微分幾何(二) 課程學習單 活動 5

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 高斯曲率與均曲率的另一個刻畫。

2 高斯映射的方向性

討論 1. 討論並觀察以下現象:

(A1) 拿一枝筆放在球面上示意為單位法向量, 筆沿著球面上的某個封閉曲線繞一圈, 觀察筆頭與筆尾的順逆向關係。

(A2) 拿一枝筆放在馬鞍面上示意為單位法向量, 筆沿著馬鞍面上的某個封閉曲線繞一圈, 觀察筆頭與筆尾的順逆向關係。

解.

討論 2. 何謂 重積分的均值定理 (The Mean Value Theorem for Double Integrals)? 它是單變數函數均值定理 (Mean Value Theorem) 的推廣嗎?

解.

定理 3 (第 169 頁)**.** 若曲面 S 上有一點 p 的高斯曲率 $K(p) \neq 0$, 令 V 是 p 附近的一個連通區域使得高斯曲率都不變號, 則

$$K(p) = \lim_{A \to 0} \frac{A'}{A},$$

其中 A 指的是曲面 S 上包含 p 的區域 $W \subset V \subset S$ 的面積; 而 A' 指的是區域 W 經過高斯映射得到在單位球上的映像 *(image)* 之面積。

證明: 給定 S 在 p 附近的一個參數式 $\mathbf{x}(u, v)$, 其中 $(u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2$ 使得 $\mathbf{x}(R) = W$, 則區域 W 的面積爲

$$A = \iint_R \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v。$$

另一方面, 因爲區域 W 的高斯映射可以用參數式與法向量兩者合成來表達, 於是區域 W 經過高斯映射對應到單位球上的映像之面積爲

$$A' = \iint_R \|\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v,$$

因爲

$$\begin{cases} \mathbf{N}_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \\ \mathbf{N}_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \end{cases} \Rightarrow \|\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v\| = K\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|$$

所以由重積分的均值定理得知

$$\lim_{A \to 0} \frac{A'}{A} = \lim_{\mathrm{Area}(R) \to 0} \frac{\frac{A'}{\mathrm{Area}(R)}}{\frac{A}{\mathrm{Area}(R)}} = \frac{\lim_{\mathrm{Area}(R) \to 0} \frac{1}{\mathrm{Area}(R)} \iint_R K\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}{\lim_{\mathrm{Area}(R) \to 0} \frac{1}{\mathrm{Area}(R)} \iint_R \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v} = K.$$

討論 4. 爲什麼 定理 **3** 的條件需要「在區域內的高斯曲率都不變號」?

解.

定理 5. 均曲率的幾何意義: $H = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} k_{\mathbf{n}}(\theta) \, \mathrm{d}\theta$, 其中 $k_{\mathbf{n}}(\theta)$ 指的是法曲率。

證明: 由 歐拉公式 (Euler formula): $\kappa_{\mathbf{n}} = \cos^2\theta\kappa_1 + \sin^2\theta\kappa_2$, 直接計算得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_{\mathbf{n}}(\theta) \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta\kappa_1 + \sin^2\theta\kappa_2) \, \mathrm{d}\theta$$

3 二變數函數的極值判別法

對於一個二變數函數 $f(x,y)$, 假設其二次偏導數都是連續函數, 該如何判別函數臨界點的類型呢?

首先, 針對某個點 $p=p(x_0,y_0)$, 利用泰勒多項式重新表達函數在 $p(x_0,y_0)$ 附近的函數, 由單變數函數討論的結果, 相信大家可以接受以下式子會是多變數函數以 $p(x_0,y_0)$ 爲中心的泰勒多項式表示法:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(p)+\frac{1}{1!}\left(f_x(p)(x-x_0)+f_y(p)(y-y_0)\right)\\
&\quad+\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(p)(x-x_0)^2+2f_{xy}(p)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(p)(y-y_0)^2\right)\\
&\quad+\text{對 }(x-x_0)\text{ 與 }(y-y_0)\text{ 而言的高階無窮小量,}
\end{aligned}$$

