2

數列的極限理論

2.1 無窮數列極限的定義

定義 **1.** *無窮數列* (infinite sequence) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 指的是一串實數依序地排列; 換言之, 它可寫成

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots \tag{1}$$

其中對所有 $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$。此時, a_n 稱爲無窮數列的 *第 n 項* (n-th term)。

因爲正整數 $1, 2, 3, \ldots$ 是一組有順序排列的數字, 所以無窮數列的記號中, 我們使用了正整數作爲 指標 (index), 以正整數的編號告知這串數字的順序關係。這裡我們感興趣的是無窮數列, 也就是說這串數字永無止盡地排列下去, 在 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 記號的右上端會用 ∞ 表示這個現象, 而在 (1) 的表達法之下, 一定會在 a_n 的後面加上點點點「$\ldots$」以明確指出無止盡排列的現象。文章中在不引起混淆的情況下, 有時會把無窮數列只用數列二字表示。關於上述的定義其實寫得較爲口語, 若想把無窮數列的概念再說明清楚, 則它指的是定義域爲正整數集合 $\mathbb{N}$ 的一個函數 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, a_n = f(n)$。

有時候一個無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一些現象, 想像下標的 n 代表第 n 秒, 而 a_n 這個數列就是在第 n 秒的時候標記位於 a_n 的一個點, 於是像 $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ 這個數列來說應該很容易感受得到當時間一分一秒地過去時, 標記的那些點「愈來愈靠近 0」, 而 $\{\frac{(-1)^n}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots\}$ 這串數字雖然在 0 的左右跳來跳去, 但這串數字好像也有「愈來愈靠近 0」的趨勢。再舉一例, 像 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\}$ 這個數列的行爲也很清楚, 就是當 n 變動時, 數列在 -1 和 1 反覆跳動, 但是這個數列似乎不會和任何一個數有接近的感覺。

在數列的理論中, 我們感興趣的是具有「和某個數字愈來愈接近」這個性質的數列, 但是這句話要用數學語言確實地描述它, 在一百多年前的人們總是說不清楚這件事, 一直到柯西 (Cauchy) 提出了像下段文字要闡述的觀點後, 大家才逐漸體會到這層奧義, 也開始接受以下對於數列的行爲的說詞。

在述說柯西對於數列極限的定義之前, 我想先提一個各位可能在生活中曾經遇到的事情: 比方說兩位同學的老家一個住台北另一個住台中, 彼此聊天一提到家鄉時會覺得兩地隔很遠, 但對於在美國長大的人來說, 當你跟他介紹台北和台中這兩座城市時, 他們會覺得台北和台中很近, 這是因爲美國地大物廣, 兩座大城市之間就算搭飛機也要兩、三個小時才會到達, 而台北到台中卻有著不到五十分鐘就可以抵達的高鐵, 以每個人的生活經驗去感受距離時, 彼此之間就有明顯地落差。另一個例子就是: 對於一個心儀的對象, 明明每天在校園間擦身而過, 但卻產生世界上最遙遠的距離......。

對某個人來說兩個東西很近但是在其他人的眼裡並不覺得很近, 這就是造成認知上的不同。於是在討論問題的時候, 應該要先有一個默契, 也就是在事前彼此先講好: 到底怎樣的範圍叫做「很近」。換句話說, 一開始先給出一個正數, 記爲 ε (epsilon, 它是某個希臘字母), 然後約定: 兩個數之差如果小於 ε 的話, 那麼我們就認定它們很接近。有了這樣的概念之後, 就可以將無窮數列極限的精確定義寫出來了:

定義 **2** (數列極限的精確定義)**.** 給定無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 以及 $L \in \mathbb{R}$, 若以下語句成立:

對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $n > N$, 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$,

則稱無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *收斂的* (convergent), 此時 L 稱爲無窮數列的 *極限* (limit), 記號上會用 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 表示。如果沒有任何一個實數滿足上述條件, 則稱無窮數列是 *發散的* (divergent)。

若重新考察無窮數列極限的精確定義, 便會發現到: 在 *定義* **2** 之前的文字說明其實只解釋了一部份, 也就是在理解極限的定義時, 首先要感受的是先約定好「很近」的意義, 在彼此可接受的誤差範圍 ε 下, 然後去研究無窮數列是否在某一項之後的所有項都與某個特定的值 L 的差都在誤差範圍內。實際上這個定義當中還有兩個很重要的邏輯用語: 任意 (所有)、存在。極限的定義必須經過重重的考驗, 比方說一個研究天文的人會覺得兩星球之間只有十光年是很近的, 當他拿著天文望遠鏡看事情的時候, 心中的 ε 其實算是很寬鬆的, 相較於一般人用肉眼看事情時, 在視線範圍內的物體之間才叫做很近, 於是取用的 ε 就會比較嚴格一些, 若你是拿著顯微鏡進行觀察時, 相差一毫米不到的距離可能就超出觀察的範圍了。在定義中的「對任意 $\varepsilon > 0$」的「任意」兩字就是要強調數列在不論是寬鬆或是嚴厲的關卡之下「都能經過考驗」, 所謂都能經過考驗, 指的是 N 的存在性。

學會極限的精確定義是學習高等微積分的第一步, 往後的所有討論都脫離不了這種論述方式, 所以各位務必要學得精熟。以下將利用很多例子帶大家感受並學習如何使用這套語言。

例 **3.** 常數數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{c\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 而且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$。

證明: 對任何 $\varepsilon > 0$, 取 $N = 1$, 則對所有 $n > N$, 都有 $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$。因此 $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$。 □

例 **4.** 考慮無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

想法. 首先我們約定一個正數 $\varepsilon > 0$, 然後研究這個數列的哪些項和 0 之間的距離真如我們所約定的 ε 還要近, 所以要觀察 $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ 在什麼情況下不等式會成立, 將不等式改寫一下得到 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 或是 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 於是這個數列, 可以找到一個正整數 $N = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1$, 那麼 $n > N$ 的時候, 就有 $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$。

證明: 給定任意正數 $\varepsilon > 0$, 選取 $N = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1$, 則對所有 $n > N$,

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

其中最後一個不等式成立是因爲 $n > [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$, 得到 $\frac{1}{n} < \varepsilon$。因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。 □

在正式進行數學論述時, 只要寫出 證明 的那段文字即可, 前面的 想法 的部份不必寫出來, 那些話語只是此時此刻爲了想要讓你深刻了解極限的意義而寫下的內心話, 不需要公諸於世。

各位可以自行試一試以下問題:

問題. 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$。

接著我們看看如何分析複雜一點的數列極限。

例 **5.** 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-3}=2$。

想法**.** 首先研究數列的一般項 $\frac{2n^2}{n^2-3}$ 與 2 之間的差:

$$\left|\frac{2n^2}{n^2-3}-2\right|=\left|\frac{2n^2-2(n^2-3)}{n^2-3}\right|\overset{(n\geq 2)}{=\!=}\frac{6}{n^2-3}\overset{\text{希望}}{<}\varepsilon,$$

