微分幾何(一) 課程學習單　　活動 7

學號: _____　　姓名: _____　　你的伙伴: _____

1　單元介紹與學習目標

☐ 認識二次曲面 (quadric surface)。

2　預備知識

例題 **1.** 試討論以下問題:

(A1) 配方法在二次函數或二次方程式的效應是什麼? 而它對應到的幾何意義又是什麼?

(A2) 矩陣對角化在二次函數或二次方程式的效應是什麼? 而它對應到的幾何意義又是什麼?

解.

3 二次曲面的認識與分類

在 $\mathbb{R}^3$ 中, **二次曲面** (quadric surface) 是由以下方程式決定出的圖形:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

其中 $A, B, C, \ldots, J$ 皆爲常數, 並且 A, B, C, D, E, F 不同時爲零。我們可用矩陣表達方程式:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}。$$

爲了以下的討論方便起見, 我們把上式簡記成 $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} + N^T\mathbf{x} + J = 0$

若 $D = E = F = 0$, 我們可以對變數 x, y, z 各別進行配方法得到帶有平移的標準式, 例如:

若 D, E, F 至少一項非零, 則可以透過坐標的旋轉, 將所有交叉項去除, 再進行配方法整理及分類。具體作法如下: 記 M 爲二次式所形成的 3×3 對稱矩陣, 則它可以正交對角化, 即存在可逆矩陣 P 與對稱矩陣 D 使得 $D = P^{-1}MP$ 以及 $P^TP = PP^T = I$。所以 $M = P^TDP$, 並且

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}M\mathbf{x}^T + N^T\mathbf{x}^T + J = \mathbf{x}(P^TDP)\mathbf{x}^T + N^T(P^TP)\mathbf{x}^T + J \\ &= (P\mathbf{x}^T)^TD(P\mathbf{x}^T) + (PN)^T(P\mathbf{x}^T) + J = \mathbf{y}^TD\mathbf{y} + \tilde{N}^T\mathbf{y} + J = 0, \end{aligned}$$

還原之後就得到

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{G} & \tilde{H} & \tilde{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}。$$

也就是說:

$$\lambda_1(\tilde{x})^2 + \lambda_2(\tilde{y})^2 + \lambda_3(\tilde{z})^2 + \tilde{G}\tilde{x} + \tilde{H}\tilde{y} + \tilde{I}\tilde{z} + J = 0,$$

然後再用配方法處理它。

於是二次方程式都可以透過 $\mathbb{R}^3$ 之間的旋轉與平移, 歸結到標準型:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \qquad 或 \qquad Ax^2 + By^2 + Iz = 0。$$

一旦表示成標準型後, 再來要如何了解二次曲面的圖形長相? 我們可以利用觀察每個截面的曲線形狀刻畫曲面的長相。這裡我們將探討六種非退化 (三個變數都出現) 的二次曲面。

(B1) 橢球面 (ellipsoid): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。

(1) 將曲面與平面 $z=k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$, 當 $k^2<c^2$ 時爲 _____, 當 $k^2=c^2$ 爲 _____, 當 $k^2>c^2$ 時是 _____。

(2) 同理可以考慮曲面與平面 $y=k$ 或 $x=k$ 相交, 會得到類似的結果。

(B2) 錐面 (cone): $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$。

(1) 將曲面與平面 $z=k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$, 當 $k\neq 0$ 時爲 _____, 當 $k=0$ 爲 _____。

(2) 將曲面與平面 $y=k$ 相交, 得到 $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{k^2}{b^2}$, 當 $k\neq 0$ 時爲 _____, 當 $k=0$ 時爲 _____; 曲面與平面 $x=k$ 相交的情形亦同。

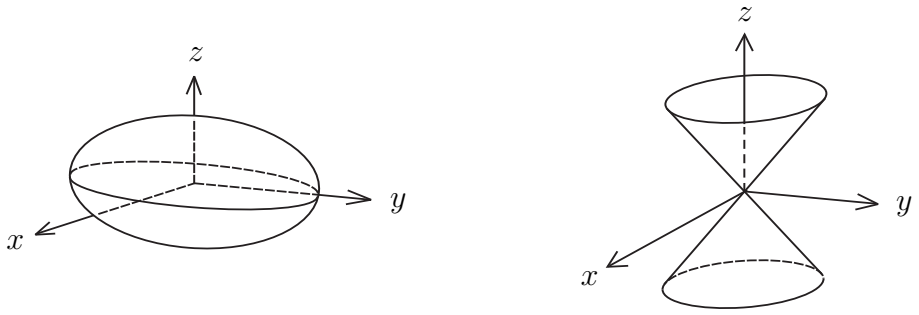


圖 1: 橢球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 與錐面 $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$。

