x=x_0, x_0\in(a,b)$ 連續, 則存在 $\delta_0>0$ 使得函數 $f(x)$ 在區間 $I=(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 內是有界的。

證明: 考慮 $\varepsilon_0=1>0$, 則存在 $\delta_0>0$ 使得所有滿足 $|x-x_0|<\delta_0$ 的點都有 $|f(x)-f(x_0)|<1$, 得到 $|f(x)|=|f(x)-f(x_0)+f(x_0)|\le|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|<1+|f(x_0)|$, 記 $M=1+|f(x_0)|$, 則在區間 $I=(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 內 $|f(x)|\le M$ 表示函數 $f(x)$ 局部有界。 □

定理 6 (局部保號性)**.** 若函數 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 在 $x=x_0, x_0\in(a,b)$ 連續, 且 $f(x_0)>0$, 則存在 $\delta_0>0$ 使得函數 $f(x)$ 在區間 $I=(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ 內都有 $f(x)>0$。

證明: 考慮 $\varepsilon_0=\frac{f(x_0)}{2}>0$, 則存在 $\delta_0>0$ 使得所有滿足 $|x-x_0|<\delta_0$ 的點都有 $|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$, 得到 $0<\frac{f(x_0)}{2}<f(x)$, 因此 $f(x)$ 在區間 $I=(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 內都有 $f(x)>0$。 □

定理 7 (連續函數的四則運算)**.** 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 連續, 則 $f(x)*g(x)$ 在 $x=x_0$ 連續, 其中 $*$ 的運算可以爲 $+,-,\times,\div$ 中的其中一者; 注意到對於除法運算還必須要求 $g(x_0)\neq 0$。

證明: 這部份的證明直接藉助極限的四則運算的證明而得, 將當初的極限值 L_1 與 L_2 改成 $f(x_0)$ 與 $g(x_0)$ 即可得證。記 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 與 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$,

($\pm$) 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$ 使得所有滿足 $|x-x_0|<\delta_1$ 的點都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 也存在 $\delta_2>0$ 使得所有滿足 $|x-x_0|<\delta_2$ 的點都有 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$。取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$, 則所有滿足 $|x-x_0|<\delta$ 的點都有

$$\begin{aligned}|(f(x)\pm g(x))-(f(x_0)\pm g(x_0))| &= |(f(x)-f(x_0))\pm(g(x)-g(x_0))| \\ &\leq |f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=f(x_0)\pm g(x_0)$。

($\times$) 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$ 使得所有滿足 $|x-x_0|<\delta_1$ 的點都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。特別取 $\varepsilon=1$, 則存在 $\delta_2>0$ 使得所有滿足 $|x-x_0|<\delta_2$ 的點都有 $|f(x)-f(x_0)|<1$, 由此得到

$$f(x_0)-1<f(x)<f(x_0)+1 \Rightarrow |f(x)|\leq \max(|f(x_0)-1|,|f(x_0)+1|),$$

記 $M=\max(|f(x_0)-1|,|f(x_0)+1|)$。另一方面, 對於 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_3>0$ 使得所有滿足 $|x-x_0|<\delta_3$ 的點都有 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$。取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)>0$, 則所有滿足 $|x-x_0|<\delta$ 的點都有

$$\begin{aligned}&|f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)| \\ &=|f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x_0)+f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)| \\ &\leq |f(x)||g(x)-g(x_0)|+|f(x)-f(x_0)||g(x_0)|\leq |M|\varepsilon+|g(x_0)|\varepsilon=(|M|+|g(x_0)|)\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=f(x_0)\cdot g(x_0)$。

($\div$) 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$ 使得所有滿足 $|x-x_0|<\delta_1$ 的點都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 也存在 $\delta_2>0$ 使得所有滿足 $|x-x_0|<\delta_2$ 的點都有 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$。因爲 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)\neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)\cdot g(x_0))=g(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=(g(x_0))^2>\frac{(g(x_0))^2}{2}$, 存在 $\delta_3>0$ 使得所有滿足 $|x-x_0|<\delta_3$ 的點都有 $|g(x)\cdot g(x_0)|>\frac{(g(x_0))^2}{2}$。

對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$, 對所有滿足 $|x - x_0| < \delta$ 的點都有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right| &= \left|\frac{f(x)\cdot g(x_0) - g(x)\cdot f(x_0)}{g(x)\cdot g(x_0)}\right| \\
&= \frac{|f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g(x_0) - g(x)\cdot f(x_0)|}{|g(x)\cdot g(x_0)|} \\
&\le \frac{|f(x) - f(x_0)||g(x_0)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)|}{|g(x)g(x_0)|} \\
&< \frac{(|f(x_0)| + |g(x_0)|)\varepsilon}{\frac{(g(x_0))^2}{2}} = \frac{2(|f(x_0)| + |g(x_0)|)}{(g(x_0))^2}\varepsilon,
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$。

□

至於合成函數的連續性定理, 這裡我們把它拆解成兩個部份討論。第一個是約定 f 爲連續但是 g 極限存在 (不見得要連續) 的情況, 第二個是 f 和 g 都連續的情形。

定理 8. 假設 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$, 函數 $f(u)$ 在 $u = u_0$ 處連續, 則合成函數 $y(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 處有極限, 並且

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(u_0)。$$

證明: 對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 $f(u)$ 在 $u = u_0$ 處連續, 所以存在 $\eta > 0$ 使得所有滿足 $|u - u_0| < \eta$ 的點, 都有 $|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$。因爲 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$, 對於上述的 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的點, 都有 $|g(x) - u_0| < \eta$, 由此得知: 對所有滿足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的點, 都有 $|f(g(x)) - f(u_0)| < \varepsilon$。因此 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(u_0)$。 □

定理 9 (合成函數的連續性)**.** 若 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 連續, 記 $g(x_0) = u_0$, 又 $f(u)$ 在 $u = u_0$ 處連續, 則合成函數 $y(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 處連續。

證明: 因爲 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = u_0$。由 定理 8 得知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(u_0) = f(g(x_0))$, 得到合成函數 $y(x) = f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 處連續。 □

介紹完連續函數之基本性質後, 現在想觀察單調函數的性質。首先給予單調函數的定義。

定義 10.

(a) 若函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 滿足對任何 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) \le f(x_2)$, 則稱函數 $f(x)$ 爲遞增函數 (increasing function)。

(b) 若函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 滿足對任何 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 則稱函數 $f(x)$ 爲嚴格遞增函數 (strictly increasing function)。

(c) 若函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 滿足對任何 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) \ge f(x_2)$, 則稱函數 $f(x)$ 爲遞減函數 (decreasing function)。

(d) 若函數 $f: I \to \mathbb{R}$ 滿足對任何 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 則稱函數 $f(x)$ 爲 *遞增函數* (strictly decreasing function)。

(e) 遞增函數或是遞減函數統稱爲 *單調函數* (monotonic function)。

定理 **11** (反函數存在與連續定理)**.** 若函數在閉區間上嚴格遞增, 則反函數存在, 並且反函數也是嚴格遞增。更進一步地, 若嚴格遞增函數在閉區間上連續, 則反函數也連續。至於嚴格遞減的函數同理。

證明: 首先證明反函數的存在性。假設 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上嚴格遞增, 則對任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 滿足 $x_1 < x_2$, 必有 $f(x_1) < f(x_2)$。記 $R = \{f(x) | x \in [a,b]\}$ 表示函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域, 則對所有 $y \in R$, 在 $[a,b]$ 內不會有兩個點 $x_1, x_2, (x_1 \neq x_2)$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$。換言之, 對集合 R 裡的每一個 y, 在 $[a,b]$ 內存在唯一的 x 使得 $y = f(x)$, 於是反函數 $x = f^{-1}(y)$ 存在。其中反函數 f^{-1} 的定義域爲 R, 值域爲 $[a,b]$。

再證明: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 嚴格遞增, 則 $f^{-1}(y)$ 在 R 中也是嚴格遞增。若 $y_1, y_2 \in R$ 滿足 $y_1 < y_2$, 記 $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$, 如果 $x_1 \geq x_2$ 則 $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ 矛盾, 所以 $x_1 < x_2$, 也就是 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, 因此反函數在 R 中嚴格遞增。

若 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 記 $A = f(a)$ 與 $B = f(b)$。最後要證明的是反函數的連續性。也就是說, 給定 $y_0 \in [A,B]$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 必須找到 $\delta = \delta(\varepsilon, y_0) > 0$ 使得所有滿足 $|y - y_0| < \delta$ 的點都有 $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$。

對任意 $\varepsilon > 0$, 爲了要達成不等式 $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, 因爲 $f^{-1}(y)$ 是嚴格遞增, 所以如果要讓上述不等式成立, 只要確定在選取的範圍內滿足 $f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon)$ 這個不等式即可, 也就是說:

$$
\begin{aligned}
& f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0) < f(x) - f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) \\
\Leftrightarrow\ & f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0) < y - y_0 < f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0),
\end{aligned}
$$

因此對任意 $\varepsilon > 0$, 只要取 $\delta = \min(f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)) > 0$, 則所有滿足 $|y - y_0| < \delta$ 的點都有 $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$。 □

連續函數的性質建立完畢後, 以下將介紹並建立數學上常用的函數及其連續性。

定義 **12.** 所謂 *初等函數* (elementary function) 指的是以下類型的函數經過有限次的加、減、乘、除等四則運算以及合成函數的運算下得到的函數:

(A) *常數函數* (constant function): $f(x) = c$, 其中 $c \in \mathbb{R}$。

(B) *幂函數* (power function): $f(x) = x^a$, 其中 $a \neq 0$ 爲常數。

(C) *指數函數* (exponential function): $f(x) = a^x$, 其中 $a > 0, a \neq 1$。

(D) *對數函數* (logarithmic function): $f(x) = \log_a x$, 其中 $a > 0, a \neq 1$。它表示指數函數的反函數。特別地, 取底數爲歐拉數 (Euler number) e 的對數函數稱爲 *自然對數* (natural logarithm), 記爲 $f(x) = \ln x$。

(E) 三角函數 (trigonometric function): $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$。

(F) 反三角函數 (inverse trigonometric function): $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x, \cot^{-1} x, \sec^{-1} x, \csc^{-1} x$。它們表示限定在一個遞增的範圍下的三角函數之反函數。

