

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

☐ 探討如何利用曲面的第一基本式得到各式幾何量。

2 第一基本式的意義

我們研究正則曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 的方式是透過平面中的區域 $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ 以及映射 $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 進行「定位」——東西、南北、海拔。平面區域 U 就像是我們手上的地圖；而曲面的第一基本式 $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ 有如地圖上的比例尺告知伸縮與變形的關係。

就如平常使用地圖一樣（不論是普通的紙本地圖，或是數位地圖如 google map），我們總是可以在還沒到達目的地之前，就能利用地圖充份的了解各種地理資訊；換言之，我們只要有地圖 $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ 和比例尺 $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ 就可以解讀很多現象，即使 $\mathbf{x}(u, v)$ 這張地圖的製作過程以及如何定位都不知道也無妨。

2.1 曲面上的曲線長度

由第一基本式 (first fundamental form) 的定義，我們立刻得到曲面上的曲線之弧長公式：

定義 1 (第 97 頁). 曲線 $\alpha: I \rightarrow S, \alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ 的弧長 (arc length) s 計算方式為

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\bullet)\| d\bullet = \int_{t_0}^t \sqrt{I(\alpha'(\bullet))} d\bullet = \int_{t_0}^t \sqrt{E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2} d\bullet$$

2.2 兩條曲線在相交處的夾角

定義 2 (第 97 頁). 兩條正則參數曲線 $\alpha: I \rightarrow S, \beta: I \rightarrow S$ 在相交處 $t = t_0$ 所形成的夾角 (angle) θ 滿足以下關係：

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}$$

特別地，對於曲面參數式 $\mathbf{x}(u, v)$ 而言，坐標曲線（網格曲線）在相交處的夾角 φ 為

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{\|\mathbf{x}_u\| \|\mathbf{x}_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

定義 3 (第 95 頁). 給定曲面參數式 $\mathbf{x}(u, v)$ ，若對所有 $u, v \in U$ 都有 $F(u, v) \equiv 0$ ，則稱坐標曲線是正交的 (orthogonal)；這種特別的參數式稱為 正交參數式 (orthogonal parametrization)。

討論 4. 討論 活動 10 的 例題 6 中的哪些參數式是正交參數式?

解.

例題 5 (第 99 頁). 試在單位球上找到一條曲線 C 使得它與子午線 (meridians) $\{\theta = \text{常數}\}$ 在相交處的夾角是一個定角 β 。這種曲線稱為球上的 斜駛線, 恒向線 (loxodromes, rhumb lines)。

解.

2.3 曲面的面積 (第 100 頁)

令 $R \subset S$ 是正則曲面 S 上的一個有界區域。假設區域 R 包含於某個參數式 $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ 的映像 (image), 也就是說 $R \subset \mathbf{x}(U)$, 則區域 R 的 面積 (area) 為

$$A(R) = \iint_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv, \text{ 其中 } Q = \mathbf{x}^{-1}(R).$$

公式中第二個等式是透過關係式 $\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle^2 = \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2$ 改寫而得。

3 曲面上的光滑函數

在地圖上常見的等高線，它對應的數學與幾何上的概念又是什麼呢？在討論這個問題前，我們必須先了解曲面上的函數。給定正則曲面 S ，將曲面上每個點對應到一個實數，這樣就得到一個函數；首先我們要給予在曲面上的光滑函數 (smooth function) 的定義。

定義 6 (第 74 頁). 令 $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ 是一個定義於正則曲面 S 中某個開集 V 上的函數，若有一個光滑映射 $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ 其中 $p \in \mathbf{x}(U) \subset V$ 使得合成函數 $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $\mathbf{x}^{-1}(p)$ 是光滑的，則稱函數 f 在 $p \in V$ 點是光滑的 (smooth)。

換言之，我們利用在微積分中學到雙變數光函數的意義 (定義域是 $\mathbb{R}^2$ 中的某個區域) 定義曲面上的光滑函數 (定義域是彎曲的)。

例題 7 (第 75 頁). 若 S 是正則曲面，而 $W \subset \mathbb{R}^3$ 是開集合並且 $S \subset W$ 。考慮三變數光滑函數 $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ，則函數 f 限制在 S 上，記為 $f|_S$ ，是一個 S 上的光滑函數。理由如下：給定 $p \in S$ 以及在 p 附近的參數式 $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ ，則函數 $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}$ 也是光滑的。特別地，給定單位向量 (unit vector) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ，定義 S 對於 $\mathbf{v}$ 而言的高度函數 (height function) 為 $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ ， $h(p) = \vec{op} \cdot \mathbf{v}$ ，則 h 是一個 S 上的光滑函數。

定義 8 (第 104 頁). 一個可微分函數 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ 的 梯度 (gradient) 是一個可微分映射 $\text{grad } f : S \rightarrow T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$, 它將 $p \in S$ 對應到向量 $\text{grad } f(p) \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$ 滿足

$$\langle \text{grad } f(p), \mathbf{v} \rangle = df_p(\mathbf{v}) \quad \text{對所有 } \mathbf{v} \in T_p(S).$$

以下將探討梯度向量的幾何意義:

