微分幾何(二) 課程學習單 活動 7

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 曲面的內孕性質 (intrinsic property) 與高斯絕妙定理 (Theorema Egregium)。

☐ 認識曲面論基本定理。

2 曲面的內孕性質 (第 235 頁)

在之前的活動中, 我們對於曲面的認識, 都是將曲面放在 $\mathbb{R}^3$ 中利用單位法向量的改變定義曲面的曲率以了解曲面的彎曲。高斯在幾何上的一個重要貢獻是他證明了高斯曲率是一個 *內在的* (intrinsic) 性質。

給定正則可定向的曲面 S, 取 $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ 爲曲面的一個參數式, 在 $\mathbf{x}(U)$ 上考慮 *活動標架* (trihedron) $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$, 現將以下向量全部用活動標架這組基底展開(這裡的記號, 下標 1 對應於變數 u, 下標 2 對應於變數 v):

$$
\begin{cases}
\mathbf{x}_{uu} = \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v + e\mathbf{N} \\
\mathbf{x}_{uv} = \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v + f\mathbf{N} \\
\mathbf{x}_{vu} = \Gamma^1_{21}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{21}\mathbf{x}_v + f\mathbf{N} \\
\mathbf{x}_{vv} = \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v + g\mathbf{N} \\
\mathbf{N}_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \\
\mathbf{N}_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v
\end{cases} \tag{1}
$$

上述的記號 $\Gamma^k_{ij}, i, j, k = 1, 2$ 在幾何上是專用的記號, 稱爲 *克里斯多夫記號* (Christoffel symbols)。上面的展開式中, 有些係數之間是有關係的, 例如: 從 $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ 得知 ______________________。

現在想要將 Γ^k_{ij} 求出:

(A) 兩邊對 $\mathbf{x}_u$ 內積:

兩邊對 $\mathbf{x}_v$ 內積:

(B) 兩邊對 $\mathbf{x}_u$ 內積:

兩邊對 $\mathbf{x}_v$ 內積:

(C) 兩邊對 $\mathbf{x}_u$ 內積:

兩邊對 $\mathbf{x}_v$ 內積:

所以 Γ^k_{ij} 可以完全用第一基本式及其微分表達。

現觀察以下關係式:

$$\begin{cases} (\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u = 0 \\ (\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{vu})_v = 0 \\ (\mathbf{N}_u)_v - (\mathbf{N}_v)_u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1\mathbf{x}_u + B_1\mathbf{x}_v + C_1\mathbf{N} = 0 \\ A_2\mathbf{x}_u + B_2\mathbf{x}_v + C_2\mathbf{N} = 0 \\ A_3\mathbf{x}_u + B_3\mathbf{x}_v + C_3\mathbf{N} = 0 \end{cases}$$

其中 $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3$ 是 E, F, G, e, f, g 及其微分表示。因爲 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ 線性獨立, 所以 $A_i = 0, B_i = 0, C_i = 0, i = 1, 2, 3$。舉例來說: 將 $(\mathbf{x}_{uu})_v = (\mathbf{x}_{uv})_u$ 展開得到 $(\Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v + e\mathbf{N})_v = (\Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v + f\mathbf{N})_u$, 再用微分的乘法規則並用 (1) 式替換後, 進行以下觀察:

(A1) 觀察 $\mathbf{x}_u$ 的係數, 得到 $(\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + ea_{12} = (\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{21} + fa_{11}$。

$\Rightarrow ea_{12} - fa_{11} = (\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{21} - (\Gamma^1_{11})_v - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} = FK$。

(B1) 觀察 $\mathbf{x}_v$ 的係數, 得到 $(\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + ea_{22} = (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + fa_{21}$。

$\Rightarrow fa_{21} - ea_{22} = (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - (\Gamma^2_{12})_u - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} = EK$

(C1) 觀察 N 的係數, 得到 $e_v + \Gamma^1_{11}f + \Gamma^2_{11}g = f_u + \Gamma^1_{12}e + \Gamma^2_{12}f$。

$\Rightarrow e_v - f_u = \Gamma^1_{12}e + \Gamma^2_{12}f - \Gamma^1_{11}f - \Gamma^2_{11}g$

(A2) 觀察 $\mathbf{x}_u$ 的係數, 得到 $(\Gamma^1_{22})_u + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{21} + ga_{11} = (\Gamma^1_{21})_v + \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + fa_{12}$。

$\Rightarrow fa_{12} - ga_{11} = (\Gamma^1_{22})_u + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{21} - (\Gamma^1_{21})_v - \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} = GK$。

(B2) 觀察 $\mathbf{x}_v$ 的係數, 得到 $(\Gamma^2_{22})_u + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{21} + ga_{21} = (\Gamma^2_{21})_v + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{22} + fa_{22}$。