各位看到初等函數想必認爲這些函數很自然也很清楚, 實則不然, 這之間存在著如同在學第一章的時候問你「實數系是什麼」這個問題一樣, 要你再繼續深入解釋的時候可能就回答不出來了。比方說這裡你會遇到的問題是: $2^{\sqrt{2}}$ 是什麼意思? 如果這個數字講不清楚的話, 你也無法解釋冪函數、指數函數與對數函數的意義。我們把 $2^{\sqrt{2}}$ 這個問題(也就是指數函數的建構) 連同下面要介紹的初等函數連續性的定理證明都放到本章最後的附錄。

定理 **13.** 初等函數在有定義的地方皆連續。

至於三角函數與反三角函數不熟的人, 應自行再找其他的微積分書籍重新複習, 這裡將預設各位對三角函數與反三角函數有基本的了解。

前面花了很多篇幅介紹了函數的連續及其性質, 現在要討論函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不連續的情形。這裡我們重看一次函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續必須滿足的三個條件:

(1) 函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處有定義。

(2) 函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的左極限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 與右極限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在。

(3) 極限值等於函數值, 即 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$。

現在根據左、右極限的存在與否將不連續點進行分類:

定義 **14.** 若函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不連續 (discontinuous), 將分成以下幾種類型:

(a) 第一類不連續點 (type I discontinuity) 指的是條件 (2) 成立, 但是 (1) 和 (3) 至少一個不成立。由此, 第一類不連續點可再細分成以下兩種情形:

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$ 或是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 而 $f(x_0)$ 沒有定義, 則稱函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處是一個 可去除的不連續點 (removable discontinuity)。
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, 則稱函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處是一個 跳躍的不連續點 (jump discontinuity)。

(b) 第二類不連續點 (type II discontinuity) 指的是條件 (2) 不成立的情況。此時,

- 關於 $\lim\limits_{x \to x_0^-} |f(x)| = \infty$ 與 $\lim\limits_{x \to x_0^+} |f(x)| = \infty$ 的情形, 我們會說函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處是一個 無窮的不連續點 (infinite discontinuity)。
- 至於其它函數在 $x = x_0$ 處極限不存在的情形就不再細分。

例 **15.** 討論以下函數不連續點的分類: (A) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ (B) $g(x)=[\![x]\!]$ (C) $h(x)=\frac{1}{x^2}$。

解**.**

(A) 函數 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 沒有定義。因爲 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 所以函數 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 處是可移除的不連續點。也就是說, 若定義

$$\bar{f}(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & 若\ x\neq 0\\ 0 & 若\ x=0,\end{cases}$$

則 $\bar{f}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是連續函數。

(B) 對所有 $k\in\mathbb{Z}$, 因爲 $\lim\limits_{x\to k^-}[\![x]\!]=k-1$ 而 $\lim\limits_{x\to k^+}[\![x]\!]=k$, 所以函數 $g(x)=[\![x]\!]$ 在 $x=k, k\in\mathbb{Z}$ 是跳躍不連續點。

(C) 函數 $h(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 沒有定義, 因爲 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$, 所以函數 $h(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 處是無窮不連續點。

關於嚴格單調函數, 除了具有反函數的存在性之外, 對於單調函數 (不見得要嚴格) 的不連續點也有另一層面的刻畫。

定理 **16.** *在區間 (a,b) 上的遞增函數, 若有不連續點, 則它必爲跳躍不連續點, 而且跳躍不連續點至多可數個。對於遞減函數的情況同理。*

證明: 這裡只討論遞增函數的情形。給定 $x=x_0, x_0\in(a,b)$, 考慮集合 $R_{x_0}=\{f(x)|\, a<x<x_0\}$。因爲介在 a 和 x_0 之間必存在實數 x', 而 $f(x')\in R_{x_0}$, 所以集合 R_{x_0} 非空。又對任意 $x\in R_{x_0}$ 都有 $f(x)\leq f(x_0)$, 所以 $f(x_0)$ 是集合 R_{x_0} 的一個上界。由確界原理 (Supremum Principle) 得知集合 R_{x_0} 的最小上界存在, 記爲 $\alpha=\sup R_{x_0}$。

以下要證明: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\alpha$。對任意 $\varepsilon>0$, 則 $\alpha-\varepsilon$ 不再是 R_{x_0} 的上界, 所以存在 $y''\in R_{x_0}$ 使得 $\alpha-\varepsilon<y''$ 而且存在 $x''\in(a,x_0)$ 使得 $y''=f(x'')$。因爲 $f(x)$ 遞增, 所以對任意 $x\in(x'',x_0)$ 都有 $f(x'')\leq f(x)\leq\alpha$。對任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=x_0-x''>0$, 則滿足 $0<x_0-x<\delta$ 的點, 都有 $\alpha-f(x)\leq\alpha-f(x'')<\alpha-(\alpha-\varepsilon)=\varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\alpha$。

另一方面, 考慮集合 $\bar{R}_{x_0}=\{f(x)|\, x_0<x<b\}$。因爲介在 x_0 和 b 之間必存在實數 x', 而 $f(x')\in\bar{R}_{x_0}$, 所以集合 $\bar{R}_{x_0}$ 非空。又對任意 $x\in\bar{R}_{x_0}$ 都有 $f(x_0)\leq f(x)$, 所以 $f(x_0)$ 是集合 $\bar{R}_{x_0}$ 的一個下界。由確界原理 (Supremum Principle) 得知集合 $\bar{R}_{x_0}$ 的最大下界存在, 記爲 $\beta=\inf R_{x_0}$。

以下要證明: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\beta$。對任意 $\varepsilon>0$, 則 $\beta+\varepsilon$ 不再是 $\bar{R}_{x_0}$ 的下界, 所以存在 $y''\in R_{x_0}$ 使得 $y''<\beta+\varepsilon$ 而且存在 $x''\in(x_0,x)$ 使得 $y''=f(x'')$。因爲 $f(x)$ 遞增, 所以對任意 $x\in(x_0,x'')$ 都有 $\beta\leq f(x)\leq f(x'')$。對任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=x''-x_0>0$, 則滿足 $0<x-x_0<\delta$ 的點, 都有 $f(x)-\beta\leq f(x'')-\beta<\beta+\varepsilon-\beta=\varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\beta$。

因爲對所有 $x\in(a,x_0)$ 都有 $f(x)\leq f(x_0)$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\leq f(x_0)$; 對所有 $x\in(x_0,b)$ 都有 $f(x_0)\leq f(x)$, 所以 $f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$。所以 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\leq f(x_0)\leq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$。若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=$

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, 則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續, 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, 則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 爲跳躍不連續點。

最後我們要證明: 跳躍點至多可數。記集合 E 爲所有 $f(x)$ 在 (a, b) 上的不連續點所成的集合, 對任何 $x_0 \in E$, 因爲 $\alpha \overset{記}{=} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \overset{記}{=} \beta$, 在區間 (α, β) 中任取一個有理數, 記爲 $r(x_0)$, 若 $x_1, x_2 \in E$ 且 $x_1 < x_2$, 則 $\lim\limits_{x \to x_1^-} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_2^+} f(x)$, 得到 $r(x_1) < r(x_2)$。

我們利用 $x \to r(x)$ 的關係, 將集合 E 與有理數的一個子集合之間建立了一對一的對應。於後者是至多可數的, 所以集合 E 也是至多可數的。 $\square$

最後我們要用以下例子回答這一節一開始提出的問題:

例 **17** (黎曼函數)**.** 考慮 黎曼函數 (Riemann function) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & 如果\ x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1 \\ 0 & 如果\ x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

試證: 黎曼函數在有理點不連續, 在無理點連續。

證明:

(A) 黎曼函數在有理點不連續: 對於 $x_0 = \frac{p}{q}, (p, q) = 1$, 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2q} > 0$, 對任意 $\delta > 0$, 由無理數的稠密性得知, 總是能在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中取到無理點 x_1 使得 $|f(x_0) - f(x_1)| = |\frac{1}{q} - 0| = \frac{1}{q} \ge \frac{1}{2q} = \varepsilon_0$。

(B) 黎曼函數在無理點連續: 若 x_0 是無理點, 給定任意 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, 令 $N = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1$, 則滿足 $f(x) \ge \frac{1}{N}$ 的點的個數有限。這是因爲函數非零的點只會發生在有理點, 而且這些有理數經過約分化簡後的分母必須小於等於 N, 這些有理數不會超過 N^2 個。現將這些點標記成 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0}$, 其中 $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \le N^2$。取 $\delta = \min\limits_{i=1,2,\ldots,n_0} |x_i - x_0| > 0$, 則對所有 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 都有 $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{N} < \varepsilon$。

$\square$

爲什麼我會說當初微積分老師是帶著含糊的說詞把函數的連續性草草地帶過? 這是因爲他不告訴你原來還有這麼可怕的函數。想一想這個黎曼函數, 在無理點的地方函數值是零, 有理點的地方函數值都大於零 (離開地球表面!?), 因爲有理數有稠密性, 以無理點爲中心任取一個小範圍都會有無限多個有理點跳起來 (只是跳躍的程度可受控制), 而我們會說函數在無理點是「連續的」, 一瞬間不僅煩惱沒有全忘掉, 反而增加了更多煩惱啊!