- (A) 固定 $p \in S$, 取遍所有在 $T_p(S)$ 上的單位向量 $\mathbf{v} \in T_p(S), \|\mathbf{v}\| = 1$, 則 $df_p(\mathbf{v})$ 達到最大值若且唯若 $\mathbf{v} = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$; 換言之, 梯度向量是函數在曲面 S 上指向函數增加最大的方向。
- (B) 考慮曲面 S 上的等高線 (level curve) $C = \{q \in S | f(q) = \text{常數}\}$ 。若在 C 上 $\text{grad } f \neq \mathbf{0}$, 則 C 是一條 S 上的正則曲線 (regular curve), 並且梯度向量 $\text{grad } f$ 與 C 處處垂直。

證明

- (A) 因為 $df_p(\mathbf{v}) = \langle \text{grad } f(p), \mathbf{v} \rangle = \|\text{grad } f\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta = \|\text{grad } f\| \cos \theta \leq \|\text{grad } f\|$, 所以 $df_p(\mathbf{v})$ 達到最大若且唯若 $\mathbf{v}$ 與 $\text{grad } f$ 平行且同向。因為 $\mathbf{v}$ 單位長, 於是 $\mathbf{v} = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$ 。
- (B) 假設 $q \in S$ 以及映射 $\mathbf{x} : U \rightarrow V \subset S$ 使得 $\mathbf{x}(U) \subset V$ 並且 $\mathbf{x}(p) = q$ 。觀察可微分函數 $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $f(q) = C_1 \in \mathbb{R}$, 欲證明等高線是一條正則曲線, 只要證明集合 $\mathbf{x}^{-1}(C \cap \mathbf{x}(U)) \subset U \subset \mathbb{R}^2$ 是一條正則的平面曲線。(想法與證明正則曲面類似, 由三變數函數在正則值之處, 其解集合是正則曲面)。

首先, 我們知道 $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是可微分函數。再則, 對於 $q' \in C$, 因為 $T_{q'}S$ 與 $T_{p'}(\mathbb{R}^2)$ 是向量空間的同構, 所以將梯度向量 $\text{grad } f(q') \in T_{q'}S$ 對回 $\mathbf{v}_{p'} \in T_{p'}(\mathbb{R}^2)$ 並且 $\mathbf{v}_{p'} \neq \mathbf{0}$ 。

計算

$$d(f \circ \mathbf{x})_{p'}(\mathbf{v}_{p'}) = df_{q'} \circ d\mathbf{x}_{p'}(\mathbf{v}_{p'}) = df_{q'}(\text{grad } f(q')) = \|\text{grad } f(q')\|^2 \neq 0.$$

所以微分映射 $d(f \circ \mathbf{x})$ 對所有 $\mathbf{x}^{-1}(C \cap \mathbf{x}(U))$ 上的點都是非退化的線性映射, 因此 C_1 是函數 $f \circ \mathbf{x}$ 的一個正則值, 因此 $\mathbf{x}^{-1}(C \cap \mathbf{x}(U))$ 是一條正則的平面曲線, 這也告知 C 是 S 上的正則曲線。

最後, 因為等高線 C 表示有一個映射 $\gamma(t) : I \rightarrow S$ 使得 $p = \alpha(t)$ 且 $f(\gamma(t)) = \text{常數}$, 所以兩邊對 t 微分, 由連鎖律得知對所有 t 都有

$$df(\gamma'(t)) \equiv 0,$$

由梯度向量的定義, 得到 $\langle \text{grad } f(p), \gamma'(t) \rangle = 0$, 所以梯度向量 $\text{grad } f$ 與等高線 C 處處垂直。

例題 9. 假設 S 是一個正則曲面, 其第一基本式 (first fundamental form) 為

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + 4) dv^2$$

- (A) 三條曲線 $C_1 : u = v^2, C_2 : u = -v^2, C_3 : v = 1$ 在 S 上圍出一個三角形, 試求三角形的周長。
- (B) 兩條曲面 $C_1 : u + v = 0$ 與 $C_2 : u - v = 0$ 在 S 上相交處的夾角為何?
- (C) 三條曲線 $C_1 : u = 2v, C_2 : u = -2v, C_3 : v = 1$ 在 S 上圍出一個三角形, 則三角形圍出的區域面積為何?

例題 10. 瑋哥在某塊山坡地上有一棟別墅, 別墅周圍是草地, 草地的外圍是由籬笆圍住。這塊土地的地勢起伏關係與 GOOGLE MAP PLUS 之間有一個對應:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v), \quad \text{比例尺爲 } 1(\text{公分}):1(\text{公尺})$$

將土地重現於地圖上可以很清楚地看到這塊土地呈現三角形的樣子, 而這個三角形可以用方程式 $u + v = 0, u - v = 0, u = 1$ 所刻畫。

- (A) 籬笆所圍出來的周長爲多少?
- (B1) 籬笆圍住的三角形的個頂點上的夾角分別爲何?
- (B2) 這個三角形內角和是大於、等於、還是小於 180 度?
- (C) 瑋哥的在山坡地上的置產面積有多大?