注意到第二個等式只要在 $n\geq 2$ 的時候就可以將絕對值拆掉, 所以我們在等式上面註明這件事。增加 $n\geq 2$ 這個條件以去掉絕對值是允許的, 這是因爲數列的極限在乎的是 n 很大的時候數列的行爲, 所以前面的有限項不論多麼「不守秩序」(像是這裡的 $n=1$) 也不打緊。而最後一個不等號是我們希望建立的目標, 所以我們試圖解以下不等式:

$$\frac{6}{n^2-3}<\varepsilon\Leftrightarrow n^2-3>\frac{6}{\varepsilon}\Leftrightarrow n^2>\frac{6}{\varepsilon}+3\Leftrightarrow n>\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3}\text{ 或 }n<-\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3}$$

上面的不等式計算都是等價的討論, 所以給定 $\varepsilon>0$ 之下, 只要取 $N=\max\left(2,\left[\!\left[\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3}\right]\!\right]+1\right)$, 那麼就可以完全地反推回去。

有了上述的想法, 我們就可以寫出以下證明:

證明: 給定任何正數 $\varepsilon>0$, 選取 $N=\max\left(2,\left[\!\left[\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3}\right]\!\right]+1\right)$, 則對所有 $n>N$, 都有

$$\left|\frac{2n^2}{n^2-3}-2\right|=\left|\frac{2n^2-2(n^2-3)}{n^2-3}\right|\overset{(n\geq 2)}{=\!=}6\cdot\frac{1}{n^2-3}\overset{(*)}{<}6\cdot\frac{\varepsilon}{6}=\varepsilon,$$

其中 $(*)$ 這個不等式是因爲

$$n>\left[\!\left[\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3}\right]\!\right]+1>\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}+3}\Rightarrow n^2>\frac{6}{\varepsilon}+3\Rightarrow n^2-3>\frac{6}{\varepsilon}\Rightarrow\frac{1}{n^2-3}<\frac{\varepsilon}{6},$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-3}=2$。 □

關於上述分析有一件事情值得探討: 觀察這裡求得 N 的方法, 我們用到解一元二次不等式的技巧, 倘若有理式經整理後需要解的是三次式或四次式, 那我們不就要先學會如何解三次或四次方程式與不等式嗎? 更不幸地是, 在代數學上, 可以證明「五次以上的方程式沒有公式解」, 那這樣我們不就沒辦法處理一般數列的極限了嗎?

事實上這件事不需要感到沮喪或慌張, 注意到數列極限的主要目標只是要確定「N 的存在性」而已, 並不是要找到滿足不等式的最小值或最佳數字; 也就是說, 每次給定一個誤差 $\varepsilon>0$, 只需告知是不是有一個 N 滿足後面的要求即可。想一想在玩大老二的時候, 當對手出了一張黑桃 7 時, 而你手上有著 8 的鐵支, 你並不會把你手上的梅花 8 丟出來 (它是可以壓過黑桃 7 的最小的牌), 而你是順勢地打出紅心 K (因爲你手上的兩張 9 與三張 J 可以湊出葫蘆 (full house) 暫時不想出) 壓過黑桃 7 即可。

所以現在重新討論這個數列:

$$\left|\frac{2n^2}{n^2-3}-2\right| = \left|\frac{2n^2-2(n^2-3)}{n^2-3}\right| \overset{n\geq 2}{=\!=} \frac{6}{n^2-3} < \text{式子 } 1 < \text{式子 } 2 < \cdots < \text{式子 } k \overset{\text{希望}}{<} \varepsilon$$

我們想要在這之間適當地安插式子 1、式子 2、......、式子 k, 然後對於「式子 k」的表達來說相當單純, 使得最後建立「式子 $k<\varepsilon$」的討論以及所設立的條件都非常容易求得的情況下就能完成整個論述。

比方說我們可以這麼改寫:

$$\left|\frac{2n^2}{n^2-3}-2\right| = \left|\frac{2n^2-2(n^2-3)}{n^2-3}\right| \overset{(n\geq 2)}{=\!=} \frac{6}{n^2-3} \overset{(n\geq 3)}{<} \frac{6}{n^2-4} = \frac{6}{(n+2)(n-2)} < \frac{6}{n-2} \overset{\text{希望}}{<} \varepsilon,$$

這麼一來, 最後的不等式要達成所需的條件就很容易找到:

$$\frac{6}{n-2} < \varepsilon \Leftrightarrow n-2 > \frac{6}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{6}{\varepsilon}+2。$$

證明: 給定任意 $\varepsilon>0$, 選取 $N=\max(3,[\![\frac{6}{\varepsilon}]\!]+3)=[\![\frac{6}{\varepsilon}]\!]+3$, 則當 $n>N$ 時,

$$\left|\frac{2n^2}{n^2-3}-2\right| = \left|\frac{2n^2-2(n^2-3)}{n^2-3}\right| \overset{(n\geq 2)}{=\!=} \frac{6}{n^2-3} \overset{(n\geq 3)}{<} \frac{6}{n^2-4} = \frac{6}{(n+2)(n-2)} < \frac{6}{n-2} \overset{(*)}{<} \varepsilon,$$

其中 $(*)$ 這個不等式成立是因為

$$n > \left[\!\!\left[\frac{6}{\varepsilon}\right]\!\!\right]+3 \Rightarrow n-2 > \left[\!\!\left[\frac{6}{\varepsilon}\right]\!\!\right]+1 > \frac{6}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n-2} < \frac{\varepsilon}{6},$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-3}=2$。 □

我們再舉一個例子說明數列極限該如何用定義的方式證明。

例 **6.** 試證 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n=0$。

想法. 給定誤差 $\varepsilon>0$, 想要研究是否在某個 N 之後的項都有 $\left|\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n-0\right|<\varepsilon$。對於要討論的數列, 整體來說其實還蠻複雜的, 不僅分子與分母都不只一項, 甚至還有 $\sin n$ 在攪局, 導致整個數列的行為現階段都不易掌握。而我們可以做的事情是進行一些估計, 想一想是否有辦法從中建立一些不等式:

$$\left|\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n-0\right| \leq \text{式子 } 1 \leq \text{式子 } 2 \leq \cdots \leq \text{式子 } k \overset{\text{希望}}{<} \varepsilon,$$

除了確定每個不等式是否會對 n 有些外加的約束, 還要希望從最後的「式子 $k<\varepsilon$」找出明確的 N 使得 $n>N$ 的時候最後的不等式成立, 這麼一來, 當 $n>\max(N, \text{約束條件})$ 時, 所有的不等式就能完全串起來。另一方面, 因為我們必須明確找出 N, 所以如果「式子 k」愈單純則愈好分析。

