微分幾何(二) 課程學習單 活動 12

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 大域版本的高斯 – 伯內定理。

☐ 曲面上向量場的奇異點指標與高斯 – 伯內定理的關係。

2 預備知識

討論 1.

(A) 平面上的多邊形有什麼不變量? 邊、角的個數。

(B) 世上的正多面體有幾種?

(C) 球面與輪胎面的 歐拉示性數 (Euler characteristic number) 分別爲何?

解.

3 三角劃分

定義 2 (第 275 頁)**.**

(a) 一個簡單區域若只有三個頂點並且其外角 $\boldsymbol{\alpha}_i \neq 0, i = 1, 2, 3$, 稱此區域爲 三角形 (triangle)。

(b) 一個正則區域 $R \subset S$ 的 三角劃分 (triangulation) 指的是一族三角形 $\{T_i\}_{i=1}^n$ (有限個) 使得

(b1) $\cup_{i=1}^n T_i = R$。

(b2) 若 $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, 則 $T_i \cap T_j$ 只能是 T_i 與 T_j 的公共邊或公共頂點。

命題 3 (第 275 頁)**.** 每一個正則曲面上的正則區域必有一個三角劃分。

4 大域版本的高斯 – 伯內定理

定理 4 (高斯 – 伯內定理 (大域版本), 第 277 頁)**.** 令 $R \subset S$ 是一個可定向曲線的一個正則區域, 將 R 的邊界 ∂R 用 $C_1, \ldots, C_n$ 表示, 其中每個 C_i 都是簡單、封閉、片段正則曲線, 並且都給予正的定向。記 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ 爲所有曲線 $C_1, \ldots, C_n$ 的外角, 則

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R K\,\mathrm{d}\theta + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi\chi(R),$$

其中 s 是弧長參數, k_g 表示曲線 C_i 的測地曲率, K 是曲面的高斯曲率。

證明: 考慮 R 的一個三角劃分, 並要求每個三角形 T_j 包含於一個與 S 定向相容的等溫參數式之坐標鄰域內。如此設定在相鄰的兩個三角形之公共邊, 其定向相反。

對於每個小角形, 利用局部版本的高斯 – 伯內定理, 並做相加, 得到

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R K\,\mathrm{d}\sigma + \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi F, \tag{1}$$

其中 F 表示三角形的個數, 而 $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$ 是三角形 T_j 的外角。

若將外角的資訊轉變成內角的形式, 則有 $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$, 所以

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 (\pi - \varphi_{jk}) = 3\pi F - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk}。$$

接下來引進以下記號:

用 E_{ext} 表示三角劃分時的外部的邊的個數。

用 E_{int} 表示三角劃分時的內部的邊的個數。

用 V_{ext} 表示三角劃分時的外部的頂點的個數。

用 V_{int} 表示三角劃分時的內部的頂點的個數。

因爲曲線 $\cup_{i=1}^n C_i$ 形成封閉曲線, 所以 $E_{\text{ext}} = V_{\text{ext}}$。此外, 邊的個數滿足 $3F = 2E_{\text{int}} + E_{\text{ext}}$。所以

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi E_{\text{int}} + \pi E_{\text{ext}} - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk}$$

現將外部的頂點個數再分成兩類, 寫成 $V_{\text{ext}} = V_{\text{ext;cur}} + V_{\text{ext;tri}}$, 其中 $V_{\text{ext;cur}}$ 是外部的邊而且是曲線 C_i 的頂點之個數, 而 $V_{\text{ext;tri}}$ 是外部的邊而非曲線 C_i 的頂點 (來自於三角劃分) 之個數。因爲 $\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk}$ 代表所有三角形的內角總和, 而內部頂點的內角和爲 2π, 所以

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} = 2\pi \cdot V_{\text{int}} + \sum_{i=1}^n (\pi - \theta_i) + \pi \cdot V_{\text{ext;tri}},$$

