

學號: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

你的伙伴: \_\_\_\_\_

## 1 單元介紹與學習目標

☐ 確實理解曲率與扭率的幾何意義以及曲率與扭率的一般公式。

## 2 預備知識

例題 1. 討論以下兩個外積公式的意義:

$$(a) (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (b) (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}.$$

解.

## 3 曲率與扭率的刻劃

例題 2. 試求半徑為  $R$  的圓之曲率。

解. 將圓置於  $xy$  平面上, 並圓心為坐標中心, 則圓可用參數化  $\alpha(s) =$  \_\_\_\_\_ 表示, 其中  $s$  為弧長參數。則

$$\alpha'(s) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \alpha''(s) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \underline{\hspace{2cm}}.$$

例題 3 (第 19 頁). 若  $\alpha(s)$  是平面曲線 (plane curve), 也就是曲線的軌跡包含於空間中的某個平面, 則該平面與其密切平面一致, 因此  $\tau(s) \equiv 0$ 。反之, 若一個曲線滿足  $\tau(s) \equiv 0$  與  $\kappa(s) \neq 0$ , 則  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}$  是一個處處有定義並且與  $s$  無關的向量。因為  $\mathbf{t} \perp \mathbf{b}$ , 所以  $(\alpha(s) \cdot \mathbf{b})' = \alpha'(s) \cdot \mathbf{b} = 0$ , 得知  $\alpha(s) \cdot \mathbf{b}$  為常數。所以位置向量  $\alpha(s)$  是包含於某一個以  $\mathbf{b}$  為法向量的平面。

上面兩個例子的結論: \_\_\_\_\_。

## 4 曲率與扭率的公式

前面的活動，利用弧長參數  $s$  定義曲線的曲率與扭率。這個活動將回答另一個問題，若用其他的參數  $\alpha(t)$  表示時，如何直接得到曲率與扭率？

定理 4 (第 26 頁). 給定正則的光滑參數曲線  $\alpha(t)$ ,

$$(a) \alpha(t) \text{ 的曲率公式爲 } \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

$$(b) \alpha(t) \text{ 的扭率公式爲 } \tau(t) = -\frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

注意到上述公式的微分都是對於變數  $t$  而言求導。

證明.

(a) 由鏈鎖律 (chain rule) 得知

$$\kappa \stackrel{\text{定義}}{=} \left\| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{t}(t(s))}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{dt} \right\| \left| \frac{dt}{ds} \right| = \|\mathbf{t}'(t)\| \frac{1}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} = \|\mathbf{t}'(t)\| \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|},$$

因爲  $\alpha'(t) = \mathbf{t}(t)\|\alpha'(t)\|$ , 所以  $\alpha''(t) = \mathbf{t}'(t)\|\alpha'(t)\| + \mathbf{t}(t)\frac{d}{dt}\|\alpha'(t)\|$ , 並且

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \|\alpha'(t)\|^2 \mathbf{t}(t) \wedge \mathbf{t}'(t).$$

注意到因爲  $\|\mathbf{t}(t)\| = 1$ , 所以  $\mathbf{t}(t)$  與  $\mathbf{t}'(t)$  互相垂直, 故

$$\frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\|\alpha'(t)\|^2 \|\mathbf{t}(t)\| \|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = \kappa(t).$$

(b) 因爲  $\mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$  與  $\mathbf{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$ , 由外積關係  $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$  得

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t) = \frac{\|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \alpha''(t) - \frac{\alpha'(t) \cdot \alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \alpha'(t),$$

由鏈鎖律 (chain rule) 知道  $\mathbf{b}'(t) = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \frac{ds}{dt}$ , 所以

$$\frac{\alpha'(t) \wedge \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \right) (\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) = \tau(t) \mathbf{n}(t) \frac{ds}{dt}.$$

上面等式兩邊與  $\mathbf{n}(t)$  內積後得到

$$\begin{aligned} \tau(t) \frac{ds}{dt} &= \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha'''(t)) \cdot \mathbf{n}(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \right) (\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \mathbf{n}(t) \\ &= -\frac{\|\alpha'(t)\| (\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} \end{aligned}$$

因爲  $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|$ , 所以

$$\tau(t) = -\frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

□

## 5 曲率公式的重新理解

討論 5. 討論以下公式爲何不可能會是曲率公式。

$$(1) \left\| \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3} \right\|$$

$$(2) \frac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3}$$

$$(3) \frac{\|\boldsymbol{\alpha}(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}'(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3}$$

$$(4) \frac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}(t)\|^3}$$

$$(5) \frac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}$$

討論 6. 討論以下公式爲何不可能會是扭率公式。

$$(A) -\frac{\det(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2}$$

$$(B) -\frac{\det(\boldsymbol{\alpha}''(t), \boldsymbol{\alpha}''(t), \boldsymbol{\alpha}'''(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2}$$

$$(C) \frac{\det(\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t), \boldsymbol{\alpha}'''(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2} \text{ (加負號的意義)}$$

$$(D) -\frac{\det(\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t), \boldsymbol{\alpha}'''(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}$$