這裡稍微提點幾個建立不等式時的原則:

(1) 一個數, 若分子與分母都是正量, 分母固定, 只要分子變大, 其值也愈大。特別地, 若分子有好幾項 (有正有負但是整體而言是正量) 組成時, 可以考慮直接把某些負的項去掉。

(2) 一個數, 若分子與分母都是正量, 分子固定, 只要分母變小, 其值也愈大。特別地, 把分母當中的某個正量直接去掉就會有這個現象。

(3) 善用以前曾經學過的不等式, 例如三角不等式、算幾不等式、柯西不等式等, 還有一些常用的代數不等式, 比方說 $0 < a < b$, 則 $0 < a^2 < b^2$。

論證數列極限存在而使用不等式進行化簡的方法叫做 *估計* (estimate), 有的時候估計會過於粗糙導致結果論證不出來, 這時必須重新調整不等式, 不能讓資訊放掉太多。日後需要培養的數學能力就是要知道哪些量至關重要, 哪些量可以不用太在意。

現在我們用這個例子進行分析:

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n - 0\right| &= \left|\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n\right| \le \left|\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\right| |\sin n| \le \left|\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\right| \\ &= \frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1} \le \frac{2n+n}{n\sqrt{n}} = \frac{3n}{n\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

寫到這裡只要再討論: 什麼時候 $\frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon$? 這個不等式的幾個等價的改法如下:

$$\frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{9}{\varepsilon^2}$$

所以, 只要取 $N = [\![\frac{9}{\varepsilon^2}]\!] + 1$ 就完成了。

證明: 對任何 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [\![\frac{9}{\varepsilon^2}]\!] + 1$, 則對所有 $n > N$, 都有

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n - 0\right| &= \left|\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n\right| \le \left|\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\right| |\sin n| \le \left|\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\right| \\ &= \frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1} \le \frac{2n+n}{n\sqrt{n}} = \frac{3n}{n\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}} \overset{(*)}{<} \varepsilon,\end{aligned}$$

其中不等式 $(*)$ 成立的原因在於

$$n > \left[\!\!\left[\frac{9}{\varepsilon^2}\right]\!\!\right] + 1 > \frac{9}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{9}{n} < \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n\sqrt{n}+2n-1}\sin n = 0$。 □

前面花了一些篇幅介紹無窮數列收斂的精確定義, 也用例子示範如何確實論述數列的收斂。現在要介紹一個在數學上很重要的數列: 等比數列。各位在中學的時候應該有接觸過一些等比數列的理論, 一個數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如果對所有 $n \in \mathbb{N}$, 後項除以前項 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 爲一個常數 $r \neq 0$, 則這個數列稱爲 *非平凡的等比數列* (nontrivial geometric sequence), 其中常數 r 稱爲 *公比* (common ratio)。按照定義, 等比數列的一般項可用首項與公比的關係明確地表達: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$。若以這個一般式重新看等比數列時, 因爲它已不牽涉到除法的問題, 所以這時取 $r = 0$ 的話, 可以得到一些 *平凡的等比數列* (trivial geometric sequence) 或 *無聊的等比數列* 型如 $\{a_1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$。稱它們爲平凡或無聊是因爲這個數列只有首項可能非零, 第二項之後全爲零, 基本上它並不令人感興趣。

以下我們先證明某些等比數列的收斂情形, 一般的情況會在後面幾節補充。

例 **7.** 給定 r 滿足 $|r|<1$, 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$。

證明:

(A) 若 $r=0$, 則對任何 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $r^n \equiv 0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ (詳見 例 **3**)。

(B) 若 $0<|r|<1$, 對任意 $\varepsilon>0$, 希望找到自然數 $N\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $n>N$ 都有

$$|r^n - 0| = |r^n| = |r|^n \overset{\text{希望}}{<} \varepsilon,$$

從最後一個不等式, 兩邊取常用對數 (這份講義到目前爲止還沒有提到歐拉數 e, 所以在此就沒有使用自然對數 ln 討論問題) 得到 $n\log|r| < \log\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log\varepsilon}{\log|r|}$。由上分析得到: 對任意 $\varepsilon>0$, 取 $N = [\![\frac{\log\varepsilon}{\log|r|}]\!]+1$, 則對所有 $n>N$ 都有 $n > [\![\frac{\log\varepsilon}{\log|r|}]\!]+1 > \frac{\log\varepsilon}{\log|r|}$, 於是

$$|r^n - 0| = |r^n| = |r|^n < |r|^{\frac{\log\varepsilon}{\log|r|}} = \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$。

□

上述的論證方式非常直接, 因爲會變動的量 n 只出現在指數的部份, 所以直接針對它利用對數函數將 n 降下來進行估計也不致產生太大的困難。

現在想要介紹另一個證明方法, 各位可以看到對於同樣的問題, 我們可以善用以前所學的東西, 有很多方法都可以處理極限, 思維不必受限。在此之前, 我想先提一個在分析上常使用的 伯努力不等式 (Bernoulli's inequality):

定理 **8** (伯努力不等式, Bernoulli's inequality)**.** 對任意 $x\geq -1$ 與任意自然數 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$(1+x)^n \geq 1+nx。$$

證明: 利用數學歸納法完成論述:

(1) 當 $n=1$ 時, 則 $(1+x)^1 = 1+x \geq 1+1\cdot x$ 不等式成立。

(2) 假設 $n=k$ 時, 不等式 $(1+x)^k \geq 1+k\cdot x$ 成立。

(3) 當 $n=k+1$ 時, 則

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x。$$

(4) 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知, 對任意滿足 $x\geq -1$ 的實數與任意自然數 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $(1+x)^n \geq 1+nx$。

□

想一想*.* 上述的證明中, 哪一步有用到 $x\geq -1$ 的條件? 請在那個地方補充並加註說明。

現在就要利用伯努力不等式再次證明公比絕對值小於一的等比數列收斂, 而且極限值爲零。

例 **9.** 給定 r 滿足 $|r| < 1$, 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$。

證明:

(A) <u>若 $r = 0$</u>, 則對任何 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $r^n \equiv 0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ (詳見 例 **3**)。

(B) <u>若 $0 < |r| < 1$</u>, 將公比改寫成 $|r| = \frac{1}{1+p}$, 其中 $p > 0$ 是一個定數, 由伯努力不等式得知

$$|r|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \le \frac{1}{1+np} < \frac{1}{np},$$

對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [\![\frac{1}{\varepsilon p}]\!] + 1$, 則對所有 $n > N$ 都有 $n > [\![\frac{1}{\varepsilon p}]\!] + 1 > \frac{1}{\varepsilon p}$, 得到

$$|r^n - 0| = |r|^n < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p} < \varepsilon p \cdot \frac{1}{p} = \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$。

