

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

☐ 認識高斯映射及其微分映射之幾何意義。

2 預備知識

例題 1 (第 133 頁). 考慮 $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, 問 微分映射 (differential map) $dF_{(x_0, y_0)}$ 為何?

解.

3 高斯映射 (第 138 頁)

定義 2 (第 138 頁). 給定可定向的正則曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$, 將曲面上每一點的單位法向量收集起來, 記為 $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, 這個映射稱為 高斯映射 (Gauss map)。

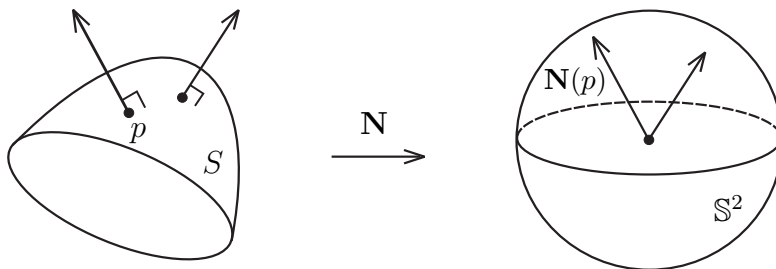


圖 1: 高斯映射。

回想當初研究平面曲線的彎曲現象, 我們是透過觀察曲線上每一點的單位切向量 $\mathbf{t}$ 的改變定義曲率, 把單位切向量收集起來也將得到一個映射 $\mathbf{t} : I \rightarrow \mathbb{S}^1$, 由此觀察轉角的改變。

例題 3. 考慮平面中的直線, 則映射 $\mathbf{t} : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ 的映像 $\mathbf{t}(I)$ 是 _____。現在對維度平行類比, 考慮空間中的平面, 那麼映射 $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ 的映像 $\mathbf{N}(S)$ 是 _____。

現考慮 $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ 在 $p \in S$ 的微分映射 $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_{\mathbf{N}(p)} \mathbb{S}^2$, 在探討論個微分映射之前, 首先注意到: 因為切平面 $T_{\mathbf{N}(p)} \mathbb{S}^2$ 平行於 $T_p S$, 所以我們可以看成 $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$ 。

這個微分映射的定義方式如下: 在曲面 S 上取一條參數曲線 $\alpha(t)$ 使得 $\alpha(0) = p$, 則 $\mathbf{N}(t) \stackrel{\text{定義}}{=} (\mathbf{N} \circ \alpha)(t) = \mathbf{N}(\alpha(t))$ 形成在 $\mathbb{S}^2$ 上的曲線。則切向量 $\mathbf{N}'(0) = d\mathbf{N}_p(\alpha'(0))$ 即為向量的對應關係。

注意到: $d\mathbf{N}_p$ 是一個線性變換。理由如下:

在平面曲線的情況, 單位切向量的變化只要用一個數字 (曲率) 就可以描述; 在曲面的情形, 單位法向量的變化要用一個線性映射描述 (因為法向量沿著曲面的變化可做兩個維度的改變)。

例題 4 (第 139 頁). 考慮空間中的平面 $P : ax + by + cz = d$, 則單位法向量為 $\mathbf{N} = \underline{\hspace{2cm}}$, 得到 $d\mathbf{N} \equiv 0$ 。

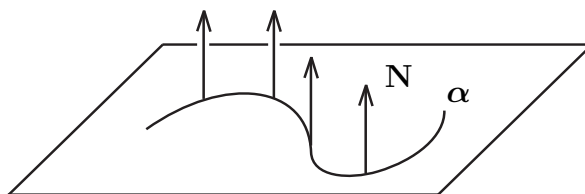


圖 2: 平面 $d\mathbf{N} \equiv 0$ 。

例題 5 (第 139 頁). 考慮單位球 $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, 取 $\mathbb{S}^2$ 上的一個參數曲線 $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 因為 $\alpha(t) \cdot \alpha(t) = 1$, 所以

所以 $\bar{\mathbf{N}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 與 $\mathbf{N} = \underline{\hspace{2cm}}$ 為 $\mathbb{S}^2$ 的單位法向量。先考慮朝內的單位法向量 $\mathbf{N}$, 欲研究 $d\mathbf{N}$, 因為 $\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}(\alpha(t)) = \underline{\hspace{2cm}}$, 所以

$$d\mathbf{N}(\alpha'(t)) = d\mathbf{N}(x'(t), y'(t), z'(t)) = \mathbf{N}'(t) = \underline{\hspace{2cm}};$$

換言之, $d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ 對所有 $p \in \mathbb{S}^2$ 與所有 $\mathbf{v} \in T_p(\mathbb{S}^2)$ 。

討論 6 (第 140–141 頁).