$\Rightarrow ga_{21} - fa_{22} = (\Gamma^2_{21})_v + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{22} - (\Gamma^2_{22})_u - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{21} = FK$。

(C2) 觀察 N 的係數, 得到 $g_u + \Gamma^1_{22}e + \Gamma^2_{22}f = f_v + \Gamma^1_{21}f + \Gamma^2_{21}g$。

$\Rightarrow f_v - g_u = \Gamma^1_{22}e + \Gamma^2_{22}f - \Gamma^1_{21}f - \Gamma^2_{21}g$。

(A3) 觀察 $\mathbf{x}_u$ 的係數, 得到 $(a_{11})_v + a_{11}\Gamma^1_{12} + a_{21}\Gamma^1_{22} = (a_{12})_u + a_{12}\Gamma^1_{11} + a_{22}\Gamma^1_{21}$。

(B3) 觀察 $\mathbf{x}_v$ 的係數, 得到 $(a_{21})_v + a_{11}\Gamma^2_{12} + a_{21}\Gamma^2_{22} = (a_{22})_u + a_{12}\Gamma^2_{11} + a_{22}\Gamma^2_{22}$。

(C3) 觀察 N 的係數, 得到 $a_{11}f + a_{21}g = a_{12}e + a_{22}f$, 這是一個恆等式。

高斯在這些符號中得到了一個驚人的發現:

定理 1 (高斯絕妙定理 (Theorema Egregium), 第 237 頁)**.** 高斯曲率 K 在局部保距的變換下是一個曲面的不變量。

證明:

註. 均曲率 $H = \frac{1}{2}\frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2}$ 並不是一個內在的不變量, 例如 $\mathbb{R}^3$ 中的平面、圓柱、圓錐之間的關係是局部保距, 但是曲面對於大空間 $\mathbb{R}^3$ 的彎曲程度有別。

註. 往後的幾何發展, 若純粹在 $(M, \mathrm{d}s^2)$ 的層級下討論幾何稱爲 黎曼幾何 (Riemannian geometry)。若牽涉到必須把小空間放到大空間中 $N \subset M$ 的幾何稱爲 子流形幾何 (submanifold geometry)。

3 曲面論基本定理

實際上, (A1) (B1) (A2) (B2) 這四個等式彼此等價, 我們稱之 高斯方程 (Gauss equation):

$$\begin{aligned} eg - f^2 = G&\left((\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^2\right) \\ &- F\left((\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^1 - (\Gamma_{11}^1)_v - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1\right), \end{aligned}$$

而 (A3) (B3) 同時成立等價於 (C1) 與 (C2) 同時成立。這兩個方程式稱爲 可達技方程 (Codazzi equation):

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f - \Gamma_{11}^1 f - \Gamma_{11}^2 g \\ f_v - g_u &= \Gamma_{22}^1 e + \Gamma_{22}^2 f - \Gamma_{21}^1 f - \Gamma_{21}^2 g。 \end{aligned}$$

曲面論基本定理想問的是: 給定區域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上的六個函數 E, F, G, e, f, g, 是否存在正則曲面 $S : U \xrightarrow{\mathbf{x}(u,v)} S \subset \mathbb{R}^3$ 使得其第一基本式爲 $\mathrm{I} = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2$ 而第二基本式爲 $\mathrm{II} = e\,\mathrm{d}u^2 + 2f\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + g\,\mathrm{d}v^2$?

由前面的討論知道: 若這六個函數要形成曲面第一基本式與第二基本式的係數, 那麼它們不能任意給定, 這六個函數之間至少要滿足高斯方程與可達技方程。也就是說, 這三個方程式是讓六個函數得以透過曲面基本式實現的必要要件。我們將這三個方程式稱爲曲面論的 相容方程式 (compatibility equations)。

而曲面論要繼續追問的是: 除了上述所說的相容方程式以外, 是否還有其它條件限制了用函數表現曲面形狀的任意性? 這個問題的結果如下:

定理 **2** (曲面局部理論基本定理 (Fundamental Theorem of the Local Theory of Surfaces), 第 239, 317–320 頁)**.**

(a) 存在性 (Existence): 令 $E > 0, F, G > 0, e, f, g$ 是定義於開集合 $V \subset \mathbb{R}^2$ 上的六個可微分的函數。假設這六個函數滿足高斯方程、可達技方程式、以及 $EG - F^2 > 0$, 那麼對任意 $q \in V$, 存在 $U \subset V$ 與可微同胚 $\mathbf{x} : U \to \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ 使得正則曲面 $\mathbf{x}(U)$ 以 E, F, G 爲第一基本式的係數, e, f, g 爲第二基本式的係數。

