

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

- 學習一些曲面的參數化表示。
- 理解曲面的第一基本式 (first fundamental form)。

2 活動與觀察

討論 1. 與伙伴討論以下的問題:

(A1) 在氣球表面上先畫彼此等寬的平行線; 再畫另一組平行線與原平行線互相垂直。在吹氣之後, 任兩交點之間的間距還會一樣嗎? _____。兩曲線之間的角度仍為或直嗎? _____。曲面上的四邊形大小會一樣嗎? _____。

(A2) 觀察手上的兩張地圖, 在你還沒有到達目的地之前, 你可以從地圖上知道哪些事情?

3 曲面參數化

例題 2 (第 58 頁). 利用 球極坐標 (spherical coordinates) 將球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 參數化。其中參數 ϕ 稱為 餘緯 (colatitude, the complement of the latitude); 而參數 θ 稱為 經度 (longitude)。

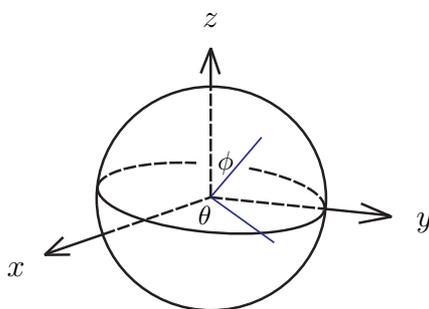


圖 1: 將球面參數化的一種方法。

解.

例題 3 (旋轉曲面, 第 78 頁). 給定正則光滑平面曲線 C 以及不與曲線相交的直線作為轉軸, 曲線對著軸作空間的旋轉所成之曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 稱為 旋轉曲面 (surfaces of revolution)。例如, 考慮在 xz 平面上的曲線 C , 將 z -軸作為旋轉軸。將 C 參數化得到

$$x = f(v), \quad z = g(v), \quad a < v < b, \quad f(v) > 0,$$

其中 $f(v) > 0$ 確保曲線與旋轉軸不相交。用參數 u 代表曲線 C 對 z -軸的 旋轉角 (rotation angle), 這麼一來, 就可以得到旋轉曲面的一個映射

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

其中 $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ 。

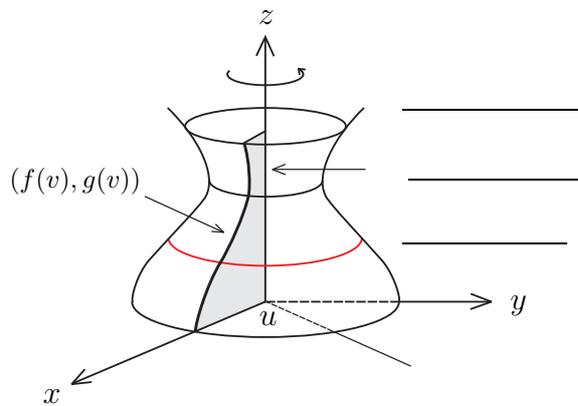


圖 2: 旋轉曲面 (surfaces of revolution)。

現在欲說明微分映射 (differential map) $d\mathbf{x}$ 是一對一。直接計算得到

$$\mathbf{x}_u(u, v) =$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) =$$

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v =$$

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| =$$

所以 $d\mathbf{x}$ 是一對一映射。因此旋轉曲面是一個正則參數曲面。

關於旋轉曲面, 有幾個數學專有名詞一併介紹, 將它們註記在圖形上。

- (a) 曲線 C 稱為旋轉曲面 S 的 生成曲線 (generating curve)。
- (b) z -軸稱為旋轉曲面 S 的 旋轉軸 (rotation axis)。
- (c) 曲線 C 上的任一點對著旋轉軸轉出的圓稱為 S 的 平行線 (parallels)。
- (d) 曲線 C 對 z -軸旋轉時, 不同階段所在的位置稱為 S 的 子午線 (meridians)。

例題 4 (螺旋面, 第 96 頁). 給定螺旋線 (helix) 的一個參數式 $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, au)$, 在螺旋線上每一點, 畫一條與 xy -平面平行並與 z -軸相交的直線, 這些直線生成出的曲面稱為螺旋面 (helicoid)。將螺旋面給予一個參數化方式:

$$\mathbf{x}(u, v) =$$

4 曲面第一基本式 (第 94 頁)

我們從觀察地圖的活動中知道, 在到達目的地之前, 我們可以從地圖上的資訊告知許多該地區的現象。微分幾何的曲面論也是在做同樣的事情, 我們利用映射 $\mathbf{x}(u, v)$ 將平面區域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 對應到曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$, 其中區域 U 就是手上的地圖, 而映射 $\mathbf{x}(u, v)$ 就是呈現地圖與實際位置之間的關係。在地圖上我們可以研究地圖上的平面曲線的長度, 再透過比例尺換算得到實際長度, 或是若要研究兩點之相對的方位或區域的面積 (在之後的活動才會深入探討), 數學上是透過第一基本式來理解它。

給定正則曲面 S , 首先我們利用 \mathbb{R}^3 中的內積可以賦予正則曲面 S 在切平面 $T_p(S)$ 的一個內積運算 $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, 也就是說, 若 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$, 則 $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p$ 是計算兩向量在 \mathbb{R}^3 中的內積。

定義 5 (第 92 頁). 給定正則曲面 S 與一點 p , 則二次型 (quadratic form) $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$

$$I_p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{w}\|^2 \geq 0,$$

稱為曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 在 p 點的第一基本式 (first fundamental form), 該映射在定義上來看是想要呈現切向量長度的平方。

現在想將第一基本式進行改寫。首先將 S 在 p 的一個鄰域參數化得到 $\mathbf{x}(u, v)$, 其中 $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, 在 U 中任取一條平面曲線 $\alpha(t) = (u(t), v(t)), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 使得 $\alpha(0) = (u(0), v(0)) = q, \alpha'(0) = (u'(0), v'(0))$ 。考慮空間曲線 $\beta(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, 並且 $\beta(0) = \mathbf{x}(q) = p$ 。因為 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ 會形成曲面 S 在 p 點的切平面的一組基底, 計算

$$\begin{aligned} I_p(\beta'(0)) &= \langle \beta'(0), \beta'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0), \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u'(0))^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u'(0)v'(0) + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v'(0))^2 \\ &= E(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2F(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + G(u_0, v_0)(v'(0))^2, \end{aligned}$$

換言之, 若要了解在 $p \in S$ 的某個切向量的長度平方, 只要知道 $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ 的值, 還有當原始坐標平面下的曲線的切向量就可求得。在幾何上, 我們會把第一基本式寫成微分形式 (differential form) 的樣子:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

例題 6 (第 95–97 頁). 試寫出求以下曲面之一種參數表示法及其第一基本式:

(B1) 在 \mathbb{R}^3 中通過 $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 且包含單位正交向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 的平面。

(B2) 圓柱 (circular cylinder) $x^2 + y^2 = 1$ 。

(C1) 球面 (sphere) $\mathbf{x}(\theta, \phi) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0, \pi)$ 。

(C2) 螺旋面 (helicoid) $\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$, $u, v \in \mathbb{R}$ 。

(D1) 輪胎面 (torus) $\mathbf{x}(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u)$, $u, v \in (0, 2\pi)$ 。

(D2) 旋轉曲面 (surfaces of revolution) $\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (a, b)$ 。

(E) 想一想 (B1) (B2) (C1) (C2) (D1) 中哪些可以套用 (D2) 的結果?

解.