

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

☐ 介紹平面曲線理論 — 有向曲率 (signed curvature)。☐ 介紹平面曲線的整體性質 (global geometry)。

2 預備知識

討論 1. 複習微積分課程中所學的積分與面積的關係:

(a) 理解連續函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 對應的幾何意義。

(b) 給定封閉平面曲線的參數式 $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, 如何用積分式描述曲線所圍出的區域面積?

解.

3 平面曲線與有向曲率 (第 22 頁)

對於空間曲線，我們必須假設曲率是處處非零，也就是 $\kappa(s) > 0$ 時才有一套較為完整的理論。然而在平面曲線的情況，我們可以採用不同於空間曲線的理論去處理曲線有“反曲點”的情況。

記 $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一組有序基底 (ordered basis)，然後對於平面曲線 (plane curve) $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，其中 s 為弧長參數，首先定義單位切向量 $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ ，然後定義單位法向量 $\mathbf{n}(s)$ 使得 $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ 與 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 具有同樣的定向 (the same orientation)，也就是去看基底依序寫下時行列式的正負號是否一致。然後定義有向曲率 (signed curvature) 為：

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa(s)\mathbf{n}(s)。$$

這麼一來，平面曲線的曲率 $\kappa(s)$ 可正可負。

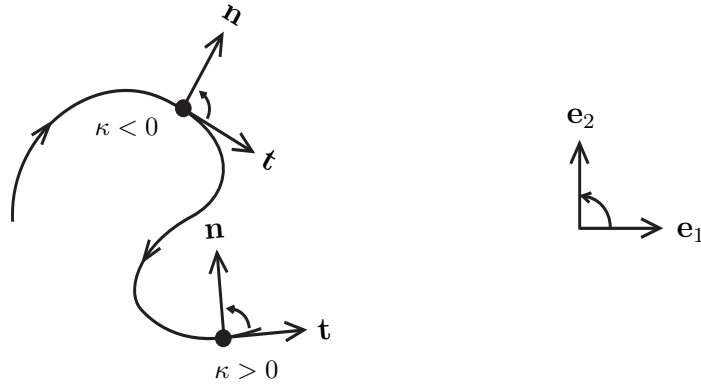


圖 1：平面曲線論與空間曲線論稍微不同，可以定義有向曲率以描述更多現象。

□ 平面曲線可利用 $\mathbf{t}(s)$ 逆時針轉 $\frac{\pi}{2}$ 先定義 $\mathbf{n}(s)$ ，再定義有符號的曲率。

平面曲線論與空間曲線論之間在以下意義下是相容的 (compatible)：平面曲線論所定義出的有向曲率，加上絕對值 $|\kappa(s)|$ 之後與利用空間曲線的理論定義出的曲率一致。

例題 2. 試討論平面曲線，因為定向不同時所有幾何量 (單位切向量、單位法向量、有向曲率、曲線長度) 的異同。

解.

□ 對於封閉曲線，我們通常會選取曲線的定向使得法向量指向內部，稱為「正的定向」。

4 平面曲線的整體性質

定義 3 (第 32–33 頁).

- (a) 一條正則的光滑參數曲線 $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 若在端點 $\alpha(a)$ 與 $\alpha(b)$ 的各階求導 (向量) 都一致; 也就是說, 對所有 $n = 0, 1, 2, \dots$ 都有 $\alpha_+^{(n)}(a) = \alpha_-^{(n)}(b)$, 則稱它為 封閉的光滑曲線 (closed)。
- (b) 若一條曲線不自交, 換言之, 對所有 $t_1, t_2 \in [a, b], t_1 \neq t_2$ 都滿足 $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, 則稱曲線是簡單的 (simple)。
- (c) 對於簡單封閉曲線, 若選取的參數化 α 所定義出的法向量完全指向曲線的內部, 稱這條曲線賦予 正的定向 (positively oriented)。

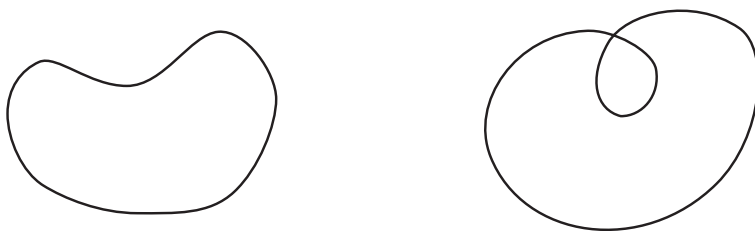


圖 2: 左圖: 簡單封閉曲線; 右圖: 不是簡單的封閉曲線。

4.1 等周不等式 (The Isoperimetric Inequality), 第 33 頁

問題. 給定一條長度為 l 的繩子, 如何圍出一個單簡封閉的區域使得面積最大?

