

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

- ☐ 高斯 – 伯內定理 (Gauss Bonnet Theorem) 的認識。
- ☐ 高斯曲率的另一個解釋。

2 預備知識

討論 1. 試與伙伴討論以下問題:

(A0) 何謂 格林定理 (Green's Theorem)?

(A2) 平面上的多邊形有什麼是不變量?

(A3) 從地球的北極往東經零度的經線往南走到赤道, 再沿著赤道往東走到東經九十度的地方, 再沿著東經九十度的經線往北走到北極, 這樣繞了一圈之下, 總共轉了多少角度?

解.

3 外角的定義

定義 2 (第 268 頁). 給定正則曲面 S 上的曲線 α , 我們說滿足以下條件的 $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ 是一條簡單、封閉、片段正則 (simple, closed, piecewise regular) 的參數曲線:

- (a) $\alpha(0) = \alpha(l)$. (封閉)
- (b) 對所有 $t' \neq t'', t', t'' \in [0, l]$ 都有 $\alpha(t') \neq \alpha(t'')$. (簡單)
- (c) 存在 $[0, l]$ 的一種分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = l$ 使得 $\alpha|_{(t_i, t_{i+1})}, i = 0, 1, \dots, n-1$ 是正則曲線。(換言之, 曲線上只有有限個點無法定義切線。) (片段正則)

而 $\alpha(t_i), i = 0, 1, \dots, n-1$ 稱為曲線 α 的頂點 (vertices)。

對於每個頂點, 考慮 $\alpha'_-(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t)$ 與 $\alpha'_+(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t)$, 這兩個向量都落在 $T_{\alpha(t_i)}S$ 上, 現在要定義有向外角 (signed external angle): 令 $|\theta_i|, 0 < |\theta_i| \leq \pi$ 是 $\alpha'_-(t_i)$ 與 $\alpha'_+(t_i)$ 之間的夾角大小, 賦予符號的方式是透過行列式 $\det(\alpha'_-(t_i), \alpha'_+(t_i), \mathbf{N}(t_i))$ 的正負號決定。

現在有兩種情況要討論, 根據 $|\theta| \neq \pi$ 與 $|\theta| = \pi$ 觀察:

- (1) 若 $|\theta| \neq \pi$, 如圖所示:
- (2) 若 $|\theta| = \pi$, 稱頂點是具有尖角 (cusp) 的形狀, 由連續性得知存在 δ 使得 $\det(\alpha'_-(t_i - \delta), \alpha'_+(t_i + \delta), \mathbf{N}(t_i))$ 不會改變其符號, 以此決定其正負號。

例題 3. 與伙伴討論以下情況每個外角的正負號。

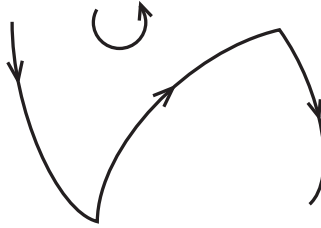


圖 1: 確定每一個有向外角。



圖 2: 確定每一個有向外角。

現在對於我們要討論的幾何物件整理如下：

- (a) 令 $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbf{x}(U) \rightarrow S$ 是簡單、封閉、片段正則之參數曲線，其頂點記為 $\alpha(t_i)$ ，而有向外角記為 $\theta_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ 。
- (b) 令 $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ 是從 $\mathbf{x}_u$ 到 $\alpha'(t)$ 之正向角，它是可微分函數。

上學期的課程中曾經介紹光滑曲線的切線旋轉定理，這個定理在片段光滑的曲線的情況下有以下結論：

定理 4 (切線旋轉定理 (Theorem of turning tangents, 第 270 頁)). 由上述設定，則有

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = \pm 2\pi,$$

其中右式的正負號取決於 α 的定向。

在介紹局部版本的高斯–伯內定理之前，我們還需要以下的術語。

- (a) 記 S 是一個可定向的曲面，區域 $R \subset S$ 稱為簡單區域 (simple region)：如果 R 與某個圓盤 (disk) 同胚 (homeomorphic)，而 R 的邊界 (記為 ∂R) 是一條簡單、封閉、片段正則的參數曲線之軌跡。
- (b) 我們說 α 具有正的定向 (positive oriented)：如果對每個 $\alpha(t)$ 而言，在光滑的區段上，其正向的正交基底 $\{\alpha'(t), h(t)\}$ 都滿足 $h(t)$ 都指向區域 R 的內部。
- (c) 上述的說法，可以用數學的語言再描述之：任何曲線 $\beta : I \rightarrow R, \beta(0) = \alpha(t), \beta'(0) \neq \alpha'(t)$ 都有 $\langle \beta'(0), h(t) \rangle > 0$ 。
- (d) 直觀來說，若人沿著曲線 $\alpha(t)$ 行走，頭與法向量 $\mathbf{N}$ 同向，則區域 R 始終在左手邊。

4 高斯–伯內定理(局部版本)

定理 5 (局部版本的高斯–伯內定理 (Gauss-Bonnet Theorem, local version, 第 272 頁)). 令 $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ 是一個等溫參數式 (isothermal parametrization), 也就是 $F = 0, E = G = \lambda^2(u, v)$, 而 S 是可定向的曲面, $U \subset \mathbb{R}^2$ 同胚於開圓盤, $\mathbf{x}$ 與 S 的定向相容。

令 $R \subset \mathbf{x}(U)$ 是 S 上的簡單區域, 而 $\alpha : I \rightarrow S$ 使得 $\partial R = \alpha(I)$, 假設 α 具有正的定向, 以弧長 s 為參數, 並且 $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_{n-1})$ 與 $\theta_0, \dots, \theta_{n-1}$ 分別為頂點與 α 的外角, 則

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K dA + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = 2\pi,$$

其中 $k_g(s)$ 是 α 的測地曲率, K 是 S 的高斯曲率。

證明: 記 $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$, 因為測地曲率滿足以下公式:

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\varphi_i}{ds},$$

其中 $\varphi_i = \varphi_i(s)$ 是可微分函數, 它測量從 $\mathbf{x}_u$ 到 $\alpha'(s)$ 在 $[s_i, s_{i+1}]$ 的正向角度。現將上式逐段積分並相加, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds \\ &= \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \left(\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right) du dv + \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) \\ &= - \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K \lambda du dv + 2\pi - \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = - \iint_R K dA + 2\pi - \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i, \end{aligned}$$

於是

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K dA + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = 2\pi.$$

5 高斯曲率的重新解釋

令 $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ 是 $p \in S$ 附近的一個等溫參數式, $R \subset \mathbf{x}(U)$ 是一個沒有頂點且包含 p 的一個簡單區域, 記 $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbf{x}(U)$ 是以弧長 s 為參數的曲線使得它對應於 R 的邊界。令 $\mathbf{w}_0$ 是 S 在 $\alpha(0)$ 的單位切向量, $\mathbf{w}(s), s \in [0, l]$ 是 $\mathbf{w}_0$ 沿著 α 的平行移動。由格林定理得知

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l \left[\frac{D\mathbf{w}}{ds} \right] ds = \int_0^l \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) ds + \int_0^l \frac{d\varphi}{ds} ds \\ &= - \iint_R K dA + \varphi(l) - \varphi(0) = - \iint_R K dA + \Delta\varphi, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{R \rightarrow p} \frac{\Delta\varphi}{A(R)} = K(p)$$