(b) 剛性 (rigidity): 如果 U 是 連通的 (connected) 而且如果 $\overline{\mathbf{x}} : U \to \overline{\mathbf{x}}(U) \subset \mathbb{R}^3$ 是另外一個滿足同樣條件的可微同胚映射, 則存在一個 平移映射 (translation) T 以及一個 $\mathbb{R}^3$ 中的線性正交變換 (linear orthogonal transformation) ρ 使得 $\overline{\mathbf{x}} = T \circ \rho \circ \mathbf{x}$。

附錄: 方程式的等價

以下將證明高斯方程 (A1) (B1) (A2) (B2) 彼此等價: 將 $E\times$(A1) 與 $F\times$(B1) 兩者相比, 得到

$$
\begin{aligned}
EFK &= E\left((\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^1 - (\Gamma_{11}^1)_v - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1\right) \\
&= F\left((\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^2\right)。
\end{aligned} \tag{2}
$$

另一方面, 由 $\frac{1}{2}E_{uv} = \frac{1}{2}E_{vu}$ 得到

$$
(\Gamma_{11}^1)_v E + \Gamma_{11}^1 E_v + (\Gamma_{11}^2)_v F + \Gamma_{11}^2 F_v = (\Gamma_{12}^1)_u E + \Gamma_{12}^1 E_u + (\Gamma_{12}^2)_u F + \Gamma_{12}^2 F_u,
$$

再將 E_v, E_u, F_v, F_u 的公式代入後得到

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma_{11}^1)_v E + \Gamma_{11}^1\left(2\Gamma_{12}^1 E + 2\Gamma_{12}^2 F\right) + (\Gamma_{11}^2)_v F + \Gamma_{11}^2\left(\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F + \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G\right) \\
&= (\Gamma_{12}^1)_u E + \Gamma_{12}^1\left(2\Gamma_{11}^1 E + 2\Gamma_{11}^2 F\right) + (\Gamma_{12}^2)_u F + \Gamma_{12}^2\left(\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F + \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G\right)。
\end{aligned}
$$

上式中, 帶有 G 的項都可以消掉, 而將帶有 E 的項整理到等式左邊; 將帶有 F 的項整理到等右邊, 就會發現它和 (2) 式完全一樣。

換言之, 由二次微分的交換性 $E_{uv} = E_{vu}, F_{uv} = F_{vu}, G_{uv} = G_{vu}$ 將分別證明 (A1) 與 (B1) 等價; (B1) 與 (A2) 等價; 以及 (A2) 與 (B2) 等價。

以下欲證 (A3) (B3) 同時成立與 (C1) (C2) 同時成立等價: 首先注意到 $C_1 = 0$ 等價於

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{x}_{uuv}, \mathbf{N}\rangle - \langle \mathbf{x}_{uvu}, \mathbf{N}\rangle = \frac{\partial}{\partial v}\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N}\rangle - \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N}_v\rangle - \frac{\partial}{\partial u}\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N}\rangle + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N}_u\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial u}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}\rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_u\rangle\right) - \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N}_v\rangle - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial v}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}\rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v\rangle\right) + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N}_u\rangle \\
&= -\frac{\partial}{\partial v}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_u\rangle - \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N}_v\rangle + \frac{\partial}{\partial u}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v\rangle + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N}_u\rangle = 0。
\end{aligned}
$$

同理, $C_2 = 0$ 等價於

$$
\langle \mathbf{x}_{vvu}, \mathbf{N}\rangle - \langle \mathbf{x}_{vuv}, \mathbf{N}\rangle = -\frac{\partial}{\partial u}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_u\rangle - \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{N}_u\rangle + \frac{\partial}{\partial v}\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_u\rangle + \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{N}_v\rangle = 0。
$$

另一方面, 若對於 $\mathbf{N}_{uv} - \mathbf{N}_{vu} = 0$, 兩邊對 $\mathbf{x}_u$ 內積後得到

$$
A_3E + B_3F = \langle \mathbf{N}_{uv}, \mathbf{x}_u\rangle - \langle \mathbf{N}_{vu}, \mathbf{x}_u\rangle = \frac{\partial}{\partial v}\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u\rangle - \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_{uv}\rangle - \frac{\partial}{\partial u}\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u\rangle + \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_{uu}\rangle = 0。
$$

對於 $\mathbf{N}_{uv} - \mathbf{N}_{vu} = 0$ 兩邊對 $\mathbf{x}_v$ 內積後得到

$$
A_3F + B_3G = \langle \mathbf{N}_{uv}, \mathbf{x}_v\rangle - \langle \mathbf{N}_{vu}, \mathbf{x}_v\rangle = \frac{\partial}{\partial v}\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v\rangle - \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_{vv}\rangle - \frac{\partial}{\partial u}\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v\rangle + \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_{vu}\rangle = 0。
$$

所以 $C_1 = 0, C_2 = 0$ 等價於 $A_3 = 0, B_3 = 0$。

在第 1 頁的討論得到

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{bmatrix}$$