所以我們對於「連續函數的圖形是一個不斷的線條」這種想法, 其實是要求「每一個點」都連續, 這麼一來, 就會排除掉黎曼函數這種極端的例外情況, 數學上定義的連續一詞也才會與生活上所謂的連續一致。

4.4 均勻連續

對於一個連續函數 $f: I \to \mathbb{R}$, 根據定義, 給定 $x_0 \in I$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$ 使得所有滿足 $|x - x_0| < \delta$ 的點都有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。這一節的重點將放在 δ 的依賴性。一般說來, δ 的選取和 ε 有關, 這件事一定可以理解, 除了常數函數以外, 只要誤差 ε 變小, 能夠滿足條件的範圍 δ 也一定會變小。此外, δ 的選取和 x_0 也有關係, 給定誤差 ε 之後, 對於函數在 x_0 附近的行爲如果是比較平緩、起伏不是很大的話, 可以選到的 δ 是比較寬鬆的, 但是如果函數在 x_0 附近的行爲變動比較劇烈的話, 能夠選到的 δ 會很小。所以對於連續函數而言, 若要指出 δ 的依賴關係, 我們會寫成 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ 表示這個 δ 是 *依賴於* (depends on) ε 與 x_0 這兩個量。

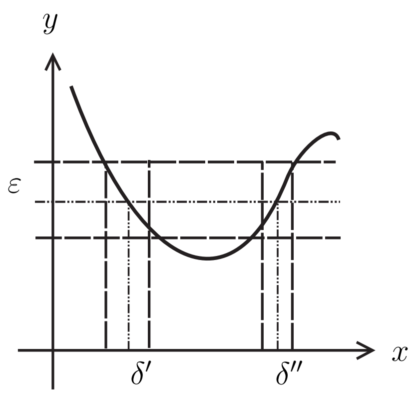

圖 4.1: 固定 $\varepsilon > 0$ 之下, 滿足函數值之差小於 ε 的寬度可能會和位置有關。

現在要討論一類比較特殊的連續函數, 這類型連續函數 δ 的選取和位置無關。在此先給予這類連續函數一個明確的定義。

定義 **1** (均勻連續)**.** 如果函數 $f: I \to \mathbb{R}$ 滿足以下條件:

對任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $x', x'' \in I$ 滿足 $|x' - x''| < \delta$ 都有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$,

則稱 f 在區間 I 上是 *均勻連續的* (uniformly continuous)。

首先我們舉一個均勻連續函數的例子。

例 **2.** 試證: $f(x) = \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是均勻連續的。

證明: 觀察以下不等式:

$$\begin{aligned}|f(x') - f(x'')| &= |\sin(x') - \sin(x'')| = \left|2\cos\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\sin\left(\frac{x'-x''}{2}\right)\right| \\ &= 2\left|\cos\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x'-x''}{2}\right)\right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{|x'-x''|}{2} = |x'-x''|,\end{aligned}$$

對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 則對所有 $x', x'' \in \mathbb{R}$ 滿足 $|x' - x''| < \delta$ 都有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$。因此 $f(x) = \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是均勻連續的。 $\square$

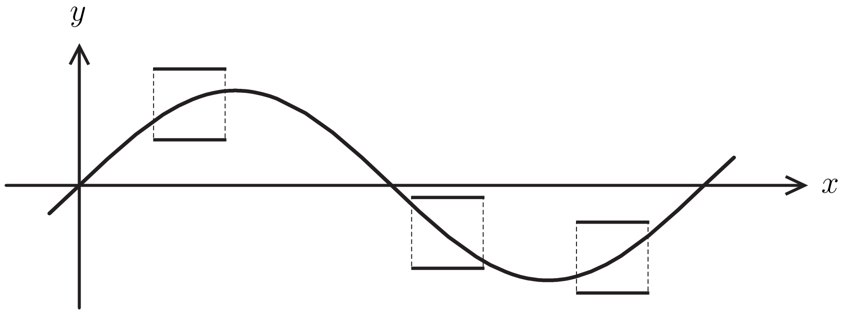

圖 4.2: 函數 $f(x) = \sin x$ 是在 $\mathbb{R}$ 上是均勻連續的。長寬均爲 ε 的框格可以穿過整條曲線。

我們可以用一個比較動態的觀點去感受均勻連續的意義。就以 $f(x) = \sin x$ 爲例, 如圖 4.2, 想像這個函數的圖形是一條波浪形狀的鐵絲。給定誤差 $\varepsilon > 0$ 之後, 這裡選取了 $\delta = \varepsilon$, 於是我們製造一個長寬均爲 ε 的框格, 框格的左、右兩端是有開口的, 上、下兩端則是有橫板隔住。

接著我們把這個長寬均爲 ε 的框格穿進鐵絲中, 然後移動框格試圖穿越鐵絲的其它部份, 因爲 $f(x) = \sin x$ 是均勻連續的, 所以只要橫段差小於 δ 的兩點, 函數值的差就會小於 ε, 所以我們可以順利移動框格讓上、下橫板完全不會碰到鐵絲而且得以通過其它地方。

以下舉一個連續函數但不是均勻連續的例子。在此之前, 我們必須把它的精確意義確實表述:

「對任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得對所有 $x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta$ 都有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$」<u>不成立</u>

$\Leftrightarrow$「存在 $\varepsilon_0 > 0$, 對任何 $\delta > 0$ 存在 $x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta$ 使得 $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$」<u>成立</u>

例 **3.** 試證: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 上不是均勻連續的。

證明: 取 $\varepsilon_0 = 1$, 對任何 $\delta > 0$, 取 $x' = \min(\frac{1}{2}, \delta)$ 以及 $x'' = \frac{x'}{2}$, 則 $|x' - x''| = \frac{x'}{2} < \delta$, 但是 $|f(x') - f(x'')| = |\frac{1}{x'} - \frac{2}{x'}| = \frac{1}{x'} \geq 2 > 1$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 上不是均勻連續的。 □

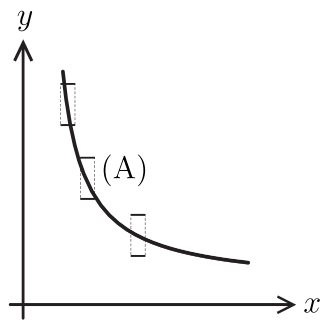

圖 4.3: 函數 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 不是均勻連續的。

若我們用框格的概念再去理解非均勻連續的函數時, 以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 爲例, 如圖 4.3 所示, 這裡是考慮一個上下間距爲 $\varepsilon_0 = 1$ 的隔板, 不論橫段的寬度 δ 取得有多小, 框格都無法順利通過 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的圖形所造出的鐵絲的所有地方; 換言之, 當你把框格往 $x = 0$ 靠近的時候, 框格一定會在某個階段卡住 (如圖 (A) 的位置), 若再繼續往左移動, 則鐵絲一定會與上下的隔板相交。

關於均勻連續的理論, 在此或許還看不出來它的重要性, 必須等到定積分理論的探討時才會突顯其特色。對於有界閉區間上的連續函數定積分的存在性, 必須用到均勻連續的性質才有辦法證明。

4.5 有界閉區間上連續函數的性質

關於連續函數, 若將定義域限定在有界閉區間的話, 則會有許多很好的性質。這一節將介紹有界閉區間上連續函數的三大定理: 極值定理(最大最小值定理)、中間值定理、均勻連續定理。

定理 1 (有界性定理)**.** 有界閉區間上的連續函數必爲有界函數。

證明: 假設函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上無界, 則對任意 $n \in \mathbb{N}$, 總是存在 $x_n \in [a,b]$ 使得 $|f(x_n)| > n$。因爲數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的所有元素都屬於閉區間 $[a,b]$, 所以數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 由數列緊緻性定理 (Bolzano-Weierstrass Theorem) 得知: 存在收斂的子數列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in [a,b]$, 而這些點對應到的函數值形成的數列 $\{|f(x_{n_k})|\}_{k=1}^{\infty}$ 滿足 $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty$。

另一方面, 由函數的連續性 (絕對值函數與 $f(x)$ 都是連續函數) 得知

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \left|\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})\right| = \left|f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k})\right| = |f(x_0)| < \infty$$

矛盾。所以有界閉區間上的連續函數必爲有界函數。 □

證明: 考慮在閉區間 $[a,b]$ 上的連續函數 $f(x)$, 按照連續函數的定義, 給定 $x_0 \in [a,b]$ 以及 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta = \delta(x_0,\varepsilon) > 0$ 使得所有滿足 $|x - x_0| < \delta$ 的點都有 $|f(x) - f(x_0)| < 1$, 於是 $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$ 得到 $|f(x)| < \max(|f(x_0) - 1|, |f(x_0) + 1|) \overset{記}{=} M_{x_0}$。換言之, 每個 $x_0 \in [a,b]$ 都有一個包含 x_0 的開區間 $O(x_0, \delta(x_0))$ 使得 $|f(x)| \le M_{x_0}$。而 $\cup_{x_0\in[a,b]} O(x_0,\delta(x_0))$ 就形成了 $[a,b]$ 閉區間上的一個開覆蓋。由有限覆蓋定理 (Heine-Borel Covering Theorem) 得知: 存在有限個數的開區間覆蓋 $[a,b]$。將這有限個開區間標記爲

$$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1), (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2), \ldots, (x_N - \delta_N, x_N + \delta_N),$$

而在每個開區間上的函數值都有界 $M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_N}$。令 $M = \max(M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_N})$, 則對所有 $x \in [a,b]$, 都有 $|f(x)| \le M$。 □

以下利用幾個面向讓大家思考有界性定理的特色。

(A) 函數在一點連續, 則函數局部有界。這是單元 4.2 **定理 5** 得到的結果。而 **定理 1** 的第二個證明就是從局部有界定理出發, 每個點都可以得到一個開區間局部有界, 而 $[a,b]$ 的基數是不可數, 我們不知道不可數個有界值之最大值是否存在, 必須透過實數完備性得到閉區間上的開覆蓋一定可以選到有限個數的子覆蓋, 當它變成有限個數字比大小時, 就可以取到最大值。

(B) 函數在開區間連續, 函數不一定有界。像是 $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0,1)$ 或是 $g(x) = \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 都是例子。

(C) 在閉區間上的不連續函數不一定有界。比方說從上面的兩個例子繼續引申就可得到結果:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 若\ x \in (0,1) \\ 1 & 若\ x = 0\ 或\ 1 \end{cases} \qquad 或是 \quad \bar{g}(x) = \begin{cases} \tan x & 若\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 若\ x = -\frac{\pi}{2}\ 或\ \frac{\pi}{2}。\end{cases}$$

(D) 若一個連續函數討論的範圍無界, 函數不見得有界, 像是 $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ 即爲一例。

在介紹下一個定理之前, 我們先說明一下函數最大值和最小值的意思。

定義 **2** (最大值與最小值; 最大點與最小點)**.** 給定函數 $f : I \to \mathbb{R}$,

(A) 若有 $x_0 \in I$ 使得對所有 $x \in I$ 都有 $f(x_0) \geq f(x)$, 則稱 $f(x_0)$ 是 f 在區間 I 中的 最大值 (maximum value)。而 $x = x_0$ 稱爲函數 f 在區間 I 中的 最大點 (maximum point)。