□

網路科技的進步約莫是最近這二十年才興起, 也就是各位在小時候玩的遊戲或許都是以網路的線上遊戲爲主。我小時候雖然家中有任天堂紅白機可以玩 (或許你們覺得任天堂很無聊, 甚至根本不知道什麼是任天堂), 但是常常被限制玩電動的時間。在電動也不能玩的情況之下, 桌上唯一的「電動」就剩下計算機了。我以前有兩台計算機, 一個按鈕很大顆按起來很爽, 另一台是太陽能工程計算機 (就是要有光才有電力), 小時候計算機陪了我很長一段時間, 生活單調無趣的我卻對那兩台計算機愛不釋手, 險些就要把它操爆了。我最愛玩的一個計算機遊戲我把它叫做「十秒一加加」, 先輸入「$1, +, +$」之後計時十秒鐘狂按「$=$」按鍵看最後的數字, 那兩台計算機的功能真的不相上下, 都曾經被我突破數字超過 100。而某年奧運的比賽階段 (應該是 1992 年巴塞隆納奧運會吧), 選手在百米衝刺之時, 這個遊戲也被我拿來變成百米挑戰賽, 在換算成一單位就是一公尺的意義下, 我變成了奧運金牌得主, 鳴槍起步之下, 經過 9.82 秒的時間就到終點一百了。

我玩計算機的遊戲不只於此, 我那時候對工程計算機上的 $\sqrt{}$ 這個按鍵情有獨鍾, 一種符號看起來有點像除法的東西, 尾巴又勾了一下覺得超好笑, 然後我那時候一直在測試一件事: 隨便按一個數字, 然後狂按 $\sqrt{}$ 按鍵, 結果最後都會變成 1, 不管怎麼試都一樣, 我那時候只是覺得這很好玩也沒多想什麼, 直到唸了更多的數學之後, 才恍然大悟我曾經用計算機驗證了以下的結果:

例 **10.** 給定實數 $a > 1$, 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$。

證明: 令 $\sqrt[n]{a} = 1 + y_n$, 其中對所有 $n \in \mathbb{N}$, $y_n > 0$, 由二項式定理 (Binomial Theorem) 得到

$$\begin{aligned} a = (1+y_n)^n &= C_0^n \cdot 1^n \cdot (y_n)^0 + C_1^n \cdot 1^{n-1} \cdot (y_n)^1 + C_2^n \cdot 1^{n-2} \cdot (y_n)^2 + \cdots + C_n^n \cdot 1^0 \cdot (y_n)^n \\ &> 1 + ny_n, \end{aligned}$$

得到 $|\sqrt[n]{a} - 1| = |y_n| < \frac{a-1}{n}$, 所以給定 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [\![\frac{a-1}{\varepsilon}]\!] + 1$, 則對所有 $n > N$, 都有 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \frac{a-1}{n} < \varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$。 □

以下的要證明的事情, 你必須花一點時間和前一個例題比較, 想一想它們之間的差異, 以及論述方法的異同。

例 **11.** 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$。

證明: 令 $\sqrt[n]{n} = 1 + y_n$, 其中對所有 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $y_n > 0$, 由二項式定理 (Binomial Theorem)

$$n = (1+y_n)^n = 1 + ny_n + \frac{n(n-1)}{2} y_n^2 + \cdots + y_n^n > \frac{n(n-1)}{2} y_n^2,$$

得到 $|\sqrt[n]{n} - 1| = |y_n| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, 所以給定 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [\![1 + \frac{2}{\varepsilon^2}]\!] + 1$, 則對所有 $n > N$, 都有 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$。 □

關於數列極限理論, 我覺得下面這個例子非常值得討論, 不僅要學會的是論證的巧思, 這個結果也很耐人尋味。

例 **12.** 假設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 令 $b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 試證 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。

同樣地, 我們要在證明之前進行一些分析: 給定 $\varepsilon > 0$, 希望找到明確的正整數 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $n > N$ 來說, $b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 滿足 $|b_n - 0| = |b_n| < \varepsilon$。可是 b_n 是 n 個數字取平均, 項數這麼多該如何控制? 這時, 把這個容許的誤差 ε 分成兩部份, 比方說 $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$。另一方面, 對於 $n > N$ 而言,

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{n} + \frac{a_{m+1} + \cdots + a_n}{n} = \mathtt{I} + \mathtt{II},$$

在這樣的拆解之下, 先觀察第 $\mathtt{II}$ 部份, 看看有沒有機會滿足 $|\mathtt{II}| < \frac{\varepsilon}{2}$。事實上是可行的, 這是因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 所以可以在某個 $m \in \mathbb{N}$ 之後都有 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, 其中 $n \geq m+1$。一旦 m 確定之後, 第 $\mathtt{I}$ 部分的分子就是一個明確的數字, 而分母 n 愈來愈大之下就能滿足 $|\mathtt{I}| < \frac{\varepsilon}{2}$。所以爲了啟動這兩個機制, 所以選取的 N 必須同時滿足這兩個條件。

大家是否有玩過密室逃脫的遊戲, 爲了要逃出密室, 你要先找到房門鑰匙, 而這個房門鑰匙是被鎖在一個保險箱內, 保險箱的四位數密碼在你們遊戲過程中分成兩組各自找到兩位數, 再想辦法理出一個順序, 然後開啟保險箱之後取出鑰匙, 最後才能逃離房間。也就是說, 完成一件事所採取的策略會有先後的順序, 這在驗證數列極限的時候也會發生。

證明: 給定任何 $\varepsilon > 0$, 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 所以存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > m$ 都有 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$。此時, 對於 $n > m$, 觀察數列

$$\begin{aligned} |b_n| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} |a_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \\ &< \frac{mM}{n} + \frac{n-m}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{mM}{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

其中 $M = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_m|)$。對於任何 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \max(m, [\![\frac{2mM}{\varepsilon}]\!] + 1)$, 則對所有 $n > N$, 都有

$$|b_n| < \frac{mM}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。 □

關於數列的定義, 應再強調以下兩件事情:

(A) 數列極限存在 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 與以下敘述等價:「對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 時, 都有 $|a_n - L| < M\varepsilon$, 其中 M 是一個與 n 無關的正數。」

(B) 數列極限存在 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 與以下敘述等價:「對任意 $0 < \varepsilon < 1$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 時, 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$。」

前面的討論都是關於無窮數列收斂的情況, 現在要討論發散數列的語法及例子。所謂的發散數列, 表示任何實數都不是數列的極限值, 若用精確定義表述, 就是對任何的 $L \in \mathbb{R}$,

「對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $n > N$, 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$。」不成立