於是

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} &= 2\pi E_{\text{int}} + \pi E_{\text{ext}} - \left(2\pi \cdot V_{\text{int}} + \sum_{i=1}^n (\pi - \theta_i) + \pi \cdot V_{\text{ext;tri}} \right) \\
&= 2\pi E_{\text{int}} + 2\pi E_{\text{ext}} - \pi E_{\text{ext}} - 2\pi \cdot V_{\text{int}} - \pi \cdot V_{\text{ext;cur}} + \sum_{i=1}^n \theta_i - \pi \cdot V_{\text{ext;tri}} \\
&= 2\pi E_{\text{int}} + 2\pi E_{\text{ext}} - \pi V_{\text{ext}} - 2\pi \cdot V_{\text{int}} - \pi \cdot V_{\text{ext;cur}} + \sum_{i=1}^n \theta_i - \pi \cdot V_{\text{ext;tri}} \\
&= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{i=1}^n \theta_i,
\end{aligned}$$

將上式代入 (1) 得到

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R K\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi F - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi F - 2\pi E + 2\pi V - \sum_{i=1}^n \theta_i$$

也就是

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R K\,\mathrm{d}\sigma + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi(V - E + F) = 2\pi\chi(R)。$$

推論 5. 記 S 是可定向的緊緻 (compact=closed without boundary) 曲面。則

$$\iint_S K\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi\chi(S)。$$

(a) 如果緊緻曲面同胚於球, 則 $\iint_S K\,\mathrm{d}\sigma = \underline{\qquad\qquad}$。

(b) 如果緊緻曲面同胚於輪胎面, 則 $\iint_S K\,\mathrm{d}\sigma = \underline{\qquad\qquad}$。

定義 6. 對於一個緊緻曲面來說, $\iint_S K\,\mathrm{d}\sigma$ 稱為 全曲率 (total curvature)。

例題 7 (第 280 頁)**.** 想一想以下敘述是否正確?

(A1) 一個緊緻曲面 S, 若它同胚於球 (sphere), 則 S 上的每一點之高斯曲率都大於零? ________

(A2) 一個緊緻曲面 S, 若處處高斯曲率為正, 那麼它一定同胚於球 (sphere)? ________

(A3) 一個緊緻曲面 S, 若處處高斯曲率都小於等於零, 那麼它不可能同胚於球 (sphere)? ________

(A4) 標準球上的任兩條測地線 (無限延伸) 必相交。________

(A5) 一個可定向曲面 S, 若高斯曲率處處小於等於零, 則從 $p \in S$ 出發的任兩條測地線若在另一處相交, 則這兩條測地線無法圍出一個簡單區域。________

(A6) 一個可定向曲面 S, 若高斯曲率處處小於等於零, 則不存在以簡單區域為邊界的簡單封閉的測地線。________

(A7) 正曲率曲面上的測地三角形內角和 ________; 負曲率曲面上的測地三角形內角和 ________。

5 向量場奇異點的討論

定義 8 (第 283 頁)**.** 令 $\mathbf{v}$ 是可定向曲面 S 上的可微分向量場。若 $\mathbf{v}(p) = \mathbf{0}$, 我們稱 p 是向量場 $\mathbf{v}$ 的 奇異點 (singular point)。對於奇異點 p, 若存在 p 的一鄰域 $V \subset S$ 使得在 V 當中沒有其它的奇異點, 則稱 p 為 孤立的 (isolated) 奇異點。定義奇異點的 指標 (index) I 為滿足 $2\pi I = \int_0^l \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$ 的整數。

例題 9 (第 285 頁)**.** 畫出指標為 $I = 1, -1, 3$ 的向量場 (軌線)。

解.

定理 10 (第 286 頁, 龐加萊定理 Poincaré Theorem)**.** 在緊緻曲面 S 上的可微分向量場之奇異點指標總和等於 S 的歐拉示性數。

例題 11. 髮漩的存在性。