(B) 若有 $x_0 \in I$ 使得對所有 $x \in I$ 都有 $f(x_0) \leq f(x)$, 則稱 $f(x_0)$ 是 f 在區間 I 中的 最小值 (minimum value)。而 $x = x_0$ 稱爲函數 f 在區間 I 中的 最小點 (minimum point)。

定理 **3** (極值定理, Extreme Value Theorem)**.** 有界閉區間上的連續函數必有最大值與最小值。

證明: 給定閉區間 $[a, b]$ 上的連續函數 $f(x)$, 考慮其值域 $R = \{f(x) \in \mathbb{R} | \, x \in [a, b]\}$, 因爲值域非空, 而有界性定理 (定理 **1**) 得知: 值域有上界也有下界, 由確界原理 (Supremum Principle) 得知值域的上確界與下確界皆存在, 記爲

$$\beta = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \quad 與 \quad \alpha = \inf_{x \in [a,b]} f(x)。$$

現在要證明: β 與 α 會是某個點的函數值。以下只討論 β 的情況, 而 α 同理可證。因爲 β 是集合 R 的上確界, 所以對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x'' = x''(\varepsilon) \in [a, b]$ 使得 $\beta - \varepsilon < f(x'') \leq \beta$。特別取 $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, 則得到 $x_n \in [a, b]$ 使得 $\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \beta$, 因此 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \beta$。另一方面, 對於數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 而言, 因爲 $x_n \in [a, b]$, 由數列緊緻性定理 (Bolzano-Weierstrass Theorem) 得知: 存在子數列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收斂, 即 $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in [a, b]$。因爲函數 $f(x)$ 連續, 所以

$$\beta = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

所以閉區間上的連續函數必有最大值。最小值的情況同理可證。 □

同樣地, 我們利用以下幾個面向讓大家思考極值定理的特色。

(A) 此定理是在說明閉區間上的連續函數關於值域的上確界與下確界可以由某個點的函數值實現。

(B) 開區間上的連續函數不一定會有最大值與最小值。例如函數 $f(x) = x, x \in (-1, 1)$ 就沒有最大值也沒有最小值。

(C) 閉區間上的不連續函數不一定會有最大值與最小值。例如函數

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} x & 若\ x \in (-1, 1) \\ 0 & 若\ x = -1\ 或\ 1 \end{cases}$$

就沒有最大值也沒有最小值。

(D) 這個定理只是告知閉區間上連續函數最大點與最小點之存在性, 並沒有涉及唯一性。也就是說, 產生最大值與最小值的點可能不只一個。例如 $f(x) = \sin x, x \in [-2\pi, 2\pi]$ 有兩個最大點與兩個最小點。

(E) 若一個連續函數的討論範圍無界, 函數不見得有極值, 像是 $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ 即爲一例。

接下來要介紹的是中間值定理。在證明中間值定理之前, 我們先證明零點存在定理, 它是中間值定理的一個前置作業, 實際上這也是各位在高中曾經學過的勘根定理。

定理 4 (零點存在定理, 勘根定理)**.** 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是連續函數, 而 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號, 則存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$。

證明: 不失一般性, 不妨假設 $f(a)<0$ 與 $f(b)>0$。先將 $[a,b]$ 等分, 中點為 $\frac{a+b}{2}$, 如果 $f(\frac{a+b}{2})=0$, 則定理證畢。若不然, 則這兩個區間中一定有一個區間在兩端點處函數值異號, 將這個區間記為 $[a_1,b_1]$。再將 $[a_1,b_1]$ 等分, 中點為 $\frac{a_1+b_1}{2}$, 如果 $f(\frac{a_1+b_1}{2})=0$, 則定理證畢。若不然, 則這兩個區間中一定有一個區間在兩端點處函數值異號, 將這個區間記為 $[a_2,b_2]$。依此過程, 得到以下結果:

(A) 若在某一個步驟得到的中點之函數值為零, 則定理證畢。

(B) 若每次取中點後函數值都不是零, 則得到區間列 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足

(B1) 對所有 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$。

(B2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$。

(B3) 對所有 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $f(a_n)<0, f(b_n)>0$。

由區間套定理 (Nested Intervals Theorem) 得知: 存在唯一 $\xi\in[a,b]$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。因為 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 連續, 所以

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\le 0 \quad 且 \quad f(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)\ge 0,$$

因此 $f(\xi)=0$。 □

定理 5 (中間值定理, Intermediate Value Theorem)**.** 對於有界閉區間上的連續函數, 介在最大值與最小值之間的數必定是某個點的函數值。

證明: 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 為連續函數, 由極值定理 (Extreme Value Theorem) 得知函數的最小值與最大值存在, 即存在 $x_1\in[a,b]$ 使得 $f(x_1)=\min\limits_{[a,b]}f(x)$, 也存在 $x_2\in[a,b]$ 使得 $f(x_2)=\max\limits_{[a,b]}f(x)$。

任給一數 $C\in(f(x_1),f(x_2))$, 考慮 $F(x)=f(x)-C$, 因為 $f(x)$ 為連續函數, 所以 $F(x)$ 也是連續函數。因為 $F(x_1)=f(x_1)-C<0$, 而 $F(x_2)=f(x_2)-C>0$, 所以由零點存在定理得知: 存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ (或者是 $\xi\in(x_1,x_2)$) 使得 $F(\xi)=f(\xi)-C=0$, 所以 $f(\xi)=C$。 □

關於零點存在定理與中間值定理, 有以下幾件事需要澄清:

(A) 關於零點存在定理, 若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 同號, 則無法下任何結論, 可能有 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$, 也可能不存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$。例如 $f(x)=x^2-1, x\in[-2,2]$, 則 $f(\pm1)=0$; 而 $f(x)=x^2+1, x\in[-2,2]$ 就沒有零根。

(B) 中間值定理只是告知存在性, 可能會有不只一個點會達到中間值。例如 $f(x)=\sin x, x\in[-2\pi,2\pi]$, 任給 $C\in(-1,1)$ 滿足 $f(x)=C$ 的點就多於一個。

(C) 若要繼續深究中間值定理, 定理敘述中閉區間的概念經抽象化後會變成 連通集 (connected set), 而這個單元介紹的其它定理中, 有界閉區間的條件則是轉變成 緊緻集 (compact set)。這個微妙的差異是 拓樸學 (topology) 討論的範疇。

(D) 若函數 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 不連續, 中間值定理可能不成立。例如 $f(x) = [\![x]\!], x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, 則 $f(\frac{1}{2}) = 0, f(\frac{3}{2}) = 1$, 對任何 $C \in (0,1)$, 不存在任何點 $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ 使得 $f(x) = C$。

前一節介紹了均勻連續函數的意義, 至於哪些連續函數會是均勻連續呢? 以下定理給出一個重要的結論。

定理 6 (均勻連續定理)**.** 有界閉區間上的連續函數必均勻連續。

證明: 利用反證法。假設連續函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 並非均勻連續, 則存在 $\varepsilon_0 > 0$, 對任意 $\delta > 0$, 在區間 $[a,b]$ 中至少存在兩點 x' 與 x'' 滿足 $|x' - x''| < \delta$, 但是 $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$。

觀察 $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, 則在區間 $[a,b]$ 中至少存在兩點 x'_n 與 x''_n 滿足 $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$, 但是 $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$。因爲數列 $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 內, 由數列緊緻性定理 (Bolzano-Weierstrass Theorem) 得知, 分別存在收斂的子數列 $\{x'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = x_0 \in [a,b]$。因爲 $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$, 所以 $|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$, 得到 $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x''_{n_k} = x_0$, 但是 $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0$。

另一方面, 因爲函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$。然而

$$\lim_{k\to\infty} (f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

這和對所有 $k \in \mathbb{N}$, $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$ 矛盾。因此連續函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上均勻連續。 □

證明: 給定 $x_0 \in [a,b]$, 因爲函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續, 所以對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(x_0) > 0$ 使得對所有 x' 與 x'' 滿足 $|x' - x_0| < \frac{\delta(x_0)}{2}$ 與 $|x'' - x_0| < \frac{\delta(x_0)}{2}$, 都有 $|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 與 $|f(x'') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 於是由三角不等式 (Triangle Inequality) 得知:

$$|x' - x''| \leq |x' - x_0| + |x'' - x_0| < \frac{\delta(x_0)}{2} + \frac{\delta(x_0)}{2} = \delta(x_0)$$

並且

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_0)| + |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon。$$

換言之, 對於 $(x_0 - \frac{\delta(x_0)}{2}, x_0 + \frac{\delta(x_0)}{2})$ 內的任意兩點 x' 與 x'' 都有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$。

考慮 $\cup_{x_0\in[a,b]}(x_0 - \frac{\delta(x_0)}{4}, x_0 + \frac{\delta(x_0)}{4})$, 它是閉區間 $[a,b]$ 上的一個開覆蓋, 由有限覆蓋定理 (Heine-Borel Covering Theorem) 得知: 存在有限個數的開覆蓋, 例如 $\cup_{k=1}^{N}(x_k - \frac{\delta(x_k)}{4}, x_k + \frac{\delta(x_k)}{4})$ 覆蓋 $[a,b]$。取 $\delta = \min(\frac{\delta(x_1)}{4}, \frac{\delta(x_2)}{4}, \ldots, \frac{\delta(x_N)}{4}) > 0$, 則 δ 與 x 無關, 並且對所有 $x', x'' \in [a,b]$ 滿足 $|x' - x''| < \delta$, 因爲 x' 一定屬於某個開區間 $(x_k - \frac{\delta(x_k)}{4}, x_k + \frac{\delta(x_k)}{4})$ 當中, 所以

$$\begin{aligned} |x'' - x_k| &\leq |x'' - x'| + |x' - x_k| < \delta + \frac{\delta(x_k)}{4} < \frac{\delta(x_k)}{2}, \\ |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - f(x_k)| + |f(x'') - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

因此連續函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上均勻連續。 □

4.6 中間值定理的應用

中間值定理在數學與生活中有很多有趣的現象值得討論, 這裡將我所知道的故事做一個介紹。

例 **1** (水平弦)**.** 若 $f(x)$ 是定義在 $[0,1]$ 上的連續函數, 並且 $f(0)=f(1)$, 則對任何 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $\xi\in[0,1)$ 使得 $f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$。