定理 4 (等周不等式). 令 C 是一條長度為 l 的簡單封閉曲線, 記 A 為由 C 包圍住的區域面積, 則

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi},$$

等式成立時若且唯若 C 是一個圓。

證明. 如圖 3 所示, 首先找兩條與曲線 C 相切的平行線 L 與 L' 使得曲線 C 完全落在 L 與 L' 之間。另取一圓 S^1 與 L 和 L' 相切, 並且不與曲線 C 相交。記 O 為圓心, 並取坐標系使坐標原點為 O 並且 x -軸與 L 和 L' 垂直。

將曲線 C 以弧長為參數表示, 記成 $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, 此處要求曲線 C 所選的參數化為正的定向, 並且當 $s = 0$ 時對應於曲線 C 與 L 的切點。由此, 我們可以得到對於 S^1 的一種參數化方式為:

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \stackrel{\text{定義}}{=} (x(s), \bar{y}(s)), \quad s \in [0, l],$$

注意到這個 s 對於 S^1 來說不是弧長參數。

記 A 與 $\bar{A}$ 分別表示曲線 C 與 S^1 所圍之面積, 則

$$A = \int_0^l x(s)y'(s)ds \quad \text{與} \quad \bar{A} = - \int_0^l \bar{y}(s)x'(s)ds = \frac{\bar{l}^2}{4\pi},$$

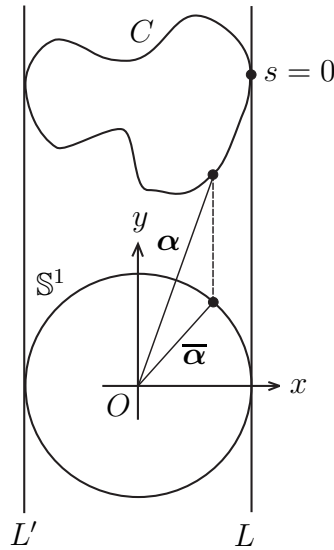


圖 3: 證明等周不等式。

其中 $\bar{l}$ 是 S^1 的周長, 所以 S^1 的半徑為 $\frac{\bar{l}}{2\pi}$. 利用 柯西不等式 (Cauchy inequality), 得到

$$\begin{aligned} A + \frac{\bar{l}^2}{4\pi} &= A + \bar{A} = \int_0^l (x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)) ds \\ &\leq \int_0^l \sqrt{((x(s))^2 + (\bar{y}(s))^2)((x'(s))^2 + (y'(s))^2)} ds \\ &= \int_0^l \sqrt{(\bar{x}(s))^2 + (\bar{y}(s))^2} ds = \frac{\bar{l}l}{2\pi}, \end{aligned}$$

因此

$$A \leq -\frac{\bar{l}^2}{4\pi} + \frac{\bar{l}l}{2\pi} = -\frac{1}{4\pi} (\bar{l}^2 - 2\bar{l}l + l^2) + \frac{l^2}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi} (\bar{l} - l)^2 + \frac{l^2}{4\pi} \leq \frac{l^2}{4\pi}.$$

現證明等式成立的情況: 因為上述的不等式都必須等號成立, 所以我們得到兩個條件: (1) $\bar{l} = l$ (2) 向量 $(x(s), -\bar{y}(s))$ 與 $(y'(s), x'(s))$ 平行, 於是

$$x(s)x'(s) = -\bar{y}(s)y'(s). \quad (1)$$

令 $r = \frac{\bar{l}}{2\pi} = \frac{l}{2\pi}$ 為 S^1 的半徑, 因為 S^1 的參數式為 $\bar{\alpha}(s) = (x(s), \bar{y}(s))$, 所以 $(x(s))^2 + (\bar{y}(s))^2 = r^2$, 或寫成 $\bar{y}(s) = \pm\sqrt{r^2 - (x(s))^2}$. 於是 (1) 式可改寫成

$$y'(s) = \mp \frac{x(s)x'(s)}{\sqrt{r^2 - (x(s))^2}}.$$

對此微分方程式積分後得到

$$\begin{aligned} y(s) &= \mp \int \frac{x(s)x'(s)}{\sqrt{r^2 - (x(s))^2}} ds = \pm \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{r^2 - (x(s))^2}} d(r^2 - (x(s))^2) \\ &= \pm \sqrt{r^2 - (x(s))^2} + C_0. \end{aligned}$$

因為 $\alpha(0) = (x(0), y(0)) = (r, 0)$, 所以 $C_0 = 0$, 於是 $(y(s))^2 = r^2 - (x(s))^2$, 或 $(x(s))^2 + (y(s))^2 = r^2$. 如此一來, 證明曲線 C 為圓。 $\square$

4.2 切向量旋轉定理 (The Theorem of Turning Tangents), 第 39 頁

記 $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 為封閉的平面曲線，其中 $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ，而 s 為弧長參數。那麼切向量 $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ 是單位長。引進 切向量指標 (tangent indicatrix) $\mathbf{t} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 為 $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ 。這個切向量指標的概念，就是將切向量的起點全部聚在一起，所以切向量指標是一個光滑的平面曲線，而軌跡包含於單位圓中。

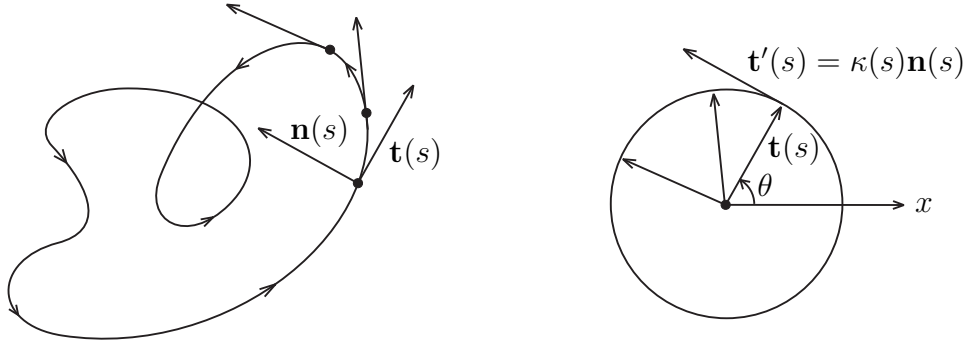


圖 4: 切向量指標 (tangent indicatrix)。

記 $\theta(s)$ 為 $\mathbf{t}(s)$ 與 x -軸之間的逆時針夾角，則可寫成 $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ ，利用鏈鎖律 (chain rule) 得到

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d}{ds}(\cos \theta(s), \sin \theta(s)) = (-\sin \theta(s)\theta'(s), \cos \theta(s)\theta'(s)) = \theta'(s)\mathbf{n}(s)。$$

因為 $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ ，所以 $\theta'(s) = \kappa(s)$ ，於是可以將 $\theta(s) : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ 改寫成 $\theta(s) = \int_0^s \kappa(s) ds$ 。直觀而言， $\theta(s)$ 想要測量的是曲線 α 從 0 到 s 之間切向量的總旋轉量，因為曲線 α 是封閉的，可得總旋轉量是 2π 的整數倍；換言之，

$$\int_0^l \kappa(s) ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi I。$$

其中 $I \in \mathbb{Z}$ 稱為曲線 α 的 旋轉指標 (rotation index)。注意到旋轉指標會隨著曲線定向不同而變號。

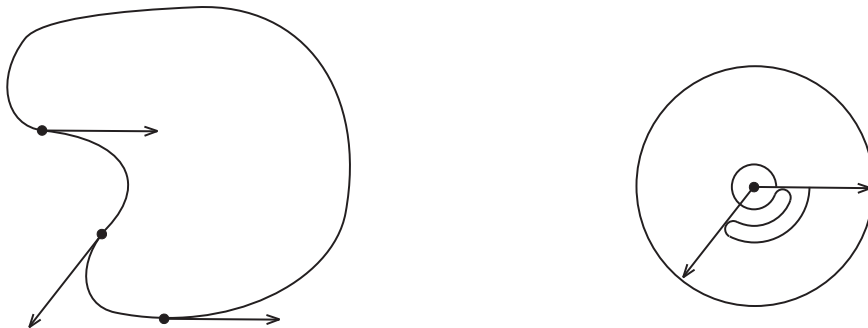


圖 5: 旋轉指標 $I = 1$ 的封閉曲線。

若將圖 5 的曲線給予相反的定向，則可得到旋轉指標 $I = -1$ 的封閉曲線。

討論 5. 與伙伴討論以下問題。

(A1) 畫出一條旋轉指標 $I = 2$ 的封閉曲線, 請伙伴幫你確認你所畫的曲線是否符合要求。

(A2) 畫出一條旋轉指標 $I = 0$ 的封閉曲線, 請伙伴幫你確認你所畫的曲線是否符合要求。

解.

定理 6 (切向量旋轉定理, 第 37 頁). 簡單封閉曲線的旋轉指標為 ± 1 , 正負號與曲線的定向有關。

4.3 四頂點定理 (The Four-Vertex Theorem), 第 39 頁

定義 7 (第 39 頁). 一條正則平面曲線 $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的頂點 (vertex) 指的是滿足 $\kappa'(t) = 0$ 的點。

定理 8 (第 39 頁). 簡單封閉曲線至少有四個頂點。

討論 9. 與伙伴討論以下問題。

(B1) 畫出一條頂點正好為四個的簡單封閉曲線。

(B2) 什麼樣的平面曲線頂點只會有兩個?

解.