(C1) 橢圓拋物面 (elliptic paraboloid): $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$。

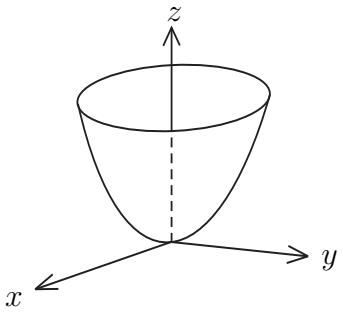
(1) 將曲面與平面 $z=k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k}{c}$, 當 $\frac{k}{c}>0$ 爲 _____, 當 $k=0$ 爲 _____, 當 $\frac{k}{c}<0$ 時是 _____。

(2) 將曲面與平面 $y=k$ 相交, 得到 $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}$, 對所有實數 k 都是 _____; 曲面與平面 $x=k$ 相交的情形亦同。

(C2) 雙曲拋物面、馬鞍面 (hyperbolic paraboloid): $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$。

(1) 將曲面與平面 $z=k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k}{c}$, 當 $k\neq 0$ 爲 _____, 當 $k=0$ 爲 _____。

(2) 將曲面與平面 $y=k$ 相交, 得到 $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}$, 對所有實數 k 都是 _____; 曲面與平面 $x=k$ 相交的情形亦同。



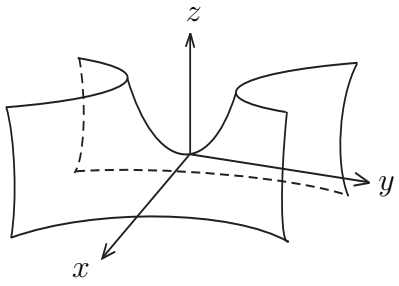


圖 2: 橢圓拋物面 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, _____ 與雙曲拋物面 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, _____。

(D1) 單葉雙曲面 (hyperboloid of one sheet): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$。

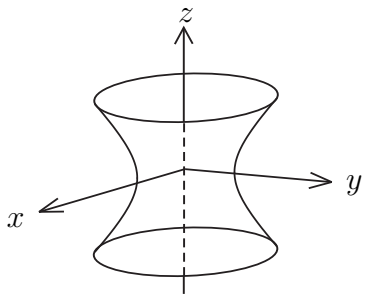
(1) 將曲面與平面 $z = k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$, 對所有實數 k 都是 _____。

(2) 將曲面與平面 $y = k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$, 當 $k^2 \neq b^2$ 爲 _____, 當 $k^2 = b^2$ 爲 _____; 曲面與平面 $x = k$ 相交的情形亦同。

(D2) 雙葉雙曲面 (hyperboloid of two sheets): $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$。

(1) 將曲面與平面 $z = k$ 相交, 得到 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$, 當 $k^2 > c^2$ 爲 _____, 當 $k^2 = c^2$ 爲 _____, 當 $k^2 < c^2$ 時是 _____。

(2) 將曲面與平面 $y = k$ 相交, 得到 $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}$, 對所有實數 k 都是 _____; 曲面與平面 $x = k$ 相交的情形亦同。



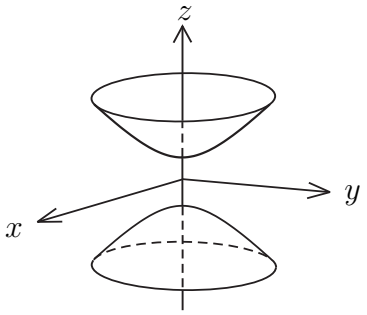


圖 3: 單葉雙曲面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 與雙葉雙曲面: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$。

例題 **2.** 如何由方程式確定單葉雙曲面或是雙葉雙曲面? _____

例題 **3.** 試理解以下二次曲面:

(a) 橢圓柱面 (elliptic cylinder): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 圓柱面 (circular cylinder): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$。

(b) 雙曲柱面 (hyperbolic cylinder): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$。

(c) 拋物柱面 (parabolic cylinder): $x^2 + 2ay = 0$。