在證明這個結果之前, 我們不妨用圖形感受其意義。如圖 4.1 所示, 首先畫一條兩端高度相同的連續函數 $f(x)$, 並設定一段長度為 $\frac{1}{n}$ 的箭頭, 箭頭與 x 軸平行, 且讓箭頭的起點與曲線的最左端貼齊, 例如在圖 4.1 的左、右兩圖分別示意箭頭長度為 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{3}$ 的情況。現在將箭頭沿著曲線平行移動, 觀察箭頭的尖端是否在某個地方碰到曲線。而我們的目標是要證明: 一定會在某個地方, 箭頭的尖點也會正好碰到曲線。這裡我們把滿足箭頭的起點與尖點都在曲線上的橫線段稱為水平弦。

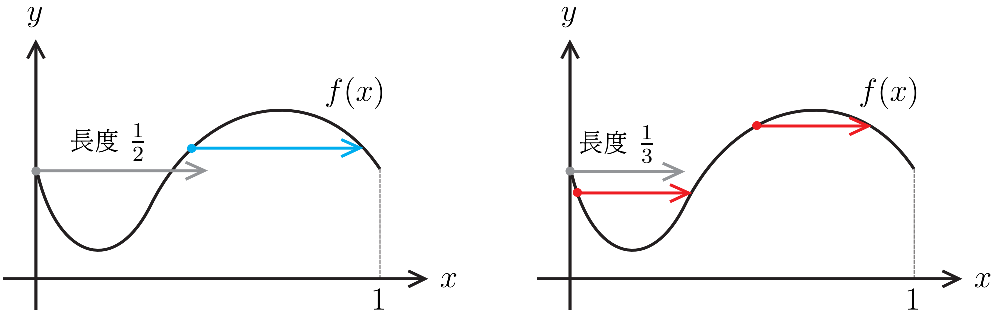

圖 4.1: 水平弦。左圖是長度為 $\frac{1}{2}$ 的情況, 右圖是長度為 $\frac{1}{3}$ 的情況, 水平弦都存在。

各位若是用上述方式體會的話, 似乎覺得這個現象很自然地就會發生, 但是要怎麼把這件事情說清楚呢? 特別剛才所畫的曲線只是諸多連續函數中的一個例子, 若是畫了其它滿足條件的連續函數, 為什麼也會有水平弦的存在, 若不透過數學的呈現就更難說明清楚。以下將利用中間值定理證明水平弦的存在性。

證明: 不失一般性, 我們可以假設 $f(0)=f(1)=0$。考慮函數

$$F(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x),\quad \text{其中 } x\in\left[0,\frac{n-1}{n}\right],$$

因為 $f(x+\frac{1}{n})$ 和 $f(x)$ 都是連續函數, 所以 $F(x)$ 也是連續函數。計算

$$\sum_{k=0}^{n-1}F\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=f(1)-f(0)=0,$$

現在分以下兩種情況討論:

(A) 若存在某個 $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ 使得 $F(\frac{k}{n})=f(\frac{k}{n}+\frac{1}{n})-f(\frac{k}{n})=0$, 則 $\xi=\frac{k}{n}$ 即為所求。

(B) 若所有 $k=0,1,\ldots,n-1$ 都 $F(\frac{k}{n})\neq 0$, 則必有 $k',k''\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ 使得 $F(\frac{k'}{n})>0, F(\frac{k''}{n})<0$。由中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 得知: 在 k' 與 k'' 之間存在一點 ξ 使得 $F(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})-f(\xi)=0$, 於是 $\frac{1}{n}$ 的水平弦存在。

$\square$

關於水平弦的故事其實還有一個進階思考題, 不曉得各位有沒有發現到, 水平弦只是針對長度爲 $\frac{1}{n}$ 的形式下才有存在性; 也就是說, 在 $[0,1]$ 上兩端函數值相同的連續函數, 不見得會有長度 $\frac{k}{n}, k = 2,3,\ldots,n-1$ 的水平弦。各位不妨嘗試一下怎麼造一個在 $[0,1]$ 上兩端函數值相同的連續函數, 但是不會有寬度爲 $\frac{2}{3}$ 的水平弦, 你就會發現到想要造一個反例也不是件輕而易舉之事。所以水平弦的存在性只在很少數的情況會發生, 大部份長度的水平弦並非總是發生。這又讓我們產生另一個迷思, 當初在觀察 $\frac{1}{n}$ 水平弦的存在性時, 真的有那麼自然嗎? 爲什麼我們在造反例的時候, 卻又是這麼地困難?

例 **2** (橡皮筋)**.** 一段橡皮筋在未拉扯之前置於 $[a,b]$ 的位置, 在拉扯後 (不把橡皮筋拉斷) 的狀態爲 $[a',b']$, 若 $a' \le a$ 且 $b' \ge b$, 則這條橡皮筋當中必有一點在拉扯的前後狀態下位置不變。

各位可以真的拿起橡皮筋進行拉扯, 然後想一想在拉扯前後狀態下位置不變的點是否很容易找到。在數學上, 我們把這種變換過程中位置不變的點稱爲 不動點 或是 固定點 (fixed point)。

現在將上面的敘述轉換成數學語言, 則是想證明以下定理:

定理**.** 若一個連續函數 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 滿足 $f(a)=a', f(b)=b'$ 以及 $a'\le a$ 與 $b'\ge b$, 則存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\xi$。

證明: 考慮 $F(x)=f(x)-x, x\in[a,b]$, 因爲 $f(x)$ 與 x 皆爲連續函數, 所以 $F(x)$ 也是連續函數。此外, 因爲 $F(a)=f(a)-a=a'-a\le 0, F(b)=f(b)-b=b'-b\ge 0$, 現分以下兩種情況討論:

(A) 若 $F(a)=f(a)-a=0$ 或 $F(b)=f(b)-b=0$, 則取 $\xi=a$ 或 $\xi=b$ 即爲所求。

(B) 若 $F(a)<0$ 且 $F(b)>0$, 由中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 得知: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$, 則 ξ 即爲所求。

□

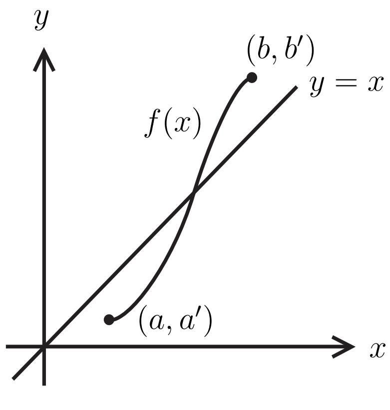

圖 4.2: 拉橡皮筋的過程中總有不動點。

這裡再用圖形理解一次拉橡皮筋的故事, 在坐標平面上先畫一條 $y=x$ 的直線, 然後在平面上標註兩點 (a,a') 以及 (b,b')。因爲我們要求 $a'\le a$ 以及 $b'\ge b$, 所以 (a,a') 不會在直線 $y=x$ 上方的區域, 而 (b,b') 不會在直線 $y=x$ 下方的區域。若 (a,a') 或是 (b,b') 在直線 $y=x$ 上, 則爲證明 (A) 的情況。若 (a,a') 在直線下方的區域且 (b,b') 在直線 $y=x$ 上方的區域, 則爲 (B) 的情況。因爲橡皮筋在拉扯的階段沒有斷掉, 所以在拉扯的前後狀態之橡皮筋位置的對應關係是一個通過 (a,a') 與 (b,b') 的連續函數, 則函數的圖形必與直線 $y=x$ 相交。

例 **3** (自行車)**.** 騎自行車向來是我喜歡的一項運動, 在求學的階段時間比較多 (好像整天都在玩?), 所以我曾騎著腳踏車全台走透透, 看看台灣的好山好水。十幾年前自行車盛行的時候, 自行車協會也會舉辦比賽。我在 2011 年的春天參加了一場 AMD 環花東 380 超級挑戰賽, 那是一個兩天的騎乘比賽, 第一天上午六點從花蓮市區沿著台 11 線南下騎到台東知本; 第二天上午六點再從知本沿台 9 線北上騎回花蓮市區。兩天的騎乘路線雖然不同, 但長度約莫各 190 公里, 故名 380 超級挑戰賽。各位小朋友要注意, 葛格平常是有受過專業訓練的, 所以才能兩天都順利完賽, 甚至表現不差 (傲)。如果事前沒有先經過一定程度的練習, 突然在兩天之內要騎 380 公里的話, 一定會出現各種狀況。

在這兩天的騎乘過程中, 居然有一個很巧合的現象發生, 那就是存在一個具有同緯度的去、回兩地, 手錶的時間分秒不差。該怎麼說明這個現象呢?

這裡我先還原一下當時騎車的狀況, 就我的印象中, 去程是比較辛苦的, 我大概騎到將近下午五點才到台東知本; 而回程就比較順利, 還不到三點就已騎回花蓮市區。我把這兩天騎車時, 每個時間對應騎到哪邊 (記錄其緯度) 的關係圖畫出, 如圖 4.3 所示。去程的時候, 因爲是上午六點在花蓮出發, 所以標記在 $(6, 23.9)$ 的位置, 比賽開始後, 因爲要往南騎到知本, 所以得到一個連續的遞減函數 $f(t)$, 而第一天是下午五點到知本, 所以函數 $f(t)$ 的圖形會通過 $(17, 22.4)$; 第二天的上午六點從知本出發, 所以在同一個坐標上標記 $(6, 22.4)$ 的位置, 比賽開始後, 因爲要往北騎回花蓮, 所以得到一個連續的遞增函數 $g(t)$, 第二天是下午三點到花蓮, 所以函數 $g(t)$ 的圖會通過 $(15, 23.9)$。

我們要說明的是: 由 $f(t)$ 和 $g(t)$ 所形成的這兩條曲線會有一個黃金交叉, 這個交點就是我們要尋找的點: 它滿足兩地的緯度相同而且兩天的時間分秒不差。

