

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

推導曲面的高斯曲率與均曲率公式的局部坐標表示法。

2 第二基本式的局部坐標表示 (第 155–158 頁)

前面的活動是以理論介紹曲面的第二基本式 $\Pi_p(\mathbf{v})$, 現在要用局部坐標的方式表達第二基本式。

給定曲面 S , 而 $p \in U \subset S$, 令 $\mathbf{x}(u, v)$ 為曲面的一個參數化。取 $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}(u(0), v(0)) = p$ 是在曲面 S 上通過 p 的一條曲線。則曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 在 p 點的切向量為 $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{x}_u(u(0), v(0))u'(0) + \mathbf{x}_v(u(0), v(0))v'(0)$, 而

$$d\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)) = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{N}(u(t), v(t)) \right|_{t=0} = \mathbf{N}_u(u(0), v(0))u'(0) + \mathbf{N}_v(u(0), v(0))v'(0) \quad (1)$$

於是 (以下在不引起混淆之情形下省略代點的記號)

$$\begin{aligned} \Pi_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)) &= -\langle d\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)), \boldsymbol{\alpha}'(0) \rangle = -\langle \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle (u')^2 - (\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle) u' v' - \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v \rangle (v')^2 \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

其中最後一式利用關係式 $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ 計算每一項, 並用符號註記:

$$\begin{aligned} e &= -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uu} \rangle \\ f &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ g &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

在幾何上, 我們會把曲面的第二基本式改寫成 微分形式 (differential form) 的樣子:

$$\Pi_p = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

討論 1. 試將曲面的第一基本式與第二基本式做一個對照。

解.

3 用局部坐標計算高斯曲率與均曲率

若想計算曲面在某一點的高斯曲率與均曲率，我們試著把高斯映射的微分映射 $d\mathbf{N}_p$ 這個線性變換求出來：沿用之前的記號，由 (1) 式出發，因為 \mathbf{N}_u 與 \mathbf{N}_v 都是 T_pS 上的向量，故用基底 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ 展開：

$$\begin{cases} \mathbf{N}_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \\ \mathbf{N}_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \end{cases} \quad (2)$$

於是 $d\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)) = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v$ ，或寫成矩陣的形式

$$d\mathbf{N} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}。$$

欲解矩陣 $[a_{ij}]$ 的每一個量，透過以下方式求解：

(A) 兩邊對 \mathbf{x}_u 內積：

兩邊對 \mathbf{x}_v 內積：

(B) 兩邊對 \mathbf{x}_u 內積：

兩邊對 \mathbf{x}_v 內積：

所以

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

(K) 計算高斯曲率：因為 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ，所以 $K = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(H) 計算均曲率：因為 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ，所以 $H = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

討論 2. 試觀察 $fa_{21} - ea_{22}$ 這個量。

解.

例題 3 (第 163–165 頁). 計算 旋轉曲面 (surfaces of revolution) 的各式幾何量。

解. 考慮旋轉曲面的參數式

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)) \quad \text{其中 } U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u < 2\pi, a < v < b\},$$

假設生成曲線 $(f(v), g(v))$ 是以弧長為參數, 即 _____。計算

$$\mathbf{x}_u =$$

$$\mathbf{x}_v =$$

$$\mathbf{x}_{uu} =$$

$$\mathbf{x}_{uv} =$$

$$\mathbf{x}_{vv} =$$

$$\mathbf{N} =$$

所以

$$E =$$

$$F =$$

$$G =$$

$$e =$$

$$f =$$

$$g =$$

因此高斯曲率與均曲率分別為:

例題 4 (第 165–166 頁). 計算 函數圖形 (graph of a function) 的各式幾何量。

解. 考慮旋轉曲面的參數式

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad \text{其中} \quad (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2,$$

直接計算

$$\mathbf{x}_u =$$

$$\mathbf{x}_v =$$

$$\mathbf{x}_{uu} =$$

$$\mathbf{x}_{uv} =$$

$$\mathbf{x}_{vv} =$$

$$\mathbf{N} =$$

所以

$$E =$$

$$F =$$

$$G =$$

$$e =$$

$$f =$$

$$g =$$

因此高斯曲率與均曲率分別為: