微分幾何(二) 課程學習單 活動 3

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 認識曲面的第二基本式 (second fundamental form)。

2 預備知識 (第 217– 219 頁)

討論 **1.** 以下將複習線性代數的相關知識。給定內積空間 $(V^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 及其線性映射 $A : V^n \to V^n$,

(A) 若線性映射 A 滿足什麼條件時, 稱它爲 自伴隨映射 (self-adjoint map)?

(B) 若在內積空間中選取一組有序單位正交基底 (ordered orthonormal basis) $\beta = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, 而將自伴隨映射用矩陣 $[A]_\beta$ 表示時, 這個矩陣有什麼性質?

(C) 定義 $B : V \times V \to \mathbb{R}, B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$, 驗證映射 B 是雙線性 (bilinear) 的對稱式 (symmetric form)。

(D) 定義 二次式 (quadratic form) $Q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, 試將 $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 用 Q 表達。

(E) 什麼時候一個矩陣可以 正交對角化 (orthogonal diagonalization)? 它與上述討論之間的關係爲何?

解: 給定矩陣 A, 若在存可逆且對稱的矩陣 P 以及對角矩陣 D 使得 $\begin{cases} D = P^{-1}AP \\ PP^T = P^TP = \mathrm{Id}, \end{cases}$ 則稱矩陣 A 是可以正交對角化的。由

$$P^TP = \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1 \\ \hline \mathbf{v}_2 \\ \hline \mathbf{v}_3 \\ \hline \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

這件事表明正交對角化的取名之由來。

例: 觀察線性變換 A, 以 $\{\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)\}$ 表達時。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

而 $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$,

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix} = (\tilde{v}_1)^2 + 3(\tilde{v}_2)^2 \end{aligned}$$

其中上述的關係是重選有序基底 $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \cos\frac{\pi}{4}\mathbf{e}_1 + \sin\frac{\pi}{4}\mathbf{e}_2$ 以及 $\tilde{\mathbf{e}}_2 = -\sin\frac{\pi}{4}\mathbf{e}_1 + \cos\frac{\pi}{4}\mathbf{e}_2$ 之下, 則 $\mathbf{v} = \tilde{v}_1\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{v}_2\tilde{\mathbf{e}}_2$。

3 曲面的第二基本式

在活動 2 中介紹了高斯映射及其微分映射之幾何意義, 現在要繼續對此概念探討其性質。

定理 2 (第 142 頁)**.** 高斯映射 $\mathbf{N}: S \to \mathbb{S}^2$ 在一點 $p \in S$ 的微分映射 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p : T_pS \to T_pS$ 是一個自伴隨 (*self-adjoint*) 的線性映射。

證明: 對於 T_pS 的一組基底 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, 需驗證: $\underline{\langle \mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2\rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{w}_2)\rangle}$。

記 $\mathbf{x}(u, v)$ 爲 S 在 p 附近的一個參數式, 而 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ 爲 $T_p(S)$ 的一組基底。若 $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ 是在 S 上的一條參數曲線, 並且 $\boldsymbol{\alpha}(0) = p$, 則

$$\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)) = \mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{N}(u(t), v(t))\bigg|_{t=0} = \mathbf{N}_u u'(0) + \mathbf{N}_v v'(0)。$$

特別地, 我們有 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_u) = \mathbf{N}_u$ 與 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_v) = \mathbf{N}_v$。由此, 若要證 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p$ 自伴隨, 只要再證明 $\underline{\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v\rangle = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v\rangle}$ 即可。

因爲 $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_u\rangle = 0$ 與 $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_v\rangle = 0$, 將這兩式分別對 v 與 u 求導, 則有

$$\begin{cases} \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u\rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv}\rangle = 0 \\ \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v\rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vu}\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v\rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv}\rangle = \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u\rangle。$$

定義 3 (第 143 頁)**.** 正則曲面 S 在 p 點的 第二基本式 (second fundamental form) 定義爲

$$\mathrm{II}_p(\mathbf{v}) = -\langle \mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle。$$

4 用曲線理解曲面的第二基本式

定義 4 (第 143 頁)**.** 考慮在正則曲面 S 上的一條正則曲線 C, 而 $p \in C \subset S$, 記 κ 是曲線在 p 點的曲率, 而 $\cos\theta = \langle \mathbf{n}, \mathbf{N}\rangle$, 其中 $\mathbf{n}$ 爲曲線 C 的單位法向量; 而 $\mathbf{N}$ 是曲面 S 的單位法向量。定義 $\kappa_{\mathbf{n}} = \kappa\cos\theta$ 爲曲線 C 對於 S 在 p 的 法曲率 (normal curvature)。

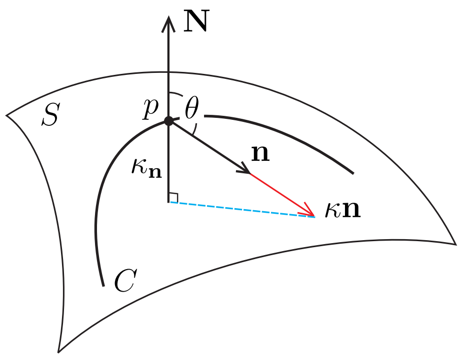

圖 1: 曲線 C 對於 S 在 p 的法曲率。

☐ 幾何意義: 法曲率 $\kappa_{\mathbf{n}}$ 是 ______________________________。

第二基本式的另一種解讀

考慮 $p \in C \subset S$, 其中 $C : I \to \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\alpha}(0) = p$, s 爲弧長參數, 而 $\mathbf{N}(s)$ 是曲面上的單位法向量限制在曲線 C 的映射, 因爲 $\langle \mathbf{N}(s), \boldsymbol{\alpha}'(s)\rangle \equiv 0$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle \mathbf{N}(s), \boldsymbol{\alpha}'(s)\rangle = \langle \mathbf{N}'(s), \boldsymbol{\alpha}'(s)\rangle + \langle \mathbf{N}(s), \boldsymbol{\alpha}''(s)\rangle \equiv 0 \Rightarrow \langle \mathbf{N}'(s), \boldsymbol{\alpha}'(s)\rangle = -\langle \mathbf{N}(s), \boldsymbol{\alpha}''(s)\rangle$$

於是

$$\mathrm{II}_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)) = -\langle \mathrm{d}\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\alpha}'(0)), \boldsymbol{\alpha}'(0)\rangle = -\langle \mathbf{N}'(0), \boldsymbol{\alpha}'(0)\rangle = \langle \mathbf{N}(0), \boldsymbol{\alpha}''(0)\rangle = \langle \mathbf{N}, \kappa\mathbf{n}\rangle(0) = \kappa_{\mathbf{n}}(p)。$$

討論 5. 將上面的式子進行幾何的解釋。

定理 6 (Meusnier, 第 144 頁)**.** 在 S 上通過 $p \in S$ 的兩條曲線, 若它們在 p 點有著相同的切線, 則它們的法曲率也相同。

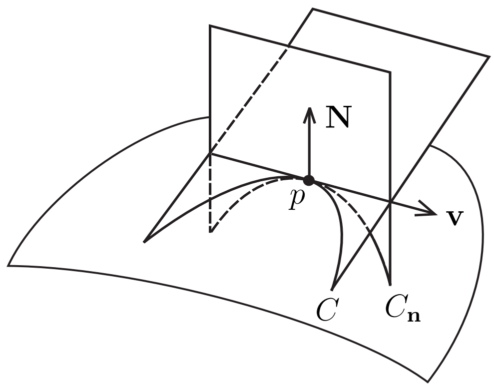

圖 2: 曲線 C 與 $C_{\mathbf{n}}$ 在 p 點沿著 $\mathbf{v}$ 方向具有相同的法曲率。

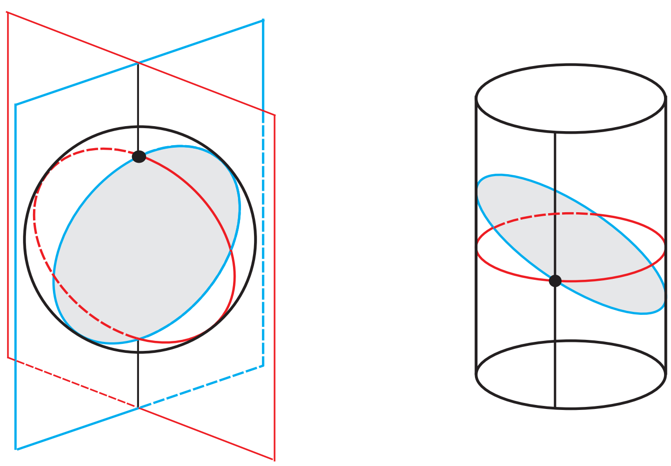

圖 3: 球 (sphere) 與圓柱 (circular cylinder) 的法截面 (normal section)。

5 主曲率與主方向

現在重回線性映射 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p$。由線性代數理論知道, 給定 $p \in S$, 在 T_pS 上存在單位正交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 使得 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{e}_1) = -\kappa_1\mathbf{e}_1, \mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{e}_2) = -\kappa_2\mathbf{e}_2$, 此外, κ_1 與 κ_2 分別是第二基本式限制於 $T_p(S)$ 上的單位球之最大值與最小值。

定義 7 (第 146 頁)**.** κ_1 與 κ_2 稱爲 *主曲率* (principle curvature); 其固有向量稱爲 *主方向* (principle direction)。

若 $\mathbf{v} \in T_pS, \|\mathbf{v}\| = 1$, 將 $\mathbf{v}$ 對於單正交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 表示, 則 $\mathbf{v} = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$, 計算對於向量 $\mathbf{v}$ 的法曲率:

$$\kappa_n = \mathrm{II}_p(\mathbf{v}) = -\langle \mathrm{d}\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle = -\langle \mathrm{d}\mathbf{N}_p(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2), \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2\rangle$$

這個公式稱爲 *歐拉公式* (Euler formula)。

定義 8 (第 148 頁)**.** 令 $p \in S$ 與 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p : T_pS \to T_pS$, 定義 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p$ 的行列式爲 *高斯曲率* (Gauss curvature), 記成 K; 定義 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p$ 的跡之一半的負號爲 *均曲率* (mean curvature), 記成 H。

註. $\mathrm{d}\mathbf{N}_p$ 的行列式爲 $(-\kappa_1)(-\kappa_2) = \kappa_1\kappa_2$; 而 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p$ 的跡之一半的負號爲 $-\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\mathrm{d}\mathbf{N}_p)) = -\frac{1}{2}(-\kappa_1 - \kappa_2) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$。

定義 9 (第 148 頁)**.** 正則曲面 S 上一點, 根據高斯曲率的符號有不同的名稱:

(1) 若 $\det(\mathrm{d}\mathbf{N}_p) > 0$, 稱爲 *橢圓點* (elliptic)。

(2) 若 $\det(\mathrm{d}\mathbf{N}_p) < 0$, 稱爲 *雙曲點* (hyperbolic)。

(3) 若 $\det(\mathrm{d}\mathbf{N}_p) = 0$ 且 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p \neq 0$, 稱爲 *拋物點* (parabolic)。

(4) 若 $\mathrm{d}\mathbf{N}_p = 0$, 稱爲 *平面點* (planar)。