

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

☐ 認識正則參數曲面 (regular parametric surfaces)。

2 預備知識

討論 1. 試討論以下問題:

- (a) 給定函數 $y = f(x)$, 何謂 微分 (differential) $dy = f'(x) dx$?
- (b) 給定映射 $\mathbf{x} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 及 $q \in \mathbb{R}^m$, 何謂 微分映射 (differential map) $d\mathbf{x}_q$?
- (c) 兩個 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 線性獨立的檢驗法。

3 正則參數曲面

若要了解三度空間 $\mathbb{R}^3$ 中像是籃球表面、手提袋或是紙張那樣的幾何形體時，我們可以仿照像空間曲線那樣的方式進行分析。同樣地，我們不單單只是把它視為一些點所形成的集合，若能將它賦予參數化的概念，那就可以利用微積分的理論了解更深刻的幾何性質。

定義 2. 所謂 參數曲面 (parametric surfaces) S 是指區域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^3$ 之間的一個一對一光滑映射 $\mathbf{x}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ 之映像 (image), 即 $S = \mathbf{x}(D)$ 。若用 (u, v) 表示 $\mathbb{R}^2$ 的坐標, 而 (x, y, z) 表示 $\mathbb{R}^3$ 的坐標, 則參數曲面可用以下參數式 (向量函數) 表示:

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

此時稱 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 為 $\mathbf{x}(u, v)$ 的 分量函數 (component functions)。定義中的光澤指的是這三個分量函數是 $C^\infty(D)$ 。

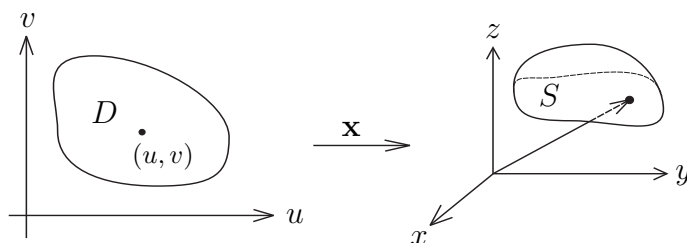


圖 1: 參數曲面。

首先我們試著將幾個特殊的曲面以參數式表示。

例題 3. 試將下列曲面寫出其參數表示法, 注意到一個參數曲面的參數表示法有很多種。

(A1) 通過 P_0 (位置向量為 $\mathbf{x}_0$) 且包含向量 $\mathbf{a}$ 與向量 $\mathbf{b}$ 的平面。

(A2) 橢圓拋物面 $z = x^2 + 2y^2$ 。

解.

定義 4. 在區域 D 中任取一點 $q = (u_0, v_0)$, 考慮 $v = v_0$, 則得空間曲線 $C_u : \alpha(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$; 若考慮 $u = u_0$, 則得到空間曲線 $C_v : \beta(v) = \mathbf{x}(u_0, v)$ 。這些空間曲線稱為 網格曲線 (grid curves)。

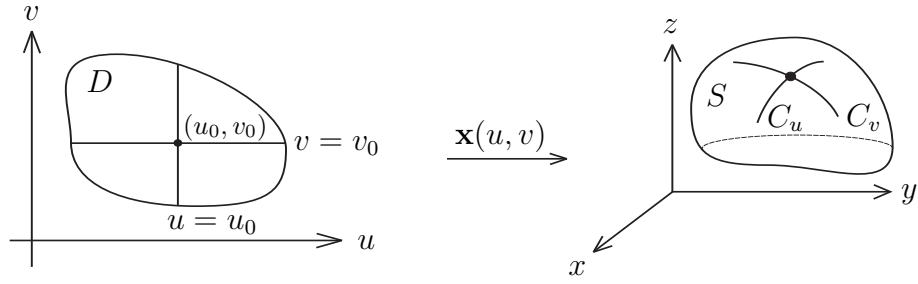


圖 2: 網格曲線。

考慮 $\mathbb{R}^2$ 的坐標 (u, v) 及其自然基底 $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$, 另取 $\mathbb{R}^3$ 的坐標 (x, y, z) 及其自然基底 $\{\mathbf{f}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{f}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{f}_3 = (0, 0, 1)\}$ 。由空間曲線 $C_u : \alpha(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$, 我們可以得到曲線在 (u_0, v_0) 的切向量

$$\alpha'(u_0) = \mathbf{x}_u|_{q=(u_0, v_0)} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \Big|_{q=(u_0, v_0)} = d\mathbf{x}_q(\mathbf{e}_1)。$$