$\Leftrightarrow$ 「存在 $\varepsilon_0 > 0$, 對所有 $N \in \mathbb{N}$ 都存在 $n_0 > N$ 使得 $|a_{n_0} - L| \geq \varepsilon_0$。」成立

寫出否定敘述沒有很困難, 原則上就是把任意換成存在, 把存在換成任意, 然後不等式用三一律改掉。

例 **13.** 證明無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。

解**.** 給定 $L \in \mathbb{R}$, 分以下兩種情況討論:

(a) 若 $L \geq 0$, 取 $\varepsilon_0 = 1$, 對所有 $N \in \mathbb{N}$, 取 $n_0 = 2N + 1$, 則

$$|a_{n_0} - L| = L - a_{n_0} = L - (-1) = L + 1 \geq 1。$$

(b) 若 $L < 0$, 取 $\varepsilon_0 = 1$, 對所有 $N \in \mathbb{N}$, 取 $n_0 = 2N$, 則

$$|a_{n_0} - L| = a_{n_0} - L = 1 - L \geq 1。$$

所以無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。

注意到例題中的 ε 可以取小一點, 比方說 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ 也行, 只要找到正數滿足條件即可 (存在性)。

這一節的最後想要用幾何的觀點來闡述無窮數列的收斂與發散。對於無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 假設 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, 給定 $\varepsilon > 0$ 之後, 我們觀察 $a_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ 與 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 的關係:

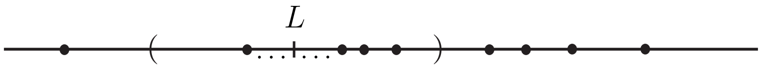

圖 2.1: 收斂的數列, 對任何 $\varepsilon > 0$, 在 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 外面的項最多只有有限多個。

因爲存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 時都有 $|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$, 所以在 a_N 之後的所有項全部都落在區間 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 內。換言之, 在區間 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 外的項只有有限多項。所以我們會有以下結論:

(A) 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂於 L 等價於: 以 L 爲中心, 任意的半徑 $\varepsilon > 0$ 之下, 在 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 外的項只有有限多項。

(B) 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散等價於: 任何 $L \in \mathbb{R}$, 總是存在 $\varepsilon > 0$ 使得在 $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ 外的項有無限多項。

各位可以把西遊記故事與數列收斂的情況做一個類比, 用 a_n 比喻成孫悟空在翻筋斗雲的動態, 孫悟空不論翻了多少個筋斗雲 (a_n 隨著 n 一直在數線上動來動去), 終究逃不出如來佛的手掌心 (a_n 終究會掉到 $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ 的範圍內)。至於什麼樣的情境比較像是數列發散的情況呢? 比方說你坐在教室中聽著老師講著枯燥無味的課程, 每一次上課都無法全神貫注地聽講, 也就是說每一次上課, 總是會有一個時刻恍神而分心之下, 你的思緒就有如發散的數列般總是飄走無法聚焦。

2.2 收斂數列的性質

這一節的目標是要證明收斂數列的基本性質。

定理 1. 若無窮數數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 則極限值唯一。

證明: 利用反證法。假設數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂於兩相異的值 L 與 M, 也就是說, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$ 且 $L \neq M$。不妨設 $L < M$, 則有 $L < \frac{L+M}{2} < M$。取 $\varepsilon = \frac{M-L}{2} > 0$,

(A) 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 所以存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_1$, 都有 $|a_n - L| < \frac{M-L}{2}$, 得到 $a_n < L + \frac{M-L}{2} = \frac{L+M}{2}$。

(B) 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$, 所以存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_2$, 都有 $|a_n - M| < \frac{M-L}{2}$, 得到 $\frac{L+M}{2} = M - \frac{M-L}{2} < a_n$。

令 $N = \max(N_1, N_2)$, 則對所有 $n > N$, 都有 $a_n > \frac{L+M}{2}$ 且 $a_n < \frac{L+M}{2}$ 矛盾, 所以無窮數數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 若收斂, 則極限值唯一。 $\square$

定理 2. 若有兩個收斂數列 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ 且 $L < M$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$, 不等式 $a_n < b_n$ 成立。

證明: 考慮正數 $\varepsilon < \frac{M-L}{2}$, 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 所以對於這個 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_1$, 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$; 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, 所以對於這個 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_2$, 都有 $|b_n - M| < \varepsilon$。考慮 $N = \max(N_1, N_2)$, 則對所有 $n > N$, 都有

$$
\begin{aligned}
|a_n - L| < \varepsilon &\Rightarrow L - \varepsilon < \underline{a_n < L + \varepsilon} \\
|b_n - M| < \varepsilon &\Rightarrow \underline{M - \varepsilon < b_n} < M + \varepsilon,
\end{aligned}
$$

所以

$$
a_n < L + \varepsilon < L + \left(\frac{M-L}{2}\right) = \frac{L+M}{2} = M - \left(\frac{M-L}{2}\right) < M - \varepsilon < b_n。
$$

$\square$

定理 3. 若有兩個收斂數列 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, 並且存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $n > N$, 不等式 $a_n < b_n$ 都成立, 則 $L \leq M$。

證明: 利用反證法。假設 $L > M$, 則由 定理 **2** 得知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $n > N$, 不等式 $a_n > b_n$ 成立, 這與前提矛盾。因此 $L \leq M$。 □

這兩個定理中有個小細節必須注意。關於 定理 **2** 的條件如果改成 $L \leq M$ 帶有等號的話, 結論有可能不對, 例如 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{(-1)^n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 而 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\}_{n=1}^{\infty}$。而 定理 **3** 的前提雖然 $a_n < b_n$ 不帶等號, 然而結論 $L \leq M$ 的等號可能會成立, 例如 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。

關於 定理 **2**, 它是在說明由極限值的大小推論出兩個數列在某一項之後的關係。而 定理 **3** 則是反過來, 如果知道兩個數列在某一項之後的關係, 可以推論出極限值的關係。

以下推論基本上是 定理 **2** 的特例, 而 定理 **5** 則是 定理 **3** 的應用。

推論 4.