若 $p(x_0,y_0)$ 爲二變數函數 $f(x,y)$ 的臨界點, 則函數在 p 處同時滿足 $f_x(p)=0$ 與 $f_y(p)=0$, 因此在 p 附近的點 (x,y), 都有

$$\begin{aligned}
&f(x,y)-f(x_0,y_0)\\
=&\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(p)(x-x_0)^2+2f_{xy}(p)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(p)(y-y_0)^2\right)\\
&+\text{對 }(x-x_0)\text{ 與 }(y-y_0)\text{ 而言的高階無窮小量}\\
=&\frac{1}{2!}\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p)\\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{bmatrix}+\text{高階無窮小量。}
\end{aligned}$$

其中矩陣

$$\mathrm{Hess}(f)(p)\overset{\text{定義}}{=}\begin{bmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p)\\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p)\end{bmatrix}$$

稱爲函數 $f(x,y)$ 在 $p(x_0,y_0)$ 點的 赫士矩陣 (Hessian matrix)。

寫成這樣之後, 我們就可以利用矩陣對角化的理論處理問題。因爲函數 $f(x,y)$ 的二次偏導數是連續函數, 所以赫士矩陣 $A=\mathrm{Hess}(f)(p)$ 是一個對稱矩陣, 於是矩陣可以正交對角化, 也就是存在矩陣 P 滿足 $P^TP=PP^T=I$, 並且存在對角矩陣 $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$ 使得 $D=P^TAP$, 或者說是 $A=PDP^T$。於是我們可以引進新的坐標系 $(\tilde{x},\tilde{y})$ — 經過旋轉與平移之下, 會有

$$\begin{aligned}
f(\tilde{x},\tilde{y})-f(x_0,y_0)&=\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}\tilde{x} & \tilde{y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{bmatrix}+\text{高階無窮小量}\\
&=\frac{1}{2!}\left(\lambda_1(\tilde{x})^2+\lambda_2(\tilde{y})^2\right)+\text{高階無窮小量,}
\end{aligned}$$

所以判斷函數在臨界點的行爲, 其「主要部份」就是由 $\frac{1}{2!}\left(\lambda_1(\tilde{x})^2+\lambda_2(\tilde{y})^2\right)$ 決定, 而函數 $z(\tilde{x},\tilde{y})=\frac{1}{2!}\left(\lambda_1(\tilde{x})^2+\lambda_2(\tilde{y})^2\right)$ 的長相, 可以根據 λ_1 與 λ_2 的正負號分類。另一方面, 因爲矩陣的行列式滿足 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$, 所以

$$\begin{aligned}
\det(D)&=\det(P^TAP)=\det(P^T)\det(A)\det(P)=\det(P^T)\det(P)\det(A)\\
&=\det(P^TP)\det(A)=\det(I)\det(A)=\det(A),
\end{aligned}$$

於是我們可以直接觀察原赫士矩陣的行列式 $\det(A) = \det(\mathrm{Hess}(f)(p))$ 還有它的主對角線的第一個元素的正負號, 就可以對二變數函數的極值下結論:

- 若 $\det(A) > 0$ 且 $f_{xx}(p) > 0$, 則 $f(p)$ 爲 ______________。

  理由: 因爲這兩個條件等同於 $\lambda_1\lambda_2 > 0$, 且其中一個爲正, 所以另一個亦爲正, 圖形長相如開口向上的橢圓拋物面。

- 若 $\det(A) > 0$ 且 $f_{xx}(p) < 0$, 則 $f(p)$ 爲 ______________。

  理由: 因爲這兩個條件等同於 $\lambda_1\lambda_2 > 0$, 且其中一個爲負, 所以另一個亦爲負, 圖形長相如開口向下的橢圓拋物面。

- 若 $\det(A) < 0$, 則 $f(p)$ ______________________________。

  理由: 因爲這兩個條件等同於 $\lambda_1\lambda_2 < 0$, 所以一正一負, 圖形長相如馬鞍面。

4 圓錐曲線的判別式

討論 **6.** 試判斷圓錐曲線的形狀, 方程式代表的是橢圓? 拋物線? 還是雙曲線? 如何得知其結果?

(B1) $x^2 - 2xy + 3y^2 + 3x - 2y - 1 = 0$。

(B2) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$。

(B3) $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$。

解.