由空間曲線 $C_v : \beta(v) = \mathbf{x}(u_0, v)$, 我們可以得到曲線在 (u_0, v_0) 的切向量

$$\beta'(v_0) = \mathbf{x}_v|_{q=(u_0, v_0)} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \Big|_{q=(u_0, v_0)} = d\mathbf{x}_q(\mathbf{e}_2)。$$

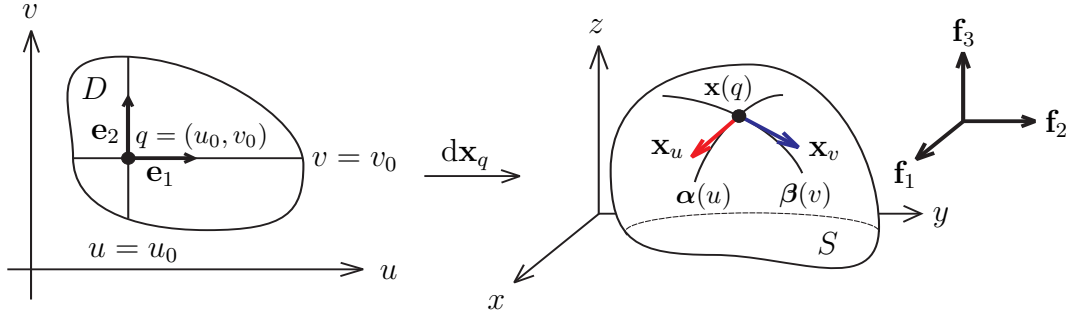


圖 3: 微分映射 (differential map) $d\mathbf{x}_q$ 。

定義 5. 若 $\mathbf{x}_u(q)$ 與 $\mathbf{x}_v(q)$ 是線性獨立的 (linearly independent), 則稱曲面 S 在點 $\mathbf{x}(q)$ 是 正則的 (regular)。若參數曲面 S 的每一點都是正則的, 則稱參數曲面是 正則參數曲面 (regular parametric surface)。

現在想要介紹幾個 $\mathbf{x}_u(q)$ 與 $\mathbf{x}_v(q)$ 是線性獨立的幾個等價條件。首先將微分映射 $d\mathbf{x}_q$ 寫成矩陣的形式:

$$[d\mathbf{x}_q]_{3 \times 2} = [d\mathbf{x}_q(\mathbf{e}_1) \mid d\mathbf{x}_q(\mathbf{e}_2)] = [\mathbf{x}_u(q) \mid \mathbf{x}_v(q)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}。$$

所以 $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ 與 $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ 線性獨立等價於微分映射 $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是一對一映射 (one-to-one map), 也就是矩陣的秩是 2。

除此以外, $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ 與 $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ 線性獨立等價於 $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$, 或是微分映射 $d\mathbf{x}_q$ 的其中一個二階子行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

非零。

例題 6. 將上述 $\mathbf{x}_u(q)$ 與 $\mathbf{x}_v(q)$ 是線性獨立的幾個等價條件框起來。

定義 7. 給定正則參數曲面 $S = \mathbf{x}(D)$, 其中 $D \subset \mathbb{R}^2$ 的坐標為 (u, v) , 記 $q = (u_0, v_0), p = \mathbf{x}(q)$, 則通過 p 且由向量 $\mathbf{x}_u(q)$ 與 $\mathbf{x}_v(q)$ 張出的平面稱為參數曲面 S 的切平面 (tangent plane)。

例題 8.

(B1) 通過 p 且由向量 $\mathbf{x}_u(q)$ 與 $\mathbf{x}_v(q)$ 張出的平面, 其法向量 (normal vector) 為何?

(B2) 計算橢圓拋物面 $z = x + 2y^2$ 在 $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ 的切平面方程式。

解.

這個單元的最後, 我們將討論正則參數曲面的一個性質: 不妨設 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} \neq 0$ 。由反函數定理 (inverse function theorem) 得知存在點 (u_0, v_0) 在 D 內的鄰域 U 使得函數 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 在 U 上有反函數 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 即它們滿足恆等式

$$x(u(x, y), v(x, y)) \equiv x, \quad y(u(x, y), v(x, y)) \equiv y,$$

這時 $z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y))$, 則曲面 S 的參數方程式為 $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, z(x, y))$ 。上面的討論說明: 正則參數曲面在任意一點的某個鄰域內總是可以表示在某個函數的圖形。