(a) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 且 $L > M$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$, 都有 $a_n > M$。

(b) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 且 $L < M$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$, 都有 $a_n < M$。

證明: 考慮數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $b_n \equiv M$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, 由 定理 **2** 得知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$, 不等式 $a_n > b_n = M$ 都成立。 □

定理 5 (夾擠定理, Squeeze Theorem)**.** 考慮三個數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, 若存在 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_0$, 都有 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 並且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$。

證明: 給定任意正數 $\varepsilon > 0$, 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_1$, 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_2$, 都有 $|c_n - L| < \varepsilon$。取 $N = \max(N_0, N_1, N_2)$, 則有

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$。 □

在夾擠定理的建立之後將帶來很多好處, 當一個數列非常複雜的時候, 可以試著找尋比這個數列還要大與比較小的另外兩個數列, 這兩個數列相對單純而容易討論其極限, 只要這兩個極限也相等, 那麼夾在中間的數列極限也隨之確定。

例 6. 試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2}$。

解. 因爲

$$0 < \frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{n+2}{(n+1)^2 - 1} = \frac{n+2}{(n+2)n} = \frac{1}{n}$$

而且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, 故由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0$。

回想第 1 章曾經提到集合有上界或有下界, 將這個概念用到數列上就有所謂有界數列的意思。

定義 **7.** 若存在兩實數 m 與 M 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $m \leq a_n \leq M$, 則稱 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 有界數列 (bounded sequence)。此時 m 稱爲數列的一個 下界 (lower bound), 而 M 稱爲數列的一個 上界 (upper bound)。

以下兩件事應該容易理解的:

(a) 若數列有界, 則上界、下界不唯一。

(b) 有界數列等價於: 若存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n| \leq M$。

定理 **8.** 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 則數列有界。

證明: 假設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 則考慮 $\varepsilon = 1$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有的 $n > N$ 都有

$$|a_n - L| < 1 \Rightarrow L - 1 < a_n < L + 1 \Rightarrow |a_n| < \max(|L-1|, |L+1|),$$

令 $M = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |L-1|, |L+1|)$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$ 必有 $|a_n| \leq M$, 所以數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界。 □

定理 **9** (極限的四則運算)**.** 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 則

(a) 數列 $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 並且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(b) 數列 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 並且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

(c) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, 則數列 $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 並且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$。

證明: 假設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$。

(a) 給定任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_1$, 都有 $|a_n - L_1| < \varepsilon$; 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_2$, 都有 $|b_n - L_2| < \varepsilon$。取 $N = \max(N_1, N_2)$, 則對所有 $n > N$, 利用三角不等式, 得到

$$\begin{aligned} &|(a_n \pm b_n) - (L_1 \pm L_2)| = |(a_n - L_1) + (\pm(b_n - L_2))| \\ \leq\ &|a_n - L_1| + |\pm(b_n - L_2)| = |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L_1 + L_2 = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n。$$

(b) 因為數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 所以數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 即存在 M 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n| \leq M$。給定 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_1$, 都有 $|a_n - L_1| < \varepsilon$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_2$, 都有 $|b_n - L_2| < \varepsilon$。

取 $N = \max(N_1, N_2)$, 則對所有 $n > N$, 都有

$$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - L_1 \cdot L_2| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot L_2 + a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| \\ &\leq |a_n \cdot b_n - a_n \cdot L_2| + |a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| \\ &= |a_n(b_n - L_2)| + |(a_n - L_1)L_2| \\ &= |a_n||b_n - L_2| + |a_n - L_1||L_2| \\ &\leq M\varepsilon + \varepsilon|L_2| = (M + |L_2|)\varepsilon,\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = L_1 \cdot L_2 = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n。$$

(c) 給定 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_1$, 都有 $|a_n - L_1| < \varepsilon$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_2$, 都有 $|b_n - L_2| < \varepsilon$。

因為 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2 \neq 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \cdot L_2 = L_2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = (L_2)^2 > \frac{(L_2)^2}{2}$, 存在 $N_3 \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N_3$ 都有 $b_n \cdot L_2 > \frac{(L_2)^2}{2}$。

取 $N = \max(N_1, N_2, N_3)$, 則對所有 $n > N$, 都有

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \left|\frac{a_n \cdot L_2 - b_n \cdot L_1}{b_n \cdot L_2}\right| = \left|\frac{a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot L_2 - b_n \cdot L_1}{b_n \cdot L_2}\right| \\ &\leq \frac{|a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| + |L_1 \cdot L_2 - b_n \cdot L_1|}{|b_n \cdot L_2|} \\ &\leq \frac{|a_n - L_1||L_2| + |b_n - L_2||L_1|}{|b_n \cdot L_2|} < \frac{|L_2|\varepsilon + |L_1|\varepsilon}{\frac{(L_2)^2}{2}} = \frac{2(|L_1| + |L_2|)}{(L_2)^2}\varepsilon,\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}。$$

□

極限四則運算的建立對日後處理複雜的數列極限時帶來很大的便利。使用極限四則運算時, 必須確定每一個拆開後的數列都收斂, 而且在分母的部份<u>整體來說</u>極限值不能為 0 的情形之下, 就可以順勢地使用四則運算。而數學歸納法 (Mathematical Induction) 原理得知極限的四則運算可適用於任何有限項加減乘除之拆解。

回想單元 2.1 當中的 例 **10** 曾經介紹按計算機的故事, 那時候證明了對於 $a > 1$, 不斷地開根號之下, 數字會愈來愈接近 1。以下要證明的是: 其實這個現象對任何的正數都有這個結果。

例 **10.** 對於正數 $a>0$, 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

解**.**

(a) <u>若 $a>1$</u>, 則由前一節的 例 **10** 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

(b) <u>若 $a=1$</u>, 則 $\sqrt[n]{a}\equiv 1$, 由前一節的 例 **3** 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

(c) <u>若 $a<1$</u>, 則 $\frac{1}{a}>1$, 由極限的四則運算得知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1。$$

例 **11.** 給定正數 $a_1,a_2,\ldots,a_k$, 試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$。

解**.** 記 $A=\max(a_1,a_2,\ldots,a_k)$, 因爲

$$A^n<a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n<k\cdot A^n\Rightarrow A<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}<\sqrt[n]{k}\cdot A,$$

而且 $\lim\limits_{n\to\infty}A=A$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}\cdot A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}A=1\cdot A=A$, 故由夾擠定理得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max(a_1,a_2,\ldots,a_k)$。

2.3 單調數列理論

前一節介紹的是一般數列的基本性質, 這一節要討論一類比較特別的數列: 單調數列的理論。

定義 **1.** 設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個無窮數列。

(a) 若對所有 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $a_n\le a_{n+1}$, 則稱數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *遞增的* (increasing)。

(b) 若對所有 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $a_n<a_{n+1}$, 則稱數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *嚴格遞增的* (strictly increasing)。

(c) 若對所有 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $a_n\ge a_{n+1}$, 則稱數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *遞減的* (decreasing)。

(d) 若對所有 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $a_n>a_{n+1}$, 則稱數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *嚴格遞減的* (strictly decreasing)。

(e) 一個數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *單調的* (monotonic) 如果數列是遞增的或是遞減的。

介紹完遞增與遞減的概念後, 再配合前一小節提到有界的概念, 這裡要介紹一個定理:

定理 **2** (單調有界定理, Monotonic Sequence Theorem)**.** *單調有界的數列必收斂。換言之, 遞增有上界的數列必收斂; 遞減有下界的數列必收斂。*

關於這個定理的證明與實數的完備性有關, 我們留到第 3 章再好好闡述, 屆時會將所有與實數完備性有關的定理一併介紹。先接受這個定理之下, 這裡要花一些時間介紹歐拉數 (Euler number) e。

例 **3.** 考慮無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$, 證明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞增有上界, 所以數列收斂, 將極限值記爲 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}$, 稱爲 歐拉數 (Euler number)。

證明: 由二項式定理 (Binomial Theorem) 得知:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_0^n\cdot 1^n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_1^n\cdot 1^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \cdots + C_n^n\cdot 1^0\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+ \\
&\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\cdots+ \\
&\quad +\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = a_{n+1},
\end{aligned}
$$

所以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是嚴格遞增的。另一方面, 由上述的討論再稍做修改, 得到

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+ \\
&\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(k-1)k}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} \\
&= 2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 3-\frac{1}{n} < 3,
\end{aligned}
$$

所以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界。故由單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在。 $\square$

2.4 子數列理論

定義 **1.** 給定無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 而 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 是一個嚴格遞增的正整數數列, 則

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\}_{k=1}^{\infty}$$

稱爲無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 子數列 (subsequence)。

關於 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 這個記號有雙重的意義, 看成 $\{(a_n)_k\}_{k=1}^{\infty}$ 時將強調它是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的繼承者, 並反應這是子數列的第 k 項; 而看成 $\{a_{(n_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 則是強調 (n_k) 這個正整數, 然後反應子數列的第 k 項對應到原數列的第 $a_{(n_k)}$ 項。

無窮數列與其子數列之間有許多微妙的關係, 很值得仔細討論。當面對一個很複雜的數列不知如何處理時, 有時會先觀察子數列的行爲, 這是因爲子數列表示我們選擇性忽略一些項, 只看某些項的行爲, 在得知數列的一部份有某些現象時, 希望可以反推原數列的行爲。以下幾個定理就是在說明原數列與其子數列之間的關係。

定理 **2.** 若無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂於 L, 則它的任何子數列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 也收斂於 L。

證明: 對任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$。取 $K = N$, 則對於子數列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 來說, 對所有 $k > K$, 因為 $n_k \geq k > K = N$, 所以 $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$。 □

定理 **3.** 無窮數列收斂等價於它的任何子數列都收斂。

證明: $(\Rightarrow)$ 這是 定理 **2** 的結果。$(\Leftarrow)$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 本身也是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一個子數列, 故結論成立。 □

定理 **4.** 無窮數列若有一個子數列發散, 或是有兩個子數列收斂但極限值不同, 則無窮數列發散。

證明: 這是 定理 **2** 否逆命題的敘述。 □

定理 **5.** 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂等價於奇數項子數列 $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ 與偶數項子數列 $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收斂並且極限值相同。

證明: $(\Rightarrow)$ 這是 定理 **2** 的結果。$(\Leftarrow)$ 記 $b_n = a_{2n-1}, c_n = a_{2n}, \{a_m\}_{m=1}^{\infty} = \{b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots\}$。若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = L$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = L$, 給定 $\varepsilon > 0$, 則存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $n > N_1$ 都有 $|b_n - L| = |a_{2n-1} - L| < \varepsilon$, 也存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得 $n > N_2$ 都有 $|c_n - L| = |a_{2n} - L| < \varepsilon$。則對於數列 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ 而言 (此時指標的記號換成 m 以避免混淆), 給定 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \max(N_1, N_2)$, 當 $m > 2N$, 則 $|a_m - L| < \varepsilon$, 因此無窮數列 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ 收斂 。 □

2.5 無窮小與無窮大

在數列的理論或是往後的函數理論中, 無窮小與無窮大這兩個觀念及其理論是相當重要的, 這套原則若能確實掌握, 對於數學分析能力基本上就已打通任督二脈。當中的一些想法在日後的分析基礎上能有相對直觀的方式看待之, 也容易依據這個原則掌握大致的現象。

定義 **1.**

(a) 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂且極限值為 0, 也就是說, 對任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $|a_n| < \varepsilon$, 則稱 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 為 無窮小數列 (infinitely small sequence)。

(b) 設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個數列, 如果對任意正數 $M > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $|a_n| > M$, 則稱 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 為 無窮大數列 (infinitely large sequence)。

我們可再細分無窮大數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的行為: 若有 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $a_n > 0$, 我們說這個無窮大數列是 發散至正無窮大 (divergent to positive infinity), 此時以記號 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ 表達這個概念。相應地也有 發散至負無窮大 (divergent to negative infinity) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 的概念, 它表示一個無窮大數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $a_n < 0$。在後續的討論, 通常都會先以發散至正無窮大的數列為主體, 而發散至負無窮大的論述都可以同理推得。

首先我們要說明的是無窮小數列與無窮大數列在倒數的意義下是一體的兩面。

定理 **2.**

(a) 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮大數列, 則 $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列。

(b) 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列, 並且 $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, 則 $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮大數列。

證明:

(a) 因爲 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮大數列, 給定任意 $M > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $|a_n| > M$。對任意 $\varepsilon > 0$, 找 $M = \frac{1}{\varepsilon}$ 之後, 因爲存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $|a_n| > M = \frac{1}{\varepsilon}$, 所以 $|\frac{1}{a_n}| < \varepsilon$, 因此 $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列。

(b) 因爲 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列而且 $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, 給定任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $0 < |a_n| < \varepsilon$。對任意 $M > 0$, 找 $\varepsilon = \frac{1}{M}$ 之後, 因爲存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $0 < |a_n| < \varepsilon$, 所以 $|\frac{1}{a_n}| > \frac{1}{\varepsilon} = M$, 因此 $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮大數列。

□

至此我們可以完成等比數列 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ 所有情況的討論:

例 **3.** 關於等比數列 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$,

(a) 若 $|r| < 1$, 則 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲無窮小數列。

(b) 若 $r = 1$, 則 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 極限值爲 1。

(c) 若 $r = -1$, 則 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散。

(d) 若 $|r| > 1$, 則 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲無窮大數列。

證明:

(a) 這是單元 2.1 例 **7** 或 例 **9** 的結果。

(b) 這是單元 2.1 例 **3** 的結果。

(c) 因爲奇數項子數列 $\{-1, -1, \ldots, -1, \ldots\}$ 的極限值爲 -1, 而偶數項子數列 $\{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ 的極限值爲 1, 由單元 2.4 的 定理 **4** 得知數列發散。

(d) 利用本單元 定理 **2** 搭配上述 (a) 的情況 (取倒數) 可得證。

□

各位不妨拿起手上的電動玩具 — 計算機 (手機的內建計算機功能也行), 先隨便按一個數字, 再按「×、×」之後狂按「=」按鍵, 觀察數字的變化, 看看其結果是否如上面所述一致。

以下將觀察一個無窮小數列的現象:

