

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

☐ 認識正則曲線與弧長以及以弧長為參數化的曲線。

2 預備知識

問題 1. 試與伙伴討論並歸結出以下結果:

- (a) 何謂微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus, part I)?
- (b) 若曲線以參數式 $(x(t), y(t))$ 表示時, 曲線弧長 (arc length) 如何用積分式表達?
- (c) 一個可微分的函數 $f(x)$, 如何判定這個函數是遞增 (increasing) 或遞減 (decreasing)?
- (d) 若 $y = f(x)$ 是一個遞增函數, 則 x 和 y 之間有什麼關聯? x 有可能表示成 y 有關的函數嗎?
- (e) 函數的導函數 (derivative) 與其反函數 (inverse function) 的導函數之間的關聯為何?

解.

3 正則曲線與弧長

回顧活動 1 的討論, 當我們想要用數學研究生活中所見形形色色的曲線, 一個可行的方式是對於空間曲線 (點集) 設法用映射 $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 去詮釋它。然而, 對於同一條曲線可能會有許多種方法表達 (活動 1 例題 5), 這將造成幾個必須解決的問題:

- (a) 每個人可能會用不同的方法呈現同一條空間曲線, 那誰的表達法比較好? 誰的寫法比較不優? 也就是說, 這麼多種的參數表示法中, 有沒有一種 最好的 或是 最自然 的參數表示?
- (b) 數學上會想要將每一個空間曲線賦予一些 幾何量 (geometric quantities), 但是依照這種情景, 就必須小心地定義的幾何量以符合 良適定義 (well-defined) 的原則: 不同的參數表示法經過計算要後會得到同樣的量。

這次的活動目標是要試圖回答上述的問題。在此之前, 我們必須對光滑參數曲線再做一個細分。

定義 2 (第 6 頁).

- (a) 給定光滑參數曲線 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, 若對所有 $t \in I$ 都有 $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$, 則稱它為 正則的 (regular)。
- (b) 對於非正則的光滑參數曲線 $\alpha(t)$, 我們稱那些 $\alpha'(t) = \mathbf{0}$ 的 t 為 奇異點 (singular point)。

問題 3. 當我們考慮正則的光滑參數曲線時, $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ 這件事情可引發出很多的概念:

- (A0) 因為 $\alpha'(t)$ 處處都不是零向量, 所以對所有 $t \in I$, _____。
- (A1) $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ 和 分量函數 (component functions) $(x'(t), y'(t), z'(t))$ 之間的關係為何?
- (A2) $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ 和曲線的 切線 (tangent lines) 有什麼關係?

解.

定義 4 (第 6 頁). 給定一條正則的光滑參數曲線 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, 給定 $t_0 \in I$ 與 $t \in I$, 定義曲線的 弧長 (arc length) 為

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| \, du = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2 + (z'(u))^2} \, du.$$

觀察弧長函數, 由 微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus) 得到

$$\frac{ds}{dt} = \underline{\hspace{2cm}},$$

所以 $s(t)$ 是一個 , 也因此它是一個 。故反函數 $t(s)$ 存在, 並且

$$\frac{dt}{ds} = \underline{\hspace{2cm}},$$

所以我們可把原先的正則光滑參數曲線 $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), a \leq t \leq b$ 重新以弧長函數參數化 (reparameterized by arc length function); 也就是說, 定義

$$\alpha(s) \stackrel{\text{定義}}{=} \alpha(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))), \quad c \leq s \leq d,$$

其中 $t(c) = a, t(d) = b$ 。以下將重新證明 $\alpha(s)$ 仍為正則的參數曲線:

由上述的造法得到的弧長參數 s 在空間曲線論中是重要的。給定一條正則的光滑空間曲線 α , 我們都可以用上述方法改成 以弧長為參數 (parameterize a curve by arc length) $\alpha(s)$ 表示。

例題 5. 試著將上述討論的內容改用圖形的方式表達。

解.

例題 6 (第 22 頁). 試將螺旋線 $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ 重新改用以弧長為參數法表示, 其中起點為 $(a, 0, 0)$ 沿著 t 增加的方向。試求螺旋線從 $(a, 0, 0)$ 到 $(a, 0, 2\pi b)$ 的弧長。

解.

問題 7. 以弧長為參數的參數化表示法, 為什麼它是最好的 或是 最自然 的參數表示?

解.