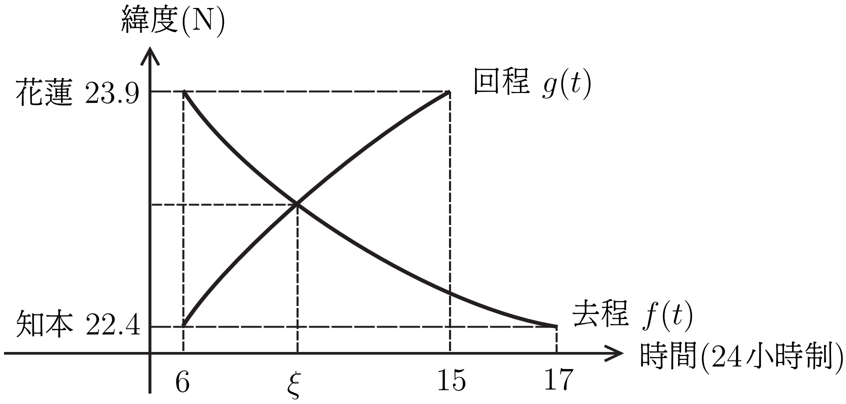

圖 4.3: 兩天自行車騎乘的時間與緯度的關係圖。

這裡利用數學的語言搭配中間值定理給予一個論述, 這個論述過程基本上和前一個例子類似: 若去程的連續函數爲 $f : [6, 17] \to \mathbb{R}$, 而回程的連續函數爲 $g : [6, 15] \to \mathbb{R}$。在 t 限定爲 $[6, 15]$ 的地方考慮 $F(t) = f(t) - g(t)$, 則 $F(t)$ 是一個連續函數, 並且滿足 $F(6) = f(6) - g(6) > 0, F(15) = f(15) - g(15) < 0$, 由中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 得知: 存在 $\xi \in (6, 15)$ 使得 $F(\xi) = 0$, 也就是說 $f(\xi) = g(\xi)$, 於是在這兩個地方有著相同的緯度, 時間也相同。

這裡我講了一個看似很酷炫的現象, 牽涉到騎自行車、環花東比賽、路線不同等很多變因, 而這當中會有同緯度同時刻的共通性, 而且每位完賽的選手也一定會有他自己所屬的黃金交叉點。實際上這些變因都不會影響定理的真實性。想一想兩台高鐵同時發車, 一台從台北發車南下至高雄, 另一台從高雄發車北上至台北, 則在抵達終點以前, 兩車必交會, 你就會覺得中間值定理就是這麼顯然。

例 **4** (切蛋糕)**.** 每當親朋好友生日的時候通常都會買蛋糕慶祝, 不曉得各位在唱完生日快樂歌之後要切蛋糕時是否總是遇到困擾, 當刀子切下去的瞬間, 在力道不足或力道過大的情形下, 結果切得歪七扭八, 原本一塊還蠻漂亮的蛋糕就這樣毀了樣貌, 最後放到盤子上的是一團不成樣的蛋糕屍體, 但還是把它吃進肚子裡。

若要切出一塊形狀漂亮的蛋糕是有一些小秘訣的, 除了蛋糕每個分層的餡軟硬不均所以切的時候力道的拿捏必須掌握得宜之外, 所謂工欲善其事, 必先利其器, 不要用附贈的塑膠刀子切蛋糕, 用塑膠刀切蛋糕就算手法再厲害也切不出完美的切割。到廚房拿一支不銹鋼刀, 然後在切蛋糕前將刀子預熱, 比方說刀子浸泡在一杯熱水當中, 然後要切蛋糕的時候, 用著帶有熱度的刀子切下去, 就會切出一道完美的刀痕。而這個方法只是切蛋糕的一個小秘訣而已, 網路上還有很多完美切蛋糕的其它要領, 甚至根據蛋糕的屬性會對應到不同的切割手法, 只要各位的親朋好友夠多, 多到可以天天過生日的話, 就可以不斷地嘗試, 達到爐火純青的境界。

對一些人來說, 他們在切蛋糕的時候其實在意的並不是切出多漂亮的刀痕, 而是講求公平, 如何切出兩塊面積一樣的蛋糕也是考驗著大家的智慧。這邊我們討論如圖 4.4 的一塊蛋糕。在數學上可以證明: 指定角度 $\theta_0 \in (0,\pi)$, 在刀子與 x-軸的夾角為 θ_0 的所有情況下, 必存在一刀平分蛋糕。

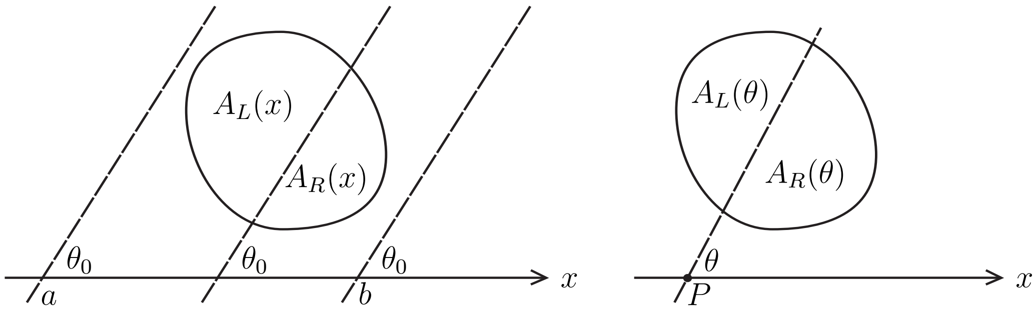

圖 4.4: 兩者平分蛋糕的方法。

證明: 首先將蛋糕置於 x-軸的上方, 然後指定角度 $\theta_0 \in (0,\pi)$ 之後, 考慮刀子位在 $x = a$ 的時候, 蛋糕完全在刀子的右側, 接著向右平移刀子並始終保持刀子與 x-軸的夾角恆為 θ_0。蛋糕是一個有界的區域, 所以刀子一定會在某個階段 $x = b$ 時, 蛋糕完全位在刀子的左側。

記 A 為蛋糕的面積, $A_R(x)$ 表示刀子在 x 處, 蛋糕在刀子右側的面積; 而 $A_L(x)$ 表示刀子在 x 處, 蛋糕在刀子左側的面積。我們考慮函數 $F(x) = A_R(x) - A_L(x)$, 它是一個定義在 $[a, b]$ 上的連續函數, 並且滿足 $F(a) = A - 0 = A > 0, F(b) = 0 - A = -A < 0$, 故由中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 得知: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F(\xi) = A_R(\xi) - A_L(\xi) = 0$, 這表示當刀子在 $x = \xi$ 的地方, 這一刀可以讓蛋糕均分。 □

我們也可以考慮另外一種平分蛋糕的方法, 在 x-軸上先取一點 P, 然後考慮刀子與 x-軸之間的夾角 $\theta \in [0,\pi]$。記 A 為蛋糕的面積, 對於每個 θ, 記 $A_R(\theta)$ 與 $A_R(\theta)$ 分別表示刀子在 θ 角的時候, 蛋糕在刀子右側與左側的面積。我們考慮函數 $F(\theta) = A_R(\theta) - A_L(\theta)$, 它是一個定義在 $[0,\pi]$ 上的連續函數, 並且滿足 $F(0) = 0 - A = -A < 0, F(\pi) = A - 0 = A > 0$, 故由中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 得知: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F(\xi) = A_R(\xi) - A_L(\xi) = 0$, 這表示當刀子在與 x-軸夾角為 $\theta = \xi$ 的時候, 這一刀可以讓蛋糕均分。

例 **5** (切月餅)**.** 上述均分蛋糕的方法或許你會覺得很容易而顯得不足爲奇, 我們現在來挑戰如何均分月餅。一塊具有滿滿的豆沙還有一顆蛋黃的月餅如圖 4.5 所示, 其中白色的區域是豆沙, 灰色的區域是蛋黃。我們要問的是: 是否存在一種切法, 當刀子一切下去的時候, 不僅平分豆沙, 也平分蛋黃?

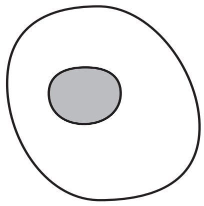

圖 4.5: 一塊月餅, 白色區域是豆沙, 灰色區域是蛋黃, 是否有一刀可以同時均分豆沙與蛋黃?

同時均分豆沙與蛋黃的切法是存在的, 討論如下: 首先把月餅放在一個盤子上, 如圖 4.6 畫虛線的圓, 取圓的最右端爲 P, 此時 P 對於圓 O 而言角度爲 $\phi = 0$, 刀子從與圓盤在 P 點相切的地方開始, 考慮過 P 且逆時針旋轉 θ 的刀子狀態, 其中 $\theta \in [0, \pi]$, 由前一個例子的討論得知, 必存在某個角度 $\theta = \theta(0)$ 使得刀子均分蛋黃。這時刀子的另一端對到圓盤上的點記爲 Q, 而 $\angle POQ$ 記爲 ϕ_Q。

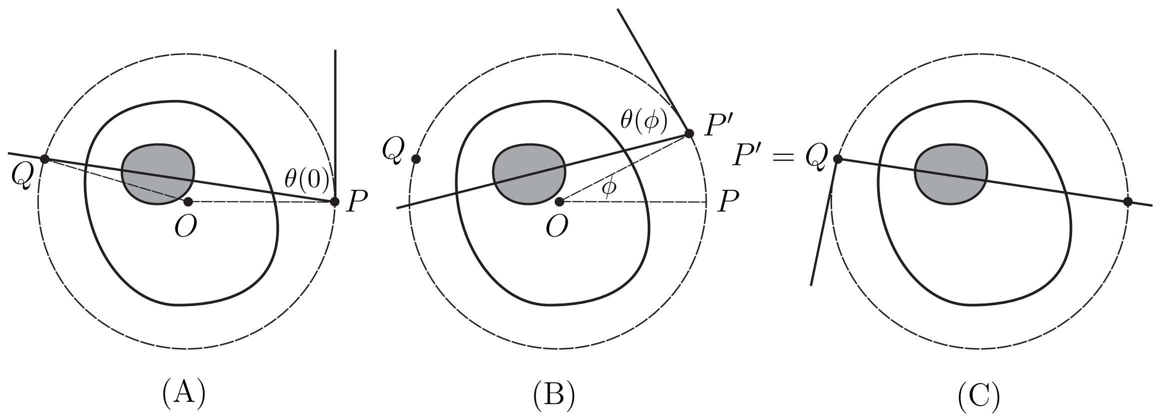

圖 4.6: 尋找可以同時均分豆沙與蛋黃的切割法。

如果在 $\theta(0)$ 的時候, 刀子也正好均分豆沙的話, 則討論完畢。如果沒有均分豆沙的話, 記 $A_R(0)$ 爲豆沙在刀子的右側面積, $A_L(0)$ 爲豆沙在刀子的左側面積, 此時 $A_R(0) - A_L(0) \neq 0$。