(A) 在單位球上若考慮朝外的單位法向量 $\bar{\mathbf{N}}$, 則 $d\bar{\mathbf{N}}_p(\mathbf{v})$ 是什麼? 在教具上確實感受其概念。

(B) 考慮圓柱 (circular cylinder) $x^2 + y^2 = 1$, 則朝內的單位法向量 $\mathbf{N}$ 如何表示? 若選取子午線 (meridians) 的切向量 $\mathbf{v}$ 時, $\mathbf{N}(\mathbf{v})$ 為何? 若選取平行線 (parallels) 的切向量 $\mathbf{w}$ 時, $\mathbf{N}(\mathbf{w})$ 為何? 這兩個向量在線性代數的意義為何?

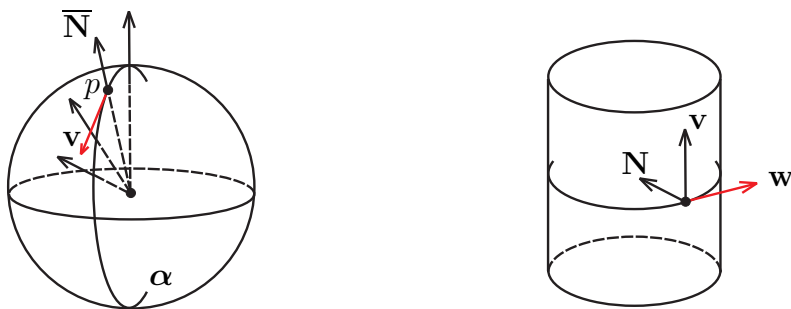


圖 3: 單位球: $d\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{v}) = \underline{\hspace{1cm}}$; 圓柱: $d\mathbf{N}(\mathbf{v}) = \underline{\hspace{1cm}}$, $d\mathbf{N}(\mathbf{w}) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

解.

例題 7 (第 141 頁). 考慮 雙曲拋物面 (hyperbolic paraboloid) $z = y^2 - x^2$, 記 $p = (0, 0, 0)$ 。

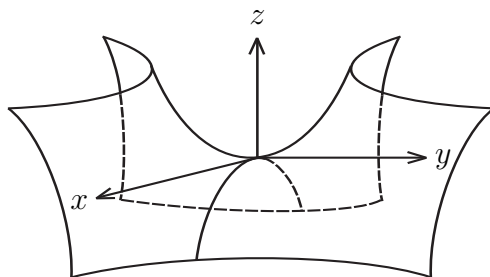


圖 4: 雙曲拋物面 $z = y^2 - x^2$ 。

首先, 寫出雙曲拋物面的一個參數式

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)。$$

因為 $\mathbf{x}_u =$ _____ 及 $\mathbf{x}_v =$ _____, 可得單位法向量

$$\mathbf{N} = \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v =$$

現考慮在 S 上通過 p 點的曲線參數式 $\boldsymbol{\alpha}(t) = (u(t), v(t), v^2(t) - u^2(t))$, $\boldsymbol{\alpha}(0) = (0, 0, 0) = p$, 且 $\boldsymbol{\alpha}'(0) =$ _____, 則

$$\mathbf{N}'(0) = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{N}(t) \right|_{t=0} =$$

所以 $d\mathbf{N}_p(u'(0), v'(0), 0) =$ _____。特別地, $d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_u) =$ _____, $d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_v) =$ _____。

例題 8 (第 142 頁). 考慮 橢圓拋物面 (elliptic paraboloid) $z = x^2 + ky^2, k > 0$, 其一參數式為 $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + kv^2)$, 若取朝上方向為單位法向量 $\mathbf{N}$, 可得在 $p = (0, 0, 0)$, $d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_u) =$ _____, $d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_v) =$ _____。

解.