定理 4. 如果數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列, 則 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是無窮小數列。

證明: 因爲 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 所以存在正數 M 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n| < M$, 而 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列告知: 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $|b_n| < \varepsilon$。由此得知: 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有 $|a_n \cdot b_n| < M \cdot \varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$ 得到 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列。 □

注意到極限四則運算的使用時機必須是在拆項之後的每一個數列都收斂的時候才能使用。像上述例子, 由於 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 只是有界, 它不見得是收斂的數列, 比方說 $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 即爲一例, 所以 定理 4 是不能用極限的四則運算處理它。

此外, 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列而數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮大數列時, 欲探討 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的行爲也是無法利用極限的四則運算而得。事實上, 其結果各種情況都可能發生, 比方說:

(A) 考慮 $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$, 則 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ 爲收斂的數列。

(B) 考慮 $\{a_n\} = \{\frac{1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$, 則 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮小數列。

(C) 考慮 $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$, 則 $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無窮大數列。

像這類的極限問題, 數學上稱爲 不定型 (indeterminate form)。這裡所舉的三個例子都叫做 $0 \cdot \infty$ 的不定型。不定型還有很多種類 (總共有七種), 在往後遇到極限問題時, 不定型的情況是很常見的, 所以我們會在後面的章節花很多篇幅探討在什麼條件之下的不定型會歸結到什麼結論。

這節的另一個目標是要建立 等級 或 量級 (order) 的概念。首先我們用兩個例子觀察數列的行爲:

例 5. 比較數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n\}_{n=1}^{\infty}$。

解. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$, 而且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2。$$

上面的例子告訴我們: 雖然兩個數列 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ 都發散至正無窮大, 但是他們趨於無窮大的行爲是一致的; 也就是說, 我們會把上述的現象看成是 $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ 趨於無窮大與 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 趨於無窮大的比值爲 2。

例 6. 比較數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$。

解. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$, 而且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty。 \tag{2}$$

上面的數學式告訴我們: 雖然兩個數列 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ 都發散至正無窮大, 但是兩數列趨於無窮大的行爲有等級或程度上的差別; 也就是說, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ 趨於無窮大比 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 趨於無窮大還要快, 這是 (2) 要傳達的意義。

從以上兩個例子, 各位應該可以體會到, 我們研究數列除了會了解單一數列的行爲以外, 有時還會去比較不同數列之間是否有等級的區別。關於等級的意思, 現在就給予明確的數學定義:

定義 **7.**

(a) 若兩數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$, 則稱 b_n 比 a_n 而言等級更大, 或是說 b_n 對於 a_n 而言是 高階的無窮大量 (higher order infinity), 記號上用 $a_n \ll b_n, n \to \infty$ 表示。

(b) 若兩數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L$, 則稱 b_n 與 a_n 有相同的等級, 或是說 b_n 對於 a_n 而言是 等量的無窮大量 (equal infinity), 記號上用 $a_n \sim b_n, n \to \infty$ 表示。

注意到我們可以用 定理 **2** 將檢驗的條件改成 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ 或是 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L'$ 以得知兩個無窮大量之間的等級。等級或量級的概念在很多實際應用上非常重要, 例如資訊工程中演算法必須考量到該程式的執行效率, 而效率的高與低就是依據量時間級的大或小來判定。

在數學上, 幾個基本數列之等級關係如下:

$$c \ll \ln n \ll n^k (k > 0) \ll a^n (a > 1) \ll n! \ll n^n, \quad 當\ n \to \infty \tag{3}$$

若以無窮小量的觀點看事情時, 會有以下高階無窮小量的列表:

$$\frac{1}{c} \gg \frac{1}{\ln n} \gg \frac{1}{n^k}(k > 0) \gg \frac{1}{a^n}(a > 1) \gg \frac{1}{n!} \gg \frac{1}{n^n}, \quad 當\ n \to \infty$$

各位在初學等級理論的時候, 不妨先把無窮大量的等級關係弄清楚, 就如前所述, 無窮大量與無窮小量只是一體的兩面, 之後遇到無窮小量的問題時, 再順勢地翻譯而熟悉之。所以接下來的討論, 我們將以無窮大量這個體系仔細認識等級這個概念。

關於式子 (3) 的列表, 這裡先建立 $n^k (k > 0) \ll a^n (a > 1) \ll n! \ll n^n$, 和對數函數 $\ln n$ 有關的等級, 我們到對數函數的性質討論完畢之後再補齊論述。倒是這個結論相當重要, 可先記住: 對數數列 $\ln n$ 當 $n \to \infty$ 時是無窮大數列, 但是它比任何的 冪次數列 (power sequence) n^k 等級來得低 (這裡的 k 可以是正實數, 當 k 是正整數的時候稱爲 多項式數列 (polynomial sequence))。而列表的最左式 c 表示有界數列。

例 **8.** 試證: 當 $n \to \infty$ 時, $n! \ll n^n$。

解**.** 對所有 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, 故由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, 也就是說, 當 $n \to \infty$ 時, $n! \ll n^n$。

例 **9.** 給定 $a>1$, 試證: 當 $n\to\infty$ 時, $a^n \ll n!$。

證明: 取 $N_0 = 2([\![a]\!]+1)$, 則當 $n>N_0$ 時

$$0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{n}\cdots\frac{a}{N_0+1}\cdot\frac{a}{N_0}\cdots\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{1}<\frac{1}{2^{n-N_0}}\cdot\frac{a^{N_0}}{(N_0)!},$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-N_0}}=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$, 所以由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$, 即 $a^n\ll n!$。 □

例 **10.** 給定 $a>1, k>0$, 試證: 當 $n\to\infty$ 時, $n^k\ll a^n$。

證明: 記 $a=1+a_0$, 則 $a_0>0$。當 $n>2$ 時, $n-1>\frac{n}{2}$, 由二項式定理 (Binomial Theorem), 得到

$$a^n=(1+a_0)^n=\sum_{i=0}^{n}C_i^n\cdot 1^{n-i}\cdot a_0^i>C_2^n a_0^2=\frac{n(n-1)}{2}a_0^2>\frac{n^2}{4}a_0^2=\frac{n^2}{4}(a-1)^2。$$

現分成兩種情況討論:

(a) <u>若 $k=1$</u>, 則

$$0<\frac{n^k}{a^n}=\frac{n}{a^n}<\frac{4n}{n^2(a-1)^2}=\frac{4}{n(a-1)^2}$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n(a-1)^2}=0$, 所以由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$, 即 $n\ll a^n$。

(b) <u>若 $k>0, k\neq 1$</u>, 則

$$\frac{n^k}{a^n}=\left(\frac{n}{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}\right)^k,$$

因爲 $a^{\frac{1}{k}}>1$, 由 (a) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$, 即 $n^k\ll a^n$。

□