現在開始考慮動點 P' 從 P 出發沿著圓盤以逆時針方向移動, 如圖 4.6 (B), 當點移動到 P' 時, 記 $\phi = \angle POP'$, 利用前面例題的討論得到將蛋黃均分的切割狀態 $\theta(\phi)$, 這個操作一直讓 P' 與 Q 重合的時候, 也就是 $\phi = \phi_Q$ 的時候結束, 如圖 4.6 (C) 所示。

現觀察在 $\phi \in [0, \phi_Q]$ 的時候對於豆沙的切割情況: 在 $\theta(\phi)$ 的狀態時, 記 $A_R(\phi)$ 爲豆沙在刀子的右側面積, $A_L(\phi)$ 爲豆沙在刀子的左側面積, 考慮連續函數 $F(\phi) = A_R(\phi) - A_L(\phi), \phi \in [0, \phi_Q]$, 注意到 $A_R(\phi_Q) = A_L(0)$, 而 $A_L(\phi_Q) = A_R(0)$。因爲

$$F(0) \cdot F(\phi_Q) = (A_R(0) - A_L(0)) \cdot (A_L(0) - A_R(0)) = -(A_R(0) - A_L(0))^2 < 0,$$

由中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 得知: 必有某個角度 $\xi \in [0, \phi_Q]$ 使得 $F(\xi) = 0$, 這時候的刀子狀態可以同時把豆沙與蛋黃均分。

4.7 附錄

本附錄將證明各類初等函數在定義域內之連續性。

常數函數 (constant function)

常數函數指的是 $f(x)=c, c\in\mathbb{R}$。對任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=1>0$, 則所有滿足 $|x-x_0|<\delta$ 的點, 都有 $|f(x)-f(x_0)|=|c-c|=0<\varepsilon$。因此常數函數在 $x\in\mathbb{R}$ 爲連續函數。

三角函數 (trigonometric function)

雖然三角函數有六種類型, 但我們只需證明正弦函數 $\sin x$ 與餘弦函數 $\cos x$ 的連續性即可, 這是因爲其它三角函數都可以由這兩個函數進行四則運算而得。給定 $x=x_0\in\mathbb{R}$, 對任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon>0$, 則所有滿足 $|x-x_0|<\delta$ 的點, 都有

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\le 2\cdot 1\cdot\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|<\varepsilon$$
$$|\cos x-\cos x_0|=\left|-2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\le 2\cdot 1\cdot\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|<\varepsilon,$$

所以 $\sin x$ 與 $\cos x$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 都是連續函數。

反三角函數 (inverse trigonometric function)

利用反函數連續性定理可得所有反三角函數在定義域內是連續的。

指數函數 (exponential function) 的建構

給定正數 $a>0$, 指數函數 $f(x)=a^x, x\in\mathbb{R}$ 到底是什麼意思呢? 這裡必須從頭說明指數的建構, 如此才能講清楚指數函數。

(1) 對於 $n\in\mathbb{N}$, 則 $a^n=a\cdot a\cdots a\cdot a$ 表示將 n 個 a 相乘而得到的實數。

(2) 定義 $a^0=1$ 以及 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, 我們可得 $a^k, k\in\mathbb{Z}$ 的值。在此定義下, 指數律 (exponential law) $a^{k+l}=a^k\cdot a^l$ 對於 $k,l\in\mathbb{Z}$ 的時候成立。此外, 我們還知道這些指數具有 單調 (monotonic) 的性質: 對於 $k,l\in\mathbb{Z}$,

   (A) 若 $a>1$ 以及 $k<l$, 則 $a^k<a^l$。

   (B) 若 $a=1$, 則 $a^k\equiv 1$。

   (C) 若 $a<1$ 以及 $k<l$, 則 $a^k>a^l$。

(3) 以下將說明符號 $a^{\frac{1}{n}}, n\in\mathbb{N}$ 的意義。我們用下面定理表示:

   定理. 給定實數 $a>0$ 以及任何正整數 $n\in\mathbb{N}$, 則存在唯一實數 $\alpha>0$ 使得 $\alpha^n=a$。在證明此定理之後, 我們會用 $\alpha=a^{\frac{1}{n}}$ 或 $\alpha=\sqrt[n]{a}$ 代表滿足 $\alpha^n=a$ 的唯一正實數。

證明: 若 $0 < x_1 < x_2$, 則 $x_1^n < x_2^n$, 這告知滿足 $x^n = a$ 這個條件的實數最多只有一個。

若 $n = 1$, 取 $x = a$ 即爲所求。於是以下討論將專注於 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ 的情形。考慮集合 $E_a = \{x \in \mathbb{R} | \, x^n < a\}$。取 $x_3 = \frac{a}{1+a} < 1$, 因爲 $x_3^n < x_3 < a$, 所以集合 E_a 非空。取 $x_4 = 1 + a > 1$, 則 $x_4^n > x_4 > a$, 因此 x_4 是集合 E_a 的上界。由確界原理 (Supremum Principle) 得知 $\sup E_a$ 存在, 記 $\alpha = \sup E_a$。

以下將證明 $\alpha = \sup E_a$ 滿足 $\alpha^n = a$。在此之前, 我們先建立一個不等式:

由 $t^n - s^n = (t-s)(t^{n-1} + t^{n-2}s + \cdots + ts^{n-2} + s^{n-1})$ 得到:

$$\text{若 } 0 < s < t, \text{ 則 } t^n - s^n < (t-s)nt^{n-1}\text{。}$$

<u>假設 $\alpha^n < a$</u>, 這裡的目標是想要找到 $h > 0$ 使得 $\alpha^n < (\alpha + h)^n < a$, 如此一來, α 就不是集合 E_a 的上界得到矛盾。至於 h 的存在性, 我們改問是否有 $h > 0$ 滿足 $0 < (\alpha + h)^n - \alpha^n < a - \alpha^n$。

取 $h = \min(\frac{a-\alpha^n}{n(\alpha+1)^{n-1}}, 1) > 0$, 將 $s = \alpha, t = \alpha + h$ 代入上述不等式, 得到

$$(\alpha + h)^n - \alpha^n < hn(\alpha + h)^{n-1} < hn(\alpha + 1)^{n-1} < a - \alpha^n,$$

這麼一來就有不等式 $\alpha^n < (\alpha + h)^n < a$, 故 $\alpha^n < a$ 不成立。

<u>假設 $\alpha^n > a$</u>, 這時的目標是想要找 $k > 0$ 使得 $\alpha^n > (\alpha - k)^n > a$, 如此一來, α 並非集合 E_a 的最小上界而得到矛盾。至於這個不等式等價於尋求滿足 $\alpha^n - (\alpha - k)^n < \alpha^n - a$ 之 k 的存在性。

考慮 $k = \frac{\alpha^n - a}{n\alpha^{n-1}}$, 則 $\alpha^n - a < \alpha^n - 0 < \alpha \cdot n\alpha^{n-1}$ 得到 $0 < k = \frac{\alpha^n - a}{n\alpha^{n-1}} < \alpha$, 並且 $\alpha^n - (\alpha - k)^n < nk\alpha^{n-1} = \alpha^n - a$。

綜上討論, 可得 $\alpha = \sup E_a$ 滿足 $\alpha^n = a$。 □

(4) 在定義完 $a^{\frac{1}{n}}$ 之後, 現驗證: <u>若 $a, b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, 則 $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$。</u>記 $\alpha = a^{\frac{1}{n}}, \beta = b^{\frac{1}{n}}$, 則 $ab = \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n$, 所以 $\alpha\beta = (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$。

(5) 現驗證在指數爲 $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ 時的單調性:

  (A) 若 $a > 1$ 以及 $n < m$, 其中 $n, m \in \mathbb{N}$, 則 $a^{\frac{1}{m}} < a^{\frac{1}{n}}$。利用反證法, 假設 $a^{\frac{1}{n}} \leq a^{\frac{1}{m}}$, 則 $a^m = (a^{\frac{1}{n}})^{mn} \leq (a^{\frac{1}{m}})^{mn} = a^n$ 矛盾。

  (B) 若 $a = 1$ 且 $n \in \mathbb{N}$, 則 $a^{\frac{1}{n}} \equiv 1$。這是因爲 $(a^{\frac{1}{n}})^n = 1^n = 1$ 是唯一的正實根。

  (C) 若 $a < 1$ 以及 $n < m$, 其中 $n, m \in \mathbb{N}$, 則 $a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{m}}$。利用反證法, 假設 $a^{\frac{1}{m}} \leq a^{\frac{1}{n}}$, 則 $a^n = (a^{\frac{1}{m}})^{mn} \leq (a^{\frac{1}{n}})^{mn} = a^m$ 矛盾。

(6) 現在要討論指數爲有理數的情形。對於 $r \in \mathbb{Q}$, 記 $r = \frac{p}{q}$, 其中 $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1$, 定義 $a^r = (a^p)^{\frac{1}{q}}$。這裡必須證明: 若 $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, 則 $(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$; 也就是說, 我們必須說明當 r 並非用最簡分數表達時, 也有同樣的操作。

令 $k = mq = pn \in \mathbb{Z}$, 對於 a^k 這個實數而言, 存在唯一正實數 α 使得 $\alpha^{nq} = a^k$。現觀察 $(a^p)^{\frac{1}{q}}$ 與 $(a^m)^{\frac{1}{n}}$, 因爲

$$\left((a^p)^{\frac{1}{q}}\right)^{nq} = (a^p)^n = a^{pn} = a^k, \qquad \left((a^m)^{\frac{1}{n}}\right)^{nq} = (a^m)^q = a^{mq} = a^k,$$

所以 $(a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$。

(7) 再來要驗證指數律在指數爲有理數的情況下成立; 也就是說, 對所有 $r, s \in \mathbb{Q}$, 則 $a^{r+s} = a^r a^s$。記 $r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q}$, 則 $r + s = \frac{mq+np}{nq}$, 且

$$a^{r+s} = (a^{mq+np})^{\frac{1}{nq}} = (a^{mq}a^{np})^{\frac{1}{nq}} = (a^{mq})^{\frac{1}{nq}}(a^{np})^{\frac{1}{nq}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}(a^p)^{\frac{1}{q}} = a^r a^s。$$

(8) 在指數爲有理數時的單調性討論如下: 若 $r, s \in \mathbb{Q}$, 記 $r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1, s = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1$。這裡注意到 $\frac{p}{q} < \frac{m}{n} \Leftrightarrow np < mq$。

(A) 若 $a > 1$ 以及 $r < s$, 則 $a^r < a^s$。利用反證法, 若 $a^s \le a^r$, 則 $(a^s)^{nq} = (a^{\frac{m}{n}})^{nq} = a^{mq}$ 而 $(a^r)^{nq} = (a^{\frac{p}{q}})^{nq} = a^{np}$, 得到 $a^{np} < a^{mq}$ 矛盾。

(B) 若 $a = 1$, 則 $a^r = a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = 1^{\frac{1}{q}} = 1$。

(C) 若 $a < 1$ 以及 $r < s$, 則 $a^r > a^s$。利用反證法, 若 $a^s \ge a^r$, 則 $(a^s)^{nq} = (a^{\frac{m}{n}})^{nq} = a^{mq}$ 而 $(a^r)^{nq} = (a^{\frac{p}{q}})^{nq} = a^{np}$, 得到 $a^{np} > a^{mq}$ 矛盾。(想一下等號)

(9) 現在要討論 $a^x, x \in \mathbb{R}$ 的意義。若 $a > 1$, 考慮集合 $A(x) = \{a^r | r \in \mathbb{Q}, r < x\}$。因爲必有整數 $k, l \in \mathbb{Z}$ 滿足 $k < x < l$, 而 $a^k \in A(x)$, 所以集合 $A(x)$ 非空; 又對任何 $y \in A(x)$ 都有 $y < a^l$, 所以集合 $A(x)$ 有上界。由確界原理 (Supremum Principle) 得知 $\sup A(x)$ 存在。

定義 $a^x = \sup A(x)$, 這裡必須驗證: 當 $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ 時, 用 $\sup A(x)$ 定義出的實數和前述所定義的 $a^{\frac{p}{q}}$ 兩者是 相容的 (compatible)。首先, 因爲 $r < x = \frac{p}{q}$, 所以 $a^r < a^{\frac{p}{q}}$, 因此 $a^{\frac{p}{q}}$ 爲集合 $A(x)$ 的一個上界。對任意 $M'' \in \mathbb{R}, M'' < a^{\frac{p}{q}}$, 現在想要找 $r'' \in \mathbb{Q}$ 使得 $M'' < a^{r''}$。首先, 將 M'' 寫成 $M'' = a^{\frac{p}{q}} - \varepsilon'' = a^{\frac{p}{q}} - (a^{\frac{p}{q}}\varepsilon)$, 其中 $\varepsilon'', \varepsilon > 0$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = 1$ 且 $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} < 1$, 所以對 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \ge N$ 都有 $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < 1$, 得到 $M'' = a^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}\varepsilon < a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{-\frac{1}{n}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{1}{n}} < a^{\frac{p}{q}}$, 於是 $r'' = \frac{p}{q} - \frac{1}{N} \in \mathbb{Q}$ 即爲所求。

若 $a = 1$, 則 $A(x) \equiv 1$, 得到 $a^x \equiv 1, x \in \mathbb{R}$。

若 $a < 1$, 定義 $a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$, 則 a^x 有意義。

(10) 以下將證明: 對任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 都有 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$。若 $a > 1$, 因爲 $a^{x+y} = \sup\{a^{r+s} | r, s \in \mathbb{Q}, r < x, s < y\}$, 對任意 $r, x \in \mathbb{Q}, r < x, s < y$, 則 $a^r \le a^x$ 且 $a^s \le a^y$, 由上確界的定義得到 $a^{r+s} = a^r \cdot a^s \le a^x \cdot a^y$, 所以 $a^x \cdot a^y$ 是一個上界。

對任何 $0 < M'' < a^x \cdot a^y$, 則 $\frac{M''}{a^x} < a^y$, 令 $m = \frac{1}{2}\left(\frac{M''}{a^x} + a^y\right)$, 則 $\frac{M''}{a^x} < m < a^y$, 因爲 $\frac{M'}{m} < a^x$, 所以存在 r'' 使得 $\frac{M'}{m} < a^{r''}$。另一方面, 因爲 $m < a^y$, 所以存在 s'' 使得 $m < a^{s''}$, 因此 $M'' = \frac{M''}{m} \cdot m < a^{r''} \cdot a^{s''} \le a^x \cdot a^y$ 得知 M'' 不再是上界。

由上討論得知 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$。

若 $a = 1$, 因爲 $a^x \equiv 1$, 所以 $a^{x+y} = 1 = a^x \cdot a^y$。

若 $a < 1$, 因爲 $a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$, 所以 $a^{x+y} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{x+y}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^y} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^y} = a^x \cdot a^y$。

(11) 最後要證明指數的單調性:

(A) 若 $a > 1$ 以及 $x < y$, 取 $r, s, t \in \mathbb{Q}$ 滿足 $x < r < s < t < y$, 因爲 $a^r < a^s < a^t$, 所以 a^s 是集合 $A(x)$ 的上界, 但不是最小上界, 而且 a^s 是集合 $A(y)$ 的下界, 但不是最大下界, 因此 $a^x < a^s < a^y$。

(B) 若 $a = 1$, 則 $a^x \equiv 1$。

(C) 若 $a < 1$ 以及 $x < y$, 則 $a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} > \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^y} = a^y$。

至此將指數函數建構完畢。

指數函數的連續性

以下將證明指數函數的連續性

(1) 首先證明: 指數函數 $f(x) = a^x$ 在 $x = 0$ 連續。若 $a > 1$, 考慮 $0 < x < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, 那麼 $0 < a^x - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1$, 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{x\to 0^+} (a^x - 1) = 0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1 = a^0$。因此 a^x 在 $x = 0$ 處右連續。

再證 a^x 在 $x = 0$ 處左連續: 設 $x = -y$, 則 $a^x = \frac{1}{a^y}$ 並且 $y > 0$, 由極限的四則運算知道

$$\lim_{x\to 0^-} a^x = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{a^y} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+} a^y} = \frac{1}{1} = 1 = a^0,$$

所以 a^x 在 $x = 0$ 處左連續。

(2) 再證: 指數函數 $f(x) = a^x, a > 1$ 在 $x = x_0$ 的連續性。這是因爲 $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1|$, 而 $\lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} = \lim\limits_{y\to 0} a^y = 1$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$。因此 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$。

(3) 若 $a = 1$, 則 $f(x) = a^x \equiv 1$ 爲常數函數, 故爲連續函數。

(4) 若 $0 < a < 1$, 令 $a = \frac{1}{b}$, 則 $b > 1$ 且 $a^x = \frac{1}{b^x}$, 因爲 b^x 爲連續函數, 由連續函數的除法運算得知 a^x 亦爲連續函數。

對數函數 (logarithmic function)

對於指數函數 $f(x)=a^x$ 來說, 在 $a>0, a\neq 1$ 時, $f(x)=a^x$ 是嚴格遞增或嚴格遞減的函數, 所以反函數存在, 將反函數記成 $f^{-1}(x)=\log_a x$, 其中 $a>0, a\neq 1$。特別地, 以歐拉數 (Euler number) e 爲底的對數函數記爲 自然對數 (natural logarithmic function) $f(x)=\ln x$。

由指數函數 a^x 的連續性以及反函數的連續性, 得知對數函數 $\log_a x$ 在 $(0,\infty)$ 都是連續函數。

冪函數 (power function)

冪函數是泛指型如 $f(x)=x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$ 的函數。各位較爲熟悉的 多項式 (polynomial) 是專指 α 爲非負整數, 並且是在有限個加法與係數 (常數函數) 乘法的運算下而得的產物。

冪函數的定義域會因爲 α 的不同而有區別, 以下利用 $x>0, x<0, x=0$ 三個區段, 再對 α 的值討論其連續性。

現以 x 的正負搭配 α 的選取整理如下:

(A) 在 $x\in(0,\infty)$, 對所有 $\alpha\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^\alpha$ 都有定義。因爲 $f(x)=x^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}$, 由 $\mathrm{e}^u, u=\ln x$ 的連續性以及合成函數的連續性知道 $f(x)=x^\alpha$ 在 $x\in(0,\infty)$ 是連續函數。

(B) 在 $x\in(-\infty,0)$, 只有當 $\alpha\in\mathbb{Z}$, 或者是 $\alpha=\frac{n}{2m+1}, n,m\in\mathbb{Z}$ 時 $f(x)=x^\alpha$ 才有意義。因爲 $f(x)=(-(-x))^\alpha=(-1)^\alpha(-x)^\alpha=(-1)^\alpha f(-x)$, 而 $f(-x)=(-x)^\alpha$ 連續, 所以 $f(x)=x^\alpha$ 在 $x\in(-\infty,0)$ 也連續。

(C) 以下討論在 $x=0$ 冪函數的右連續性質:

(C1) 若 $\alpha>0$, 定義 $f(0)=0$, 則 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\alpha\ln x}=0=f(0)$ 得到 $f(x)=x^\alpha$ 在 $x=0$ 右連續。

(C2) 若 $\alpha=0$, 定義 $f(0)=1$, 則 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\alpha\ln x}=1=f(0)$ 得到 $f(x)=x^\alpha$ 在 $x=0$ 右連續。

(C3) 若 $\alpha<0$, 則 $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\alpha\ln x}=\infty$ 得知 $x=0$ 是一個無窮不連續點, 所以無法定義 $f(0)$ 的值使得冪函數在 $x=0$ 右連續。

(D) 再看 $x=0$ 的左連續。

(D1) 當 $\alpha\in\mathbb{Z}$, 或者是 $\alpha=\frac{n}{2m+1}, n,m\in\mathbb{Z}$, 且 $\alpha>0$ 時, 因爲 $f(x)=(-1)^\alpha f(-x)$, 所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-1)^\alpha\lim\limits_{x\to0^-}f(-x)=0$ 得到 $f(x)=x^\alpha$ 在 $x=0$ 左連續。

(D2) 若 $\alpha=0$, 得到 $f(x)\equiv 1$ 亦爲左連續。

(D3) 若 $\alpha<0$, 因爲 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-1)^\alpha f(